AULA 8

Introdução a teoria da Probabilidade

8.1 Introdução

Nesta aula vamos estudar um pouco da teoria de probabilidade. Probabilidade pode ser pensada como a teoria matemática utilizada para se estudar a incerteza oriunda de fenômenos de caráter aleatório.

Denominamos *fenômeno aleatório* à situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza. Por exemplo, as condições climáticas do próximo fim de semana não podem ser estabelecidas com total acerto. O mesmo pode ser dito da taxa de inflação do próximo mês. Veremos que, em situações como essas, modelos podem ser estabelecidos para quantificar as incertezas das diversas ocorrências.

Trabalharemos também com o conceito de independência de eventos. Para entendermos este conceito basta observar que em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas. A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode ou não influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas. Nestes casos, dizemos que ganhamos informação e podemos recalcular as probabilidades de interesse. Essas probabilidades recalculadas recebem o nome de *probabilidade condicional*, assunto a ser estudado ainda nesta aula.

8.2 Probabilidades

Definição 8.1. Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um certo fenômeno aleatório, e será denotado pela letra Ω. Os subconjuntos de ω são denominados *eventos* e representados pelas letras latinas maiúsculas $A, B, ...$ O conjunto vazio, é denotado por $\emptyset$.

A união de dois eventos A e B, denotada por $A \cup B$, representa a ocorrência de pelo menos um evento, enquantoa intersecção do evento A com B, denotada por $A \cap B$, é a ocorrência simultânea de A e B.

Definição 8.2. Dois eventos A e B são ditos *disjuntos* ou *mutuamente exclusivos* quando não tem elementos em comum. Isto é, $A \cap B = \emptyset$.

Definição 8.3. Dizemos que A e B são *complementares* se sua união é o espaço amostral e a sua interseção é vazia. O complementar de A é denotado por A^c e temos que $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Vamos considerar *probabilidade* como sendo uma função P que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, conforme a definição a seguir.

Definição 8.4. Uma função P é denominada probabilidade se satisfaz as condições:
i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;
ii) $P(\Omega) = 1$;
iii) $P(\Cup_{j=1}^{n}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, com os $A_{j's}$ disjuntos.

Exemplo 8.1. Qual é a probabilidade de atirar uma moeda para o alto e encontrar uma das faces?

Solução:

Denotamos o evento de se obter cara por C, e coroa por Co. Assim, $P(C) = P(Co) = \frac{1}{2}$

Exemplo 8.2. Qual é a probabilidade de se lançar um dado e se obter:

a) a face 1?

b) um número par?

c) um múltiplo de 3?

d) um número menor do que 3?

e) um quadrado perfeito?

Solução:

a) Denotamos por 1, o evento de se obter 1 no lançamento de dados. Então $P(1) = \frac{1}{6}$.

b) agora o evento é $A = 2, 4, 6$ com 3 elementos; logo a probabilidade procurada será $p(A) = 3/6 = 1/2$.

c) Considere evento $A = 3, 6$ com 2 elementos; logo a probabilidade procurada será $p(A) = 2/6 = 1/3$.

d)O evento $A = 1, 2$ tem dois elementos. Portanto, $p(A) = 2/6 = 1/3$.

e) Finalmente o evento A é, $A = 1, 4$ com dois elementos. Portanto, $p(A) = 2/6 = 1/3$.

Exemplo 8.3. Considere duas turmas de alunos, A e B. Sabendo que a turma A tem 56 alunos e a turma B 112, e o total de meninas nas duas turmas é 110, determine a probabilidade de escolhermos um estudante ao acaso e ele seja do sexo feminino?

Solução:

Das informações da frequência relativa, temos:

$P(F) = 0,654$

Agora, digamos que desejamos calcular a probabilidade de uma pessoa ser escolhida ao acaso, nestas turmas e esta pessoa seja do sexo feminino ou seja da turma B. Esta probabilidade pode ser representada por $P(F \cup B)$. Note que se simplesmente somarmos $P(F)$ e $P(B)$, obtemos uma soma superior a 1. Evidentemente isso não pode acontecer, pois o valor da probabilidade pode ser, no máximo igual a 1. Não é difícil perceber que estamos somando alguns eventos duas vezes, pois ao considerarmos apenas estudantes do sexo feminino, temos estudantes da turma A bem como da turma B. Logo $F \cap B$ está incluído em F e B, de modo que precisamos subtrair $P(F \cap B)$ da soma para se obter a probabilidade correta. Deste modo podemos estabelecer a seguinte *regra da adição de probabilidades.*

Teorema 8.1. *Sejam A e B eventos do mesmo espaço amostral Ω. Então*
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Como consequência do teorema acima podemos estabelecer:

Corolário 8.1. *Seja A um evento do espaço amostral Ω. Então* $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Demonstração

Como $A \cup A^c = \Omega$, temos

$1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) =$

$P(A) + P(A^c) - 0$, portanto

$P(A) = 1 - P(A^c)$.

