AULA 7

Introdução a Combinatória-Aplicações, parte II

7.1 Introdução

Nesta aula vamos estudar aplicações um pouco diferentes das da aula passada. No caso estudaremos arranjos com repetição, permutações circulares e o principal: compreenderemos algumas propriedades importantes sobre coeficientes binomiais. Forneceremos algumas provas bijetivas combinatórias acerca de alguns problemas. Estas provas são muito importantes pois conseguem fornecer argumentos apenas usando o "bom senso", sem necessitar de construções mais arrojadas. Por este motivo estas tais provas combinatórias conseguem fornecer argumentos para certas demonstrações que uma prova formal, no sentido da análise, por exemplo, não conseguiria.

7.2 Arranjos com repetição

Na aula 5, vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados k a k é dado por:

$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

Este número conta todas as possíveis maneiras de se retirar, de um conjunto de elementos distintos k elementos, levando-se em conta a ordem dos elementos. O que é equivalente ao número de maneiras de se enfileirar k pessoas em n lugares possíveis.

Caso repetições sejam permitidas, o princípio multiplicativo nos diz que o número total de maneiras de se retirar, levando-se em conta a ordem, k dos n objetos, distintos ou não, é igual a

$$AR_n^k = n^k,$$

uma vez que o primeiro elemento pode ser retirado de n maneiras, o segundo também de n maneiras, e assim sucessivamente, até que o k-ésimo seja escolhido.

Exemplo 7.1. Quantos números de telefone celular com 8 dígitos é possível se ter, sabendo que o primeiro dígito dever ser 8 ou 9?

Solução:

Considerando os 10 dígitos possíveis em 7 lugares $AR_{10}^7 = 10^7$ telefones diferentes fixando 1 número, 8 ou 9. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos o total de

$$2AR_{10}^7 = 20000000,$$

telefones possíveis.

Exemplo 7.2. Qual o total de placas de carro que podem ser feitas constando de 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos por dígitos?

Solução:

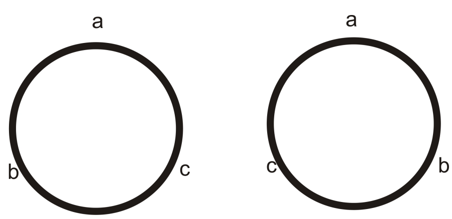
Considerando-se o alfabetos com 26 letras, podemos escolher as 3 letras de $AR_{26}^3 = 26^3$ maneiras diferentes e os dígitos de $AR_{10}^4 = 10^4$ formas diferentes. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos o total de

$$AR_{26}^3 AR_{10}^4 = 175760000,$$

placas possíveis que poderão ser feitas.

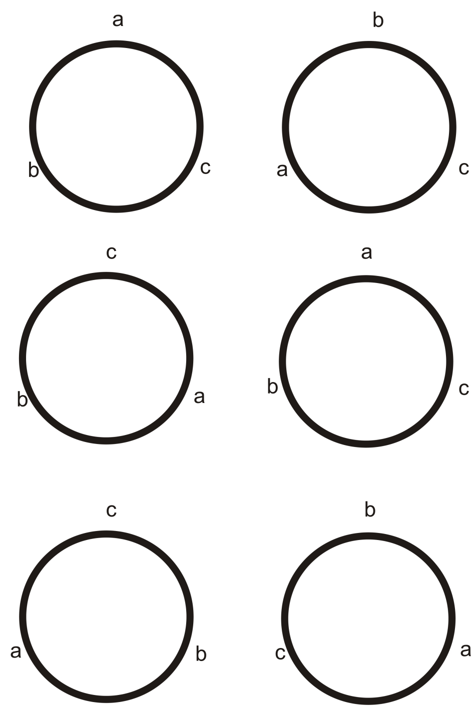
7.3 Permutações Circulares

Nosso objetivo, agora, é contar o número de maneiras de se ordenar n objetos distintos em torno de um círculo. Por exemplo, considere 3 objetos a, b, c, e coloquemos estes objetos em torno de um círculo.



