AULA 4

# Introdução a Combinatória, Parte I

## 4.1 Introdução

Nesta aula aprenderemos a resolver alguns problemas fazendo uso, inicialmente, dos princípios aditivo e multiplicativo. A partir deles introduziremos conceitos de permutações, arranjos e combinações de objetos diferentes, ferramentas úteis para a solução de muitos problemas de contagem. Nosso objetivo é mostrar que as fórmulas de combinação, permutação e arranjos, que você aluno, já conhece, pode ser derivada dos princípios aditivo e multiplicativo. Veremos também vários exemplos de provas bijetivas combinatoriais, sendo esta uma poderosa ferramenta para encontrar resultados em combinatória.

Os exemplos a seguir ilustram os princípios aditivo e multiplicativo, que definiremos formalmente no final da seção seguinte, em conjunto com suas respectivas generalizações.

## 4.2 Pricípio Aditivo e Multiplicativo

**Exemplo 4.1.** Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Juventino tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quanto são os programas que Juventino pode fazer?

**Solução:**

Se Juventino tem dinheiro para assistir apenas 1 evento, então ou ele assiste ao Filme 1 ou ao Filme 2, ou ao Filme 3, ou à Peça 1, ou à Peça 2. Portanto há 5 programas diferentes que Juventino pode fazer.

**Exemplo 4.2.** Se no exemplo passado, Juventino tiver dinheiro para assistir a um filme e a uma peça de teatro, quantos são os programas que ele pode fazer?
**Solução:**
Vamos enumerar os casos possíveis:

Filme 1 e Peça 1

Filme 1 e Peça 2

Filme 2 e Peça 1

Filme 2 e Peça 2

Filme 3 e Peça 1

Filme 3 e Peça 2

Portanto, Juventino poderá escolher dentre 6 programas diferentes, se optar por assistir um filme e uma peça.

**Exemplo 4.3.** Numa confeitaria, há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgados. Suponha que Jenoveva só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Jenoveva pode fazer?
**Solução:**
Jenoveva pode escolher 1 sabor de picolé entre os 5 possíveis ou 1 salgado entre os 3 possíveis. De modo que os pedidos diferentes que Jenoveva pode fazer são 8.

**Exemplo 4.4.** Suponha que George vá a confeitaria com Jenoveva e possa tomar um picolé e comer um salgado. Quantos pedidos diferentes George pode fazer?

**Solução:**

Vamos enumerar os casos possíveis, sendo $S$ = salgado e $P$ = picolé.

S1 e P 1
S2 e P1
S3 e P1

S1 e P 2
S2 e P2
S3 e P2

S1 e P3
S2 e P3
S3 e P3

S1 e P4
S2 e P4
S3 e P4

S1 e P5
S2 e P5
S3 e P5

Portanto há 15 pedidos possíveis para George.

Os exemplos 1 e 3 obedecem a um mesmo princípoi básico que chamamos de princípio aditivo: Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$ com respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

No exemplo 1 podemos identificar os conjuntos:

$A = \{x|x \text{ é um filme}\} = \{F1, F2, F3\}$, e

$B = \{y|y \text{ é uma peça}\} = \{P1, P2\}$,

donde $A \cup B = \{x|x \text{ é um filme ou uma peça de teatro}\}$.

Os Exemplos 2 e 4 obedecem a um outro princípio básico de contagem que chamamos de princípio multiplicativo: Se um evento $A$ pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m.n$. Em linguagem de conjuntos, se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos, então o conjunto $A \times B$ dos pares $(a, b)$, tais que $a \in A$ e $b \in B$, tem cardinalidade $m.n$.

No exemplo 2, podemos tomar como evento A a escolha do Filme (que são 3) e como evento B a escolha da peça de teatro (que são 2). Portanto, Carlos pode escolher um filme e uma peça de teatro de $3.2 = 6$ , maneiras.

Tanto o princípio aditivo quanto o multiplicativo podem ser estendidos para um número finito qualquer de conjuntos.

**Definição 4.1. Extensão do princípio aditivo** Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos, disjuntos 2 a 2, e se $A_i$ possui $a_i$ elementos, então a união $\Cup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos .

**Definição 4.2. Extensão do princípio multiplicativo** Se um evento $A_i$ pode ocorrer de $m_i$ maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão de $m_1.m_2...m_n$ maneiras diferentes, ou seja $A_i$ é um conjunto com cardinalidades $m_i$, então o produto cartesiano

$A_1 \times A_2 \times \times ... \times A_n$ tem exatamente $m_1.m_2...m_n$ elementos.

## 4.3 Aplicações dos princípios Aditivo e Multiplicativo

**Exemplo 4.5.** De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, se é permitido que ambos sejam dados a um mesmo rapaz?

**Solução:**

O primeiro prêmio pode ser dado de 10 maneiras e o segundo prêmio pode ser dado também de 10 maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo temos $10 \times 10 = 100$ maneiras.

**Exemplo 4.6.** De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, se não é permitido que ambos sejam dados a um mesmo rapaz?