Exemplo 8.4. Dois processadores Tipos A e B são colocados em teste por 10 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de $\frac{1}{30}$, no tipo B, $\frac{1}{80}$ e em ambos $\frac{1}{1000}$. Qual a probabilidade de que:

a) Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?

b) Nenhum processador tenha apresentado erro?

c) Apenas o processador A tenha apresentado erro?

Solução:

Denotamos por A e B os eventos em que os processadores dos tipos A e B apresentam erros. Deste modo, temos:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000} = 0,045.$

b) Neste caso devemos calcular $P(A^c \cap B^c)$, mas pela Lei de Morgan*, temos que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, Logo,

$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0,955.$

c) Neste caso devemos encontrar a probabilidade de $A \cup B^c$, $P(A \cup B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,032.$

8.3 Probabilidade Condicional e Independência

Como já dissemos na introdução, a probabilidade condicional refere-se à probabilidade de um evento A sabendo que um outro evento B ocorreu e representa-se por $P(A|B)$, que pode ser lida como "probabilidade condicional de A dado B"ou ainda "probabilidade de A dependente da condição B". Mais precisamente:

Definição 8.5. Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é representada por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

Caso $P(B) = 0$, $P(A|B)$ é definido como $P(A|B) = P(A)$.

Exemplo 8.5. Considere a seguinte situação hipotética. Uma grande região de 100 km^2 contém um aquífero (reservatório de água) subterrâneo com área igual a $2km^2$, cuja localização é desconhecida. A fim de determinar a posição do aquífero, perfurações são feitas ao acaso. Vamos representar por H o evento de encontrar água. Temos $P(H) = 0,02$, obtido pelo quociente da área do aquífero pela área total, onde usamos que o espaço amostral é $\Omega = \{\text{região de } 100Km^2\ \}$.

Suponha agora que, após um ano de pesquisas, uma área cerca de $20km^2$ já foi amplamente perfurada sem encontrar água e pode ser descartada para novos furos. Representamos esta informação por I. Qual seria agora a probabilidade de um furo, feito ao acaso, atingir o aquífero? Vamos representar por $P(H|I)$ a probabilidade desejada. Com a mesma argumentação utilizada acima, a nova região de procura terá área $80km^2$ e portanto $P(H|I) = 0,025$. Vamos refazer esses cálculos utilizando a fórmula da probabilidade condicional. Para tal, seja B a nova região de procura correspondendo a área total inicial menos a parte descartada. Temos que $P(B) = 0,8$. O evento $H \cap B$ representa a ocorrência de, sem nenhuma informação auxiliar, encontrarmos água num furo feito na região B.

Pelas suposições iniciais, $H \cap B = H$ e então, $P(H \cap B) = P(H) = 0,02$. Então,

$$P(H|B) = \frac{P(H \cap B)}{P(B)} = \frac{0,02}{0,8} = 0,025.$$

Exemplo 8.6. Uma moeda honesta é lançada 2 vezes ao acaso. Qual a probabilidade condicional de ambos os resultados serem caras dado que o primeiro lançamento resultou em cara?

Solução:

$P(C|C) = \frac{1}{2}$

Exemplo 8.7. Uma urna contém 10 bolas brancas, 5 bolas amarelas e 10 bolas pretas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna e verifica-se que não é preta, qual a probabilidade de ser amarela?

Solução:

A = a bola selecionada é amarela. B = a bola selecionada é preta.

$P(A|B^c) = \dfrac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{1}{3}.$

Um conceito muito importante é o da *independência de eventos* que será abordado logo a seguir.

Definição 8.6. Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A. Isto é,
$P(A|B) = P(A)$, $P(B) > 0$, ou equivalentemente:
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Não é difícil verificar que se A é independente de B, então B é independente de A, e ainda o evento vazio é independente de qualquer evento.