Afirmamos serem estas as únicas maneiras decolocarmos estes 3 objetos em torno de um círculo. Isto porque cosideramos idênticas duas distribuições quando uma pode ser obtida a partir da outra por uma simples rotação. Para melhor esclarecer esta definição, consideremos todas as permutações simples de a, b e c e coloquemos, em torno de um círculo, cada uma delas. Este procedimento está ilustrado na figura abaixo.

É fácil observar que, as 3 primeiras figuras, bem como as 3 últimas podem ser obtidas a partir de outra pro uma simples rotação. No entanto nenhuma das 3 primeiras pode ser obtida, por rotação, a partir de nenhuma das 3 últimas. Logo, existem apenas 2 permutações circulares de 3 objetos. Como existem 3! permutações de 3 objetos e duas permutações circulares, temos que $2 = 3!/3$.



É fácil notar que se soubermos quantas permutações simples distintas geram permutações circulares equivalentes, teremos resolvido o problema. É fácil ver que este número é n, pois se não considerássemos equivalentes as figuras que podem coincidir por rotação, teríamos o total de $n!$. Logo,

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!,$$

onde PC_n denota o número de permutações circulares de n objetos.

Exemplo 7.3. De quantas maneiras 19 crianças podem dar as mãos para brincar de roda?

Solução:

Neste caso, basta considerarmos as permutações circulares de 19, isto é, as 19 crianças podem brincar $PC_{19} = (19-1)! = 18!$ maneiras.

7.4 Coeficientes Binomiais

Chamamos de *binômio* qualquer expressão da forma $a+b$, isto é, a soma de dois símbolos distintos. Estaremos interessados no cálculo dos coeficientes das expansões de potências de $a+b$. Vamos considerar, inicialmente, o produto

$(a+b)(c+d)(e+f) = ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf$,

que consiste de oito termos, onde cada termo consiste em 3 letras, cada uma selecionada de um dos binômios. Pelo princípio multiplicativo, é claro que o número total de termos é $2^3 = 8$. Para o produto $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$, temos $2^4 = 16$ termos, cada um consistindo de um produto de 4 letras, cada uma delas pertencendo a um dos 4 binômios considerados. Por exemplo, acdf e adeh são alguns dos 16 termos deste último produto. No caso de n binômios, temos 2^n termos.

Consideremos, agora, o produto

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Como temos 64 maneiras de selecionarmos 6 letras, uma de cada binômio, e como todos os binômios são iguais a $(a+b)$, teremos termos repetidos. Por exemplo, se tomarmos a letra a nos 4 primeiros e a letra b nos dois últimos, termos a^4b^2, que irá aparecer toda vez que a letra a for escolhida em exatamente 4 dos binômios e a letra b nos 2 restantes. Como isto pode ser feito de $\binom{6}{4}$ maneiras diferentes, concluímos que o coeficiente de a^4b^2 é $\binom{6}{4}$. Como todo termo consiste do produto de 6 letras, o termo geral é da forma

$a^i b^j$, onde $i + j = 6$, ou seja, cada termo é da forma $a^i b^{6-i}$. Como um termo destes aparece $\binom{6}{i}$ vezes a expansão acima é dada por:

$$(a+b)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} a^i b^{6-i}.$$

No caso geral $(a+b)^n$, cada termo será da forma $a^i b^{n-i}$. Note que o termo $a^i b^{n-i}$ irá aparecer para cada escolha da letra a em i dos n fatores. Como tal escolha pode ser feita de $\binom{n}{i}$ formas diferentes, temos que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Nesta expansão, temos um termo distinto para cada i variando de 0 a n. Logo, são $n+1$ termos distintos dentre o total de 2^n.
Na expansão de $(a+b)^n$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

denotamos o i-ésimo termo por T_{i+1}, e, portanto,
$T_{i+1} = \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

Exemplo 7.4. Calcule o quarto termo da expansão de $(1+x)^8$.
Solução:
Temos aqui, $a = 1$, $b = x$, $n = 8$ e $i + 1 = 4$. Logo $i = 3$ e
$T_4 = T_{3+1} = \binom{8}{3} 1^3 x^{8-3} = 56x^5$.