**Solução:**

O primeiro prêmio pode ser dado de 10 maneiras e o segundo prêmio pode ser dado também de apenas 9 maneiras. De modo, que pelo princípio multiplicativo temos $10 \times 9 = 90$ maneiras.

**Exemplo 4.7.** De quantas maneiras 2 pessoas podem estacionar seus carros numa garagem com 6 vagas?

**Solução:**

A primeira pessoa pode estacionar de 6 maneiras, restando apenas 5 vagas para a segunda, de modo que tem-se $6.5 = 30$ maneiras de duas pessoas estacionarem nesta garagem.

**Exemplo 4.8.** Quantos são os anagramas de duas letras diferentes que podemos formar com um alfabetos de 23 letras?

**Solução:**

A primeira letra pode ser escolhida de 23 maneiras e, como as letras devem ser diferentes, restam 22 possibilidades para escolher a segunda. Portanto, há $23.22 = 506$ anagramas de duas letras diferentes.

**Exemplo 4.9.** Quantos são os números que podemos formar com todos os dígitos 1,1,1,1,1,1,1,2 e 3?

**Solução:**

Se primeiramente colocarmos todos os dígitos 1's deixando espaços entre eles, teremos:

$- - 1 - -1 - -1 - -1 - -1 - -1 - -1 - -$

Podemos perceber que há 8 espaços nos quais podem ser colocados os dígitos 2 e 3, e supondo que colocarmos um dígito em algum espaço, teremos 9 possibilitades, como por exemplo:

$- - 1 - -1 - -2 - -1 - -1 - -1 - -1 - -1 - -$.

De modo que há $8.9 = 72$ números formados com os 9 dígitos.

## 4.4 Permutações Simples

**Definição 4.3.** Um permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos $P_n$ o número de permutações simples dos n objetos, então: $P_n = n!$.

Definimos $P_0 = 0! = 1$.

**Exemplo 4.10.** Considerando os dígitos 1,2,3,4 e 5, quantos números de 2

algarismos distintos podem ser formados?

**Solução:**

Temos duas posições para preencher: $P_1P_2$, Temos 5 possibilidades para $P_1$ e como não há repetições teremos: $5\times4 = 20$ possibilidades para formar 2 algarismos distintos com os 5 disponíveis.

**Exemplo 4.11.** Quantos são os subconjuntos de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com 2 elementos?

**Solução:**

Vamos listar os subconjuntos:

$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$,$\{4,5\}$. Deste modo há 10 possibilidades. A diferença entre este exemplo e o anterior é que, por exemplo, o algaristo 23 é diferente de 32, porém quando se trata de conjuntos, $\{1,2\} = \{2,1\}$, de modo que temos a metade tas possibilidades do exemplo anterior.

**Exemplo 4.12.** De quantas maneiras 5 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras?

**Solução:**

As 5 pessoas podem se sentar de $P_5 = 5!$ maneiras distintas.

## RESUMO

**Extensão do princípio aditivo** Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos, disjuntos 2 a 2, e se $A_i$ possui $a_i$ elementos, então a união $\Cup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

**Extensão do princípio multiplicativo** Se um evento $A_i$ pode ocorrer de $m_i$ maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão de $m_1.m_2...m_n$ maneiras diferentes, ou seja $A_i$ é um conjunto com cardinalidades $m_i$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \times ... \times A_n$ tem exatamente $m_1.m_2...m_n$ elementos.

Um permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos $P_n$ o número de permutações simples dos n objetos, então:

$P_n = n!$.

## PRÓXIMA AULA

Seguindo ainda em combinatória, na próxima aula trabalharemos com arranjos com repetição, e combinações, sendo que estas definições podem ser obtidas como consequência dos princípios aditivos e multiplicativos que vimos aqui. ..

## ATIVIDADES

**ATIV. 4.1.** Um nome de uma variável na linguagem fortran é uma sequência que tem no máximo 6 caracteres, tal que o primeiro caracter é uma letra do alfabeto e o restante são letras ou números. Encontre o número de variáveis nessa linguagem.

**ATIV. 4.2.** Seja $X$ o conjunto de todos os polinômios de grau 4 em uma variável t, tal que os seus coeficientes sejam inteiros não negativos. Qual é a cardinalidade de $X$?

Quantos números de telefone é possível se ter com 9 dígitos , sendo que o primeiro e o segundo não se repetem?

**ATIV. 4.3.** Considere 3 vogais (incluindo o A) e 7 consoantes (incluindo o B):

a) Quantosanagramasde5 letras diferentes podem ser formados com 3 consoantese 2 vogais?

Considerando os anagramas do item a), responda:

b) Quantos contêm a letra B?

c) Quantos começam com o B?

d) Quantos começam com o A?

e) Quantos começam com o A econtém o B?

**ATIV. 4.4.** O código Morse usa duas letras, traço e ponto, e as palavras tem de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

## LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Guelli, C.A., Iezzi, G., Dolce, O., Álgebra I - Sequencias - Progressões - Logarítmos, Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.