Exemplo 8.8. Considere o lançamento de um dado honesto. O espaço amostral associado e esse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e a cada um dos quais é atribuída probabilidade $1/6$. Considere os eventos: A: o resultado é par; B: o resultado é maior do que 4; C: o resultado é um múltiplo de 3.
A e B são eventos independentes? Por que?
Solução:
Os subconjuntos do espaco amostral associados a esses eventos sao respectivamente: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$ e $C = \{3, 6\}$. Segue-se entao que: $P(A) = 1/2$ e $P(B) = P(C) = 1/3$. Os eventos A e B (e tambem os eventos B e C) ocorrerão simultaneamente quando o resultado do lancamento for um 6. Segue-se que $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 1/6$.
A comparacao desses valores com os produtos das probabilidades individuais mostra que A e B sao independentes enquanto que B e C sao dependentes.

Exemplo 8.9. Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade $0,05$ e $0,1$;

respectivamente. No início do dia de operação um teste é realizado e caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica. Para cumprir o nível mínimo de produção pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre risco de não cumprir com suas metas de produção?

Solução:

Seja O_i o evento da máquina i estar operando, $i = 1, 2$. Pelas informações disponíveis temos $P(O_1) = 0,95$ e $P(O_2) = 0,9$. Assumimos a independência entre O_1 e O_2, pois acreditamos que a eventual falta de ajuste em uma máquina não interfere no comportamento da outra. Portanto $P(O_2|O_1) = P(O_2) = 0,9$.

Para Facilitar a notação, vamos escrever O_1O_2 para o evento $O_1 \cap O_2$.

Para obter o nível mínimo de produção diária, precisamos ter pelo menos um máquina operando. Isto corresponde à ocorrência do evento $O_1O_2 \cup O_1O_2^c \cup O_1^cO_2$. Temos,

$P(O_1O_2 \cup O_1O_2^c \cup O_1^cO_2) = P(O_1O_2) + P(O_1O_2^c) + P(O_1^cO_2)$,

pois as três realizações são disjuntas. Por exemplo, não é possível as duas máquinas estarem operando evento, O_1O_2 e ao mesmo tempo só a máquina I operar, evento $O_1O_2^c$. Dessa forma, concluímos que a probabilidade de manter o nível mínimo de produção é $0,995$. Portanto, a empresa tem alta probabilidade de cumprir com suas metas de produção.

RESUMO

Probabilidade

Uma função P é denominada probabilidade se satisfaz as condições:

i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) $P(\Cup_{j=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, com os $A_{j's}$ disjuntos.

Soma das probabilidades

Sejam A e B eventos do mesmo espaço amostral Ω. Então

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilidade condicional

Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é representada por $P(A|B)$ e dada por

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$

Caso $P(B) = 0$, $P(A|B)$ é definido como $P(A|B) = P(A)$.

8.4 Conclusão

Neste aula vimos a definição formal de probabilidade como uma função. Vimos também as relações entre eventos e o que isso causa na probabilidade dessas ocorrências.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula iniciaremos os estudos sobre desigualdades, que você aluno já deve ter tido ciência nos seus estudos do ensino médio, porém aqui mostraremos algumas relações importantíssimas para as soluções de problemas de majoração. Ainda nesta aula aprenderemos o conceito do princípio das gavetas de Dirichlet, também importante para resolver problemas ,a priori difíceis, de forma trivial.

ATIVIDADES

..

ATIV. 8.1. Uma moeda viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior que a de sair coroa. Para lançarmos independentes dessa moeda, determinar:
a) O espaço amostral.
b) A probabilidade de sair pelo menos uma cara.
c) A probabilidade de sair somente uma cara.
d) A probabilidade de dois resultados iguais.

ATIV. 8.2. Considere um conjunto de 4 números dos quais nenhum deles é zero, dois são positivos e dois são negativos. Sorteamos ao acaso, com reposição, 2 números desse conjunto. Determine a probabilidade de:
a) Um deles ser negativo.
b) O quociente ser negativo.
c) Os dois números terem o mesmo sinal.

ATIV. 8.3. Verifique se são válidas as afirmações:
a) Se $P(A) = 1/3$ e $P(B|A) = 3/5$ então A e B não podem ser disjuntos.
b) Se $P(A) = 1/2$, $P(B|A = 1$ e $P(A|B) = 1/2$ então A não pode estar contido em B.