Exemplo 7.5. Calcule o sexto termo da expansão de $(x - 5y)^{10}$.
Solução:
Neste caso, $a = x$, $b = -5y$, $n = 10$ e $i + 1 = 6$. Logo $i = 5$ e
$T_6 = \binom{10}{5} x^5 (-5y)^5 = -787500x^5y^5$.

Exemplo 7.6. Mostre que:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... \binom{n}{n} = 2^n.$$

Solução:

Como

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

se tomarmos $a = b = 1$, o lado esquerdo será 2^n, enquanto o lado direito será a soma pedida no exercício.

Exemplo 7.7. Use argumentos combinatórios para mostrar que o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... \binom{n}{n} = 2^n.$$

Solução:

Seja i um inteiro, $i \leq n$, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto contendo n elementos é $\binom{n}{k}$, variando k de 0 a n temos a soma

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... \binom{n}{n}$,

que é o número de subconjuntos de um conjunto contendo n elementos. Mas sabemos, pelo exercício anterior que esta soma vale 2^n, o que conclui a demonstração.

7.5 Conclusão

Nestas duas últimas aulas vimos importantes aplicações como por exemplo como calcular o número de soluções inteiras de equações lineares. O mais importante aqui não é memorizar fórmulas de como resolver problemas, mas, utilizar o bom senso para resolver problemas de contagem. Algumas provas com argumentos combinatórios foram fornecidas, e o nosso objetivo aqui é que isto estimule você a buscar outras maneiras de resolver problemas de contagem, utilizando estes métodos desenvolvidos aqui. Concerteza, os problemas que você aluno terá de resolver, talvez não sejam idênticos a estes, mas esperamos que você perceba estruturas similares a estas aqui apresentadas, e as utilize de forma cuidadosa afim de encontrar respostas pertinentes às questões apresentadas pelos seus alunos.

RESUMO

Arranjos com repetição

O número de arranjos no caso em que repetições sejam permitidas, é igual o número total de maneiras de se retirar, levando-se em conta a ordem, k dos n objetos, distintos ou não, que vale

$$AR_n^k = n^k,$$

onde AR_n^k denota o número de arranjos com repetição de n tomados k a k.

Permutações circulares

O número de permutações circulares de n elementos é igual ao número de maneira de n pessoas se sentarem em uma mesa circular, e este número vale:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!,$$

onde PC_n denota o número de permutações circulares de n objetos.

Permutações circulares

A expansão de $(a+b)^n$, é dada por

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula, mudaremos o foco e estudaremos alguns elementos de probabilidade e independência de eventos.

ATIVIDADES

..

ATIV. 7.1. Utilizando o a fórmula binomial mostre que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$. Dica: analise a expansão de $(a+b)^n$ e $(b+a)^n$.

ATIV. 7.2. Encontre o número de maneiras de r pessoas sentarem em um grupo de n pessoas em uma mesa circular.

ATIV. 7.3. a)Encontre o número de soluções não negativas da equação

$a+b+c+d+e = 22$

b)faça o mesmo, porém com a restrição: a e b tem que ser positivos

ATIV. 7.4. Encontre o número de soluções inteiras para a desigualdade $a+b+c+d < 11$.

ATIV. 7.5. Encontre o de termo geral na expansão multinomial de $(a+b+c)^{22}$

ATIV. 7.6. Use argumentos combinatoriais para provar que $\frac{(mn)}{(m!)^n}$ é um inteiro positivo.

ATIV. 7.7. Demonstrar a seguinte identidade:

$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + ...\binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Fernandez, P., Análise Combinatória, Editora Impa, 2004.