AULA 6

Introdução a Combinatória-Aplicações, parte I

6.1 Introdução

Na aula anterior, com o auxílio dos princípios aditivo e multiplicativo, introduzimos os conceitos de permutação, arranjos e combinações simples. Nesta aula vamos aplicar estes conceitos na obtenção de solução para alguns problemas específicos de contagem como soluções para equações lineares, entre outros. Extenderemos os conceitos de permutações e combinações simples, para o caso em a repetição de elementos seja permitida.

6.2 Equações Lineares com coeficientes unitários

Nosso objetivo, nesta aula, é enumerar as soluções inteiras possíveis de uma equação da forma:

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$,

onde x_i, para $i = 1, 2, ..., n$ e m são inteiros.

Se, por exemplo, considerarmos a equação:

$x_1 + x_2 = 5$,

exigindo apenas que x_1 e x_2 sejam inteiros, não vamos ter um número finito de soluções. Isto pode ser facilmente verificado através da tabela abaixo, onde a soma de quaisquer dois números em cada coluna é sempre 5.

x_1	...	-2	-1	0	1	2	3	...
x_2	...	7	6	5	4	3	2	...

Devemos, pois, restringir os possíveis valores que estas variáveis possam assumir a fim de tornar finito o número de soluções da equação dada. Se estivermos interessadosem soluções inteiras e positivas, o número de soluções será igual a 4, como podeser visto na tabela acima.

No seguinte teorema, consideremos o caso geral em que contamos o número de soluções, em inteiros positivos, de uma equação linear com coeficientes unitários.

Teorema 6.1. *O número de soluções em inteiros positivos da equação:*

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m$, *para* $m > 0$,

é dado por $\binom{m-1}{r-1}$.

Demonstração

Como estamos interessados em expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros positivos, basta, como fizemos no exemplo anterior, colocarmos $r - 1$ barras divisoras entre os m 1's:

$1 + 1 + |1 + 1 + ... + 1| + ... + | + 1 + 1 = m.$

O valor de x_1 será o número de 1's que antecedem a primeira barra, o valor de x_2, o número de 1's entre a primeira e a segunda barra, e assim por diante, até obtermos o valor x_r como sendo o número de 1's à direita da barra de número $r - 1$. Como a cada possível distribuição das barras corresponde uma única solução para a equação acima, basta contarmos de quantas formas isto pode ser feito. Como temos $m - 1$ posições possíveis e devemos escolher $r - 1$ destas posições, teremos $\binom{m-1}{r-1}$ possibilidades diferentes para estas alocações, ou seja teremos $\binom{m-1}{r-1}$ soluções distintas em inteiros positivos para a equação acima.

Exemplo 6.1. Encontre o número de soluções em inteiros positivos das seguintes equações:

a) $x + y = 11$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$

Solução:

a)Neste caso $r = 2$ e $m = 11$, então o número de soluções em inteiros positivos para a equação será: $\binom{m-1}{r-1} = \binom{10}{1} = 10$.

b)Temos $m = 9$ e $r = 5$, assim teremos $\binom{8}{4} = 70$ soluções para a equação dada.

No próximo teorema, forneceremos uma fórmula para o número de soluções de equações em inteiros ≥ 0.

Teorema 6.2. *O número de soluções em inteiros não negativos da equação:*

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m$, *para* $m > 0$,

é dado por $\binom{r+m-1}{r-1} = \binom{r+m-1}{m}$.

Demonstração

Cosideremos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m$, com $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq r$. Somando 1 a cada x_i, obtemos:

$x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 + ... + x_r + 1 = m + r$.

Se chamarmos $x_i + 1 = y_i$, teremos:

$y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_r = m + r$, para $y_i \geq 1$. E esta nova equação que é equivalente a primeira, sabemos que há $\binom{r+m-1}{r-1}$ soluções em inteiros positivos. Logo teremos $\binom{r+m-1}{r-1} = \binom{r+m-1}{m}$ soluções de $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m$ em inteiros não negativos.

Exemplo 6.2. Encontre o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$.

Solução:

Como $r = 5$ e $m = 12$, então o número de soluções em inteiros não negativos para a equação será: $\binom{m-1}{r-1} = \binom{12+5-1}{5-1} = 1820$.

Exemplo 6.3. Encontre o número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, onde $x_2 > 5$.

Solução:

Se cada solução de $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ em inteiros positivos com $x_2 > 5$, subtrairmos 5 unidades de x_2, teremos uma solução, em inteiros positivos para $y_1 + y_2 + y_3 = 15$, onde

$y_1 = x_1$,

$y_2 = x_2 - 5$, e

$y_3 = x_3$.

Assim o número de soluções de $y_1 + y_2 + y_3 = 15$ em inteiros positivos é $\binom{14}{2} = 1820$, que é o mesmo de $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, onde $x_2 > 5$.

Exemplo 6.4. Encontre o número de soluções em inteiros nãonegativos da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 18$, nas quais exatamente 2 incógnitas são nulas.

Solução:

Se exatamente duas dessas incógnitas são nulas, devemoscontar onúmero de soluções em inteiros positivos de $y_1 + y_2 + y_3 = 18$, que é igual a $\binom{17}{2}$, e multiplicar por $\binom{5}{2} = 10$, que é o número de escolhas das duas incógnitas que terão valor nulo.

