AULA 5

# Introdução a Combinatória, Parte II

## 5.1 Introdução

Vamos a segunda parte no nosso estudo de combinatória. Nesta aula vamos trabalhar os conceitos de arranjos e combinações. Como veremos, um arranjo de n elementos dispostos k a k é definido como o número de k-uplas geradas com n elementos, ao passo que uma combinação de n tomada k a k é o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos. Você, aluno deverá compreender estes simples conceitos não apenas como fórmulas para se resolver de forma "mágica"problemas de contagem, para que no futuro, você possa resolver tais problemas simplesmente utilizando o bom senso.

## 5.2 Arranjos simples

**Definição 5.1.** Arranjos simples de n elementos tomados k a k, onde $k \geq 1$ e k é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de k elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos k elementos que compõem cada grupo. Notação $A_n^k$.

Vamos tentar encontrar uma expressão matemática que caracterize $A_n^k$, usando o princípio multiplicativo.

Temos n elementos dos quais queremos tomar k. Este é um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher k lugares.

$\bar{L_1} \quad \bar{L_2} \quad \bar{L_3} \quad ... \ \bar{L_k}$

O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido $L_1$, restam $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de $L_2$, há $(n-2)$ maneiras de se preencher $L_3$ e, assim $(n-(k-1))$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo, podemos dizer que as k posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$ maneiras. Portanto

$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$.

Sabemos que uma igualdade não se altera se multiplicarmos e dividirmos por um mesmo valor, então:

$$A_n^k = \frac{[n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))](n-k)(n-k-1)...2.1]}{(n-k)(n-k-1)...2.1},$$

podendo ser simplificada para:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Exemplo 5.1.** Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

**Solução:**

$A_{23}^2 = \frac{23!}{21!} = 23.22 = 506$

**Exemplo 5.2.** Considerando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5$, quantos números de 2 algarismos diferentes podem ser formados?

**Solução:**

$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20$

**Exemplo 5.3.** Considere os algarismos $1, 2, 3, 4, 5$, quantos números distintos superiores a 100 e inferiores a 1000 podemos formar, se:

a) o número é par?

b)o número é ímpar?

c)o número é par ou ímpar?

**Solução:**

Os números a serem cosiderados tem 3 dígitos, o que equivale a pensarmos que há 3 posições a serem preenchidas, pois queremos um número $<$1000.

$P_1P_2P_3$

Em a), queremos que o número $P_1P_2P_3$ seja par, para tal $P_3$ tem que ser 2 ou 4. Deste modo temos que cumprir a restrição em primeiro lugar, de modo que, para o preenchimeto de $P_3$ temos duas maneiras:

i)$P_1P_2$ 2

ii) $P_1P_2$ 4.

Para as posições $P_1$ e $P_2$ temos à disposição os algarismos 1,3,4,5 para i) e 1,2,3,4 para ii). Assim teremos

$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4.3 = 12$ maneiras diferentes para preencher as posições $P_1$ e $P_2$ para cada item.

Como há duas possibilidades para $P_3$ (2 ou 4), temos:

$2A_4^2 = 2\frac{4!}{2!} = 2.4.3 = 24$ maneiras diferentes de preencher 3 posições, isto é há 24 números pares superiores a 100 e inferiores a 1000, formados com os algarismos distintos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Em b) o raciocínio é análogo, e no caso, se o número $P_1P_2P_3$ é ímpar, $P_3$ terá que ser 1 ou 5. Deste modo teremos as possibilidades:

i')$P_1P_2$ 1

ii') $P_1P_2$ 3

iii') $P_1 P_2$ 5.

Como em a) temos tanto para i'), ii') e iii') $A_4^2$ possibilidades para $P_1$ e $P_2$. Portanto teremos $3A_4^2 = 3\frac{4!}{2!} = 3.4.3 = 36$ maneiras diferentes de preencher 3 posições, com estas restrições, ou seja teremos $3A_4^2$ números ímpares superiores a 100 e inferiores a 1000, formados com os algarismos distintos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Para a letra c), os números podem ser pares ou ímpares, então, pelo princípio aditivo, temos:
$2A_4^2 + 3A_4^2 = 5A_4^2 = 60$ números superiores a 100 e inferiores a 1000 respeitando as restrições dadas.

## 5.3 Combinações simples

**Definição 5.2.** Uma combinação simples de n elementos tomados k a k, onde $n \geq 1$ e $k$ é um número natural, tal que $k \leq n$, é o número de subconjuntos com k elementos que se possa obter de conjunto com n elementos. Notação: $C_n^k = \binom{n}{k}$ (lê-se combinação de n k a k). Se $k > n$, k e n inteiros, define-se: $\binom{n}{k} = 0$

Como em um conjunto a ordem dos elementos não importa, podemos definir uma combinação simples de n elementos, tomados k a k, onde $k \leq n$, como sendo todas as escolhas não ordenadas de k desses n elementos.
Vimos na seção anterior que o número de arranjos simples de n elementos tomados k a k é igual ao número de maneiras de preencher k lugares com n elementos disponívies, de modo que obtivemos a fórmula:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nosso objetivo é encontrar uma fórmula análoga a esta para o número de combinações de n tomado k a k.