ATIV. 8.4. A Sociedade Esportiva Palmeiras ganha com probabilidade $0,7$ se chove e com $0,8$ se não chove. Em setembro a probabilidade de chuva é de $0,3$. O Palmeiras ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?

ATIV. 8.5. Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral, tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine o valor de p.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Dassie, B.A., Curso de Análise Combinatória e Probabilidade, Editora Moderna, 2009

Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Fernandez, P., Análise Combinatória, Editora Impa, 2004.

Lipschutz, L., Teoria dos conjuntos, McGraw-Hill do Brasil, SP,1970.

AULA 9

Médias e o Princípio das Gavetas de Dirichlet

9.1 Introdução

Nesta aula vamos introduzir o importante conceito de médias, dentre elas as mais importantes: a média aritmética, média geométrica, e harmônica. Vamos estabelecer relações entre as médias fornecendo algumas aplicaçoes aplicações. Trabalharemos também com o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como o princípio das casas dos pombos; e veremos que este nome é bem sugestivo para o conceito.

9.2 Médias

É de se esperar que a média de uma lista de números é um valor que poderá substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista. Se essa característica é a soma dos elementos da lista, obtemos a média mais simples que é a aritmética. Veremos logo a seguir que esta não é a única e mais, compreenderemos algumas propriedades entre elas.

Definição 9.1. A média aritmética da lista de n números, $x_1, x_2, ..., x_n$ é o valor MA que vale:
$MA = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Médias e o Princípio das Gavetas de Dirichlet

Exemplo 9.1. A média para a lista de números $5, 6, -7, 9$ é
$MA = \dfrac{5+6-7+9}{4} = 3,25.$

Definição 9.2. A média geométrica dos n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor positivo MG tal que
$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$

OBS 9.1. Observe que só definimos a média geométrica para números positivos. Assim evitamos a possibilidade da média não existir. Por exemplo qual seria a média geométrica entre 1 e -9?

Exemplo 9.2. A média geométrica dos números $2, 5, 12$ é:
$MG = \sqrt[3]{2.5.12} = 4,934.$

Definição 9.3. A média harmônica dos n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor MH tal que,

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

OBS 9.2. A média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos números. E aqui, observamos também que, evitamos a possibilidade da média não existir, por essa razão definimos a média harmônica apenas para números positivos.

Exemplo 9.3. A média harmônica dos números 3, 36 e 54 é:

$$MH = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{54}} = \frac{324}{41}$$

Definição 9.4. A média quadrática dos n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é o valor MQ tal que,

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Exemplo 9.4. A média quadrática dos números 3, 9 e 6 é:

$$MQ = \sqrt{\frac{3^2 + 9^2 + 6^2}{3}} \equiv 6,48.$$

Exemplo 9.5. Um atleta aumentou seu rendimento (potência) muscular durante 2 meses de treinamento. No primeiro mês a taxa de aumento foi de 5% e no segundo foi de 15%. Qual foi a taxa média de aumento mensal?

Solução:

Queremos uma taxa média i tal que, se em todos os meses a taxa de aumento fosse igual a i, o aumento em dois meses seria o mesmo. O aumento em dois mese foi de $20,075\%$, conforme mostra o esquema abaixo.

$$100 \mapsto 100.1,05 \mapsto 100.1,05.1,15 = 120,075$$

Se em todos os meses tivéssemos um aumento de taxa i, teríamos $100 \mapsto 100(1+i) \mapsto 100(1+i)^2$.

Logo,

$120,075 = 100(1+i)^2$, e resolvendo para i, teremos:

$i \equiv 0,095 = 9,5\%$.

9.3 Desigualdade das médias

Nesta seção vamos majorar as médias vistas até agora, no caso as desigualdades são válidas:

$MQ \geq MA \geq MG \geq MH$.

Para demonstrar isto vamos lançar mão do lema de Cauchy.

Lema 9.1. *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos com $x_1x_2...x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.*

Demonstração

Vamos provar este lema por indução sobre n. O caso $n = 1$ é absolutamente trivial. Vamos supor por indução que para $x_1, x_2, ..., x_k$ reais positivos com $x_1 x_2 ... x_k = 1$, valha $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$ e provemos a validade para $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}_+$.

Deste modo, se $x_1 x_2 ... (x_k x_{k+1}) = 1$, tem-se $x_1 + x_2 + ... + (x_k x_{k+1}) \geq k$.