6.3 Combinações com repetição

Vamos dispor de um exemplo para explicarmos o que é uma combinação com repetição. Suponhamos que num parque de diversões existam 4 tipos de brinquedos a, b, c, d, e que uma pessoa queira comprar dois bilhetes. É claro que ela poderá comprar dois bilhetes do mesmo tipo (pode ser que ela queira ir duas vezes no mesmo brinquedo). Na tabela abaixo temos a lista de todas as possibilidades:

$$\begin{array}{cccc} aa & bb & cc & dd \\ ab & bc & cd & \\ ac & bd & & \\ ad & & & \end{array}$$

Observe que este número é maior do que $\binom{4}{2} = 6$, pois quando estamos estamos considerando as combinações simples de 4 tomados 2 a 2, não podemos tomar um mesmo objeto mais de uma vez. Dizemos ser a tabela acima a lista das *combinações com repetição* de 4 tomados 2 a 2. A diferença disto com o número de combinações que vimos na aula é que nenhum objeto pode aparecer mais de uma vez.

Agora vamos supor que ela resolva comprar 5 bilhetes para estes 4 brinquedos. Algumas possibilidades seriam:

$aaaaa \quad abbbb \quad accbb \quad ddcbb \quad cdaab$

Estamos interessados em contar o total de elementos do tipo acima para saber quais foram os 5 bilhetes comprados, basta que a pessoa nos diga quantos bilhetes de cada tipo ela comprou. Se chamarmos de x_1 o número de bilhetes para o brinquedo a, de x_2 para o brinquedo b, e assim por diante, nosso problema de contagem se reduz a encontrar o número de soluções não negativas para a equação:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$,

que, como sabemos, é igual a $\binom{8}{3} = 56$. Denotamos isto por CR_4^5.

Definição 6.1. O número CR_n^k é o número total de maneiras de selecionar k objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto podeser tomado até k vezes.

Como vimos, este número é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$,
que como vimos é igual a $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.
Deste modo, temos: $CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

Exemplo 6.5. De quantos modos podemos comprar 4 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerantes?
Solução:
Temos $CR_2^4 = \binom{2+4-1}{4} = 5$ possibilidades para se comprar os refrigerantes.

Exemplo 6.6. Dispondo de 4 cores diferentes, de quantas maneiras distintas podemos pintar 5 objetos idênticos?(Cada objeto deve ser pintado com uma só cor).
Solução:
Precisamos decidir quantas vezes cada cor vai ser utilizada. Isto é igual a
$CR_4^5 = \binom{8}{5} = 56$.

Exemplo 6.7. De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bombons idênticos em 4 caixas diferentes?
Solução:
Este número é o número de soluções em inteiros não negativos da equação:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$,
onde x_i denota o número de bombons na caixa $i = 1, 2, 3, 4$.
Logo $CR_4^{10} = \binom{13}{10} = 286$ possibilidades para alocar estes objetos idênticos em 4 caixas diferentes.

6.4 Permutações com repetição

Na aula passada, vimos o que chamamos de permutações simples de n elementos, isto é, contamos o número de maneiras que existem para colocarmos em fila n elementos distintos. Como consequência imediata do princípio multiplicativo, este número é igual a $n!$. Consideremos, agora, o caso em que dentre os n elementos existem n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, e assim por diante até n_r iguais a a_r. Assim, precisamos escolher n_1 lugares para colocação dos$a_1's$. Dos $n - n_1$ lugares restantes, ecolher n_2 para colocação dos $a_2's$ e assim por diante, obtendo

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}...\binom{n-n_1-n_2...-n_{r-1}}{n_r} =$$
$$= \frac{n_1!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}...\frac{(n_1-n_2-...-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-...-n_r)!} =$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}.$$

Denotamos este número por $PR(n; n_1, n_2, ..., n_r) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$.

Exemplo 6.8. Dequantas maneiras 7 pombos podem ser alocados em 4 casas com 2 pombos na casa a, 3 na casa b , 1 na c e 1 na d.

Solução:

Isto pode se feito de $PR(7; 2, 3, 1, 1) = \dfrac{7!}{2!3!1!1!}$ maneiras.

Exemplo 6.9. Suponha que lutador de boxe tenha vencido 18 vezes, perdido 3 vezes e empatado 2 vezes. De quantas maneiras isto pode ter ocorrido?

Solução:

Isto pode ter ocorrido de $PR(23; 18, 3, 2) = \dfrac{23!}{18!3!2!}$ maneiras.

RESUMO

Soluções inteiras para equações lineares

O número de soluções em inteiros positivos da equação:

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = m$, para $m > 0$,

é dado por $\binom{m-1}{r-1}$.

Combinações com repetição

O número de combinações com repetição CR_n^k é o número total de maneiras de selecionar k objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto podeser tomado até k vezes. E vale a fórmula $CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

Permutações com repetição

Uma permutação de n elementos em que repetições de elementos são permitidas é dada pela fórmula:

$$PR(n; n_1, n_2, ..., n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula vamos tratar de outras aplicações dos princípios aditivos e multiplicativos: permutações circulares e arranjos com repetição. Vamos também encontrar fórmulas para os coeficientes de a e b na expansão de $(a+b)^n$ e derivar muitas propriedades disto.

ATIVIDADES

ATIV. 6.1. Calcule o númerodesoluções inteiras positivas de:

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{11} = 11$

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$

ATIV. 6.2. Sabendo que a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ possui 10 soluções inteiras positivas, determinar n.

ATIV. 6.3. Quantos números inteiros entre 1 e 10000 tem soma dos dígitos igual a 12?

ATIV. 6.4. De quantas maneiras podemos distribuir 30 laranjas para 4 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 2 laranjas?

ATIV. 6.5. De quantos modos podemos comprar 12 pares de sapatos de 3 tipos possíveis?

ATIV. 6.6. De quantas maneiras podemos colocar 15 pessoas em 5 quartos em que no primeiro quarto estejam 4 pessoas?

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Fernandez, P., Análise Combinatória, Editora Impa, 2004.