O número de arranjos simples de n elementos tomados k a k, $A_n^k$, pode ser interpretado como o número de agrupamentos que diferem entre si pela natureza e pela ordem de colocação dos elementos no agrupamento, isto é, importa quem participa e o lugar que ocupa. Porém, quando consideramos combinações simples de n elementos tomados k a k, temos subconjuntos de k elementos, tomados dentre n elementos disponíveis, que diferem entre si apenas pela natureza dos elementos, isto é, importa somente quem participa do subconjuto. Para ilustrar o fato, o conjunto $\{a, b, c\}$ é o mesmo de $\{a, c, b\}$.

Deste modo, podemos dizer que o número de subconjuntos, no caso, equivale ao número deescolhas que se possa fazer de k algarismos dentre os n algarismos possíveis, de modo que

$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, e assim vale a equação:

$A_n^k = k!\binom{n}{k}$,

isto é, o arranjo de n elementos tomados k a k pode ser calculado a partir de uma escolha de determinados objetos, considerando-se para cada escolha a permutação desses objetos.

**Exemplo 5.4.** Quantos são os anagramas formados por 2 vogais e 3 consoantes escolhodas dentre 18 consoantes e 5 vogais?

**Solução:**

A escolha de vogais pode se dar de $\binom{5}{2}$ maneiras diferentes. A escolha das consoantes pode se dar de $\binom{18}{3}$ maneiras diferentes. Portanto, o número de anagramas com 2 vogais e 3 consoantes será dado por:

$\binom{5}{2}\binom{18}{3}5! = \frac{5!}{2!3!}\frac{18!}{3!15!}5! = 979200.$

**Exemplo 5.5.** Quantos são os anagramas da palavra *UNIFORMES* começam por consoante e terminam com vogal?

**Solução:**

A palavra *UNIFORMES* possui 4 vogais e 5 consoantes. Devemos escolher 1 consoante para começar a palavra e 1 volgal para terminá-la. Isto pode ser feito, respectivamente, de $\binom{5}{1}$ e $\binom{4}{1}$maneiras diferentes. As outras 7 letras podem ocupar qualquer uma das 7 posições e isto se dá de 7! maneiras diferentes. Portanto, $\binom{5}{1}\binom{4}{1}7! = 5.4.7! = 100800$ é o número de anagramas da palavra *UNIFORMES* que começam por consoante e terminam por vogal.

**Exemplo 5.6.** Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando-se 14 pontos de um plano, não havendo 3 pontos alinhados?

**Solução:**

Como não há 3 pontos alinhados, basta escolhermos 3 pontos dentre os 14 para traçarmos um triângulo. Deste forma, podemos traçar
$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3!11!} = 364$ triângulos diferentes.

## 5.4 Combinações Complementares

Consideremos n objetos distintos. O número de maneiras de escolhermos k objetos é idêntico ao número de maneiras de escolhermos $(n-k)$ objetos, pois, se dos n objetos tirarmos $(n-k)$, sobram k. Logo, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, onde $\binom{n}{n-k}$ é chamada *combinação complementar* de $\binom{n}{k}$.

**Exemplo 5.7.** De quantas maneiras diferentes podemos arrumar em fila 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(/)$?

**Solução:**

Podemos considerar o problema como equivalente ao de se ter 12 lugares para serem preenchidos com 5 sinais $(-)$ e 7 sinais $(/)$. Neste caso, tanto faz escolhermos 5 lugares dentre os 12 para colocarmos os sinais $(-)$ e nos que sobrarem colocarmos os 7 sinais

(/) ou escolhermos 7 lugares dentre os 12 para colocarmos os sinais (/) e nos que sobrarem colocarmos os sinais (−), visto que $\binom{12}{5} = \binom{12}{7} \frac{12!}{5!7!} = 792$. Portanto há 792 maneiras de arrumarmos em fila 5 sinais (−) e 7 sinais (/).

**Exemplo 5.8.** Quantas diagonais possui um polígono regular de n lados?

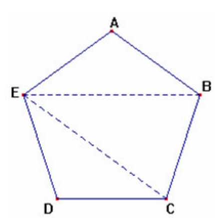
**Solução:**

Vamos denominar os n vértices por $A, B, C, ....$ Tomemos o vértice $A$ no polígono, por exemplo e vamos traçar as diagonais.

De maneira como os vértices são dispostos na figura acima, não podemos ligar $A$ a $B$ e nem A a E pois teríamos lados e não diagonais. Entretanto, A pode ser ligado a qualquer um dos 3 lados $(= n - 3)$ vértices restantes. O número de maneiras de traçarmos estas diagonais é escolher 1 dentre os $(n-3)$ vértices restantes, isto é, $\binom{n-3}{1}$. Como há n vértices e para cada um deles há $\binom{n-3}{1}$ deveria ser o número de diagonais do polígono. Entretanto, estamos contando, por exemplo, a diagonal entre os vértices A e C, duas vezes, quando o vértice considerado é o A e quando o outro vértice considerado é o C. Devemos então dividir este resultado por 2.

Portanto, um polígono regular de n lados possui:

$\frac{n\binom{n-3}{1}}{2} = \frac{n}{2}\frac{(n-3)!}{(n-4)!} = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.




**Exemplo 5.9.** De quantas maneiras pode-se escolher 3 números naturais distintosde 1 a 30,de modo que a soma dos números escolhidos seja par?

**Solução:**

Sejam
$A = \{1, 2, 3, ..., 30\}$,
$A_1 = \{x \in A | x \text{ é par}\} = \{2, 4, 6, ..., 30\}$,
$A_2 = \{x \in A | x \text{ é ímpar}\} = \{1, 3, 5, ..., 29\}$.

Portanto, $n(A_1) = 15$ e $n(A_2) = 15$. Para obtermos soma par de 3 números escolhidos dentre os elementos de A, podemos escolher:
a) 3 números de $A_1$, que podem ser feito de $\binom{15}{3}$ maneiras, ou
b) 2 números de $A_2$ e 1número de $A_1$, o que pode ser feito de $\binom{15}{2}\binom{15}{2}$ maneiras.
De modo que, há $\binom{15}{3} + \binom{15}{2}\binom{15}{1} = 2030$ maneiras de se escolher 3 números distintos de 1 a 30 de modo que a soma deles seja par.

## 5.5 Conclusão

Na aula passada introduzimos dois princípios muito importantes: o aditivo e multiplicativo. A partir destes, começamos a obter fórmulas para combinações e arranjos para resolver problemas de contagem onde repetições de objetos não são permitidas. Embora novas fórmulas foram fornecidas, você aluno, deve observar que resolver problemas de contagem deste tipo é mais do que simples aplicações de fórmulas, é necessário que você use o bom senso e lance mão de diagramas e exemplos se forem necessários para tais.

## RESUMO

### Arranjos simples

Arranjos simples de n elementos tomados k a k, $A_n^k$, onde $k \geq 1$ e k é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de k elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos k elementos que compõem cada grupo. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

**Combinações simples**

Uma combinação simples de n elementos tomados k a k, onde $n \geq 1$ e $k$ é um número natural, tal que $k \leq n$, é o número de subconjuntos com k elementos que se possa obter de conjunto com n elementos. Notação: $C_n^k = \binom{n}{k}$ (lê-se combinação de n k a k). Se $k > n$, k e n inteiros, define-se: $\binom{n}{k} = 0$. No caso, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

**Combinações complementares**

Consideremos n objetos distintos. O número de maneiras de escolhermos k objetos é idêntico ao número de maneiras de escolhermos $(n-k)$ objetos, pois, se dos n objetos tirarmos $(n-k)$, sobram k. Logo, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, onde $\binom{n}{n-k}$ é chamada *combinação complementar* de $\binom{n}{k}$.

## PRÓXIMA AULA

Na próxima aula trabalharemos com aplicações dos princípios aditivo e multiplicativo, para resolver problemas como: encontrar as soluções inteiras de equações lineares com coeficientes unitários, e outros problemas de contagem que envolvem combinações e permutações.

## ATIVIDADES

**ATIV. 5.1.** Prove as identidades:

a)$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

b)$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$

**ATIV. 5.2.** Dados 15 objetos, quantas são as combinações que podem ser feitas com 4 dessesobjetos, se as combinações:

a) contêm um determinado objeto?

b) não contêm o objeto considerado?

**ATIV. 5.3.** Determine o valor de n se:

a) $A_n^2 = 72$

b)$A_n^4 = 42A_n^2$.

c) $4A_n^2 = A_{2n}^3$.

**ATIV. 5.4.** São dadosos pontos A, B,C e D sobre uma reta m e A, F, G, H e I sobre uma reta n, distinta de m. Quantos triângulos podemser formados unindo-se estes pontos?

**ATIV. 5.5.** De quantas maneiras 3 americanos, 4 franceses e 3 belgas podem sentar em fila, de modo que os de mesma nacionalidade sentem juntos?

## LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Fernandez, P., Análise Combinatória, Editora Impa, 2004.