Sem perda de generalidade, supomos, $x_k \geq 1$ e $x_{k+1} \leq 1$.

Assim $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} + (x_k x_{k+1}) \geq k + (x_k x_{k+1})$,

Somando $-x_k x_{k+1}$ em ambos os lados, e somando 1-1 no membro direito, temos:

$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} + 1 - 1$, e fatorando:

$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + (x_k - 1) + (1 - x_{k+1}) \geq k + 1$.

A partir do lema de Cauchy, vamos provar a desigualdade das médias.

Teorema 9.1. • $MA \geq MG$

Demonstração

$(MG)^n = x_1 x_2 ... x_n$ e dividindo ambos os lados por $(MG)^n$, temos:

$1 = \frac{x_1}{MG} \frac{x_2}{MG} \cdots \frac{x_n}{MG}$, pelo lema de Cauchy temos:

$\frac{x_1}{MG} + \frac{x_2}{MG} + ... + \frac{x_n}{MG} \geq n$ e portanto,

$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq MG$.

Teorema 9.2. • $MG \geq MH$

Demonstração

Sabendo que, $MA \geq MG$, considere $x_i = \frac{1}{y_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, assim:

$$\frac{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + ... + \frac{1}{y_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{y_1} . \frac{1}{y_2} ... \frac{1}{y_n}}.$$

Portanto $MH \leq MG$.

Teorema 9.3. • $MQ \geq MA$

Demonstração

Supondo por absurdo $MQ < MA$, assim

$\sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} < \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, elevando os dois membros ao quadrado, e fazendo as simplificações necessárias, temos:

$(n-3)(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2) + 2(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - ... - x_{n-2}x_n - x_{n-1}x_n) < 0,$

que é um absurdo. Logo, $MQ \geq MA$.

Exemplo 9.6. (Olimpíada Ibero-Americana) Demonstre a seguinte desigualdade:

Se $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, então $S = \frac{1}{x}(1+xy) + \frac{1}{y}(1+yz) + \frac{1}{z}(1+xz) \geq 6$.

Solução:

Desenvolvendo a expressão, temos, $S = \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} + x$, pelo teorema de Cauchy, temos que $S \geq 6$, pois $x.\frac{1}{x}.y\frac{1}{y}.z\frac{1}{z} = 1$.

Exemplo 9.7. (ITA-2002) Mostre que $(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 2) > \dbinom{8}{4}$.

Solução:

Temos que encontrar uma desigualdade que seja capaz de provar a proposição.

Como $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, e portanto $2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 4$. Elevando os lados a quarta potência, temos:

$(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 2) \geq 256 > \dbinom{8}{4}$

Exemplo 9.8. Mostre que, entre todos os retângulos de área A, o quadrado é o de menor perímetro.

Solução:

Se os lados do retÂngulo são x e y, temos $xy = A$, isto é, a média geométrica de x e y é $\sqrt{A}$. O perímetro do retângulo é $2(x+y)$. Temos

$2(x+y) = 4\frac{x+y}{2} \geq 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}$.

A igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$.

9.4 Princípio das Gavetas de Dirichlet

O princípio das gavetas pode ser enunciado como: *Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.*

Prova O número médio de objetos por gaveta é maior do que ou igual a $\frac{n+1}{n}$, que é maior que 1. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1.

Exemplo 9.9. Mostre que, em um grupo de 13 pessoas há sempre pelo menos duas que nasceram no mesmo mês.

Solução:

Como $\frac{13}{12} < 1$, utilizando o princípio das gavetas, temos que há pelo menso duas pessoas que nasceram no mesmo mês.

Exemplo 9.10. Considere 5 pontos sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução:

Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados postos. Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O princípio das gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos no mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é $\sqrt{2}$.

9.5 Conclusão

Nesta aula podemos verificar que as propriedades das médias são ferramentas preciosas para se resolver problemas de majoração que a primeira vista se apresentam difíceis. Pela proposta do ensino médio, não é necessário, que você futuro professor, demonstre essas desigualdades, mas é necessário que você enriqueça sua aula com muitos exemplos (alguns até bem elaborados), para resaltar a importancia destes resultados. O princípio das gavetas se revela outra ferramenta muito simples para resolver problemas de alocação de objetos. E é também aconselhável que você aluno, forneça muitas aplicaçoes sobre isto.

RESUMO

..

Média aritmética

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais, a média aritmética desta lista é dada por:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Média Geométrica

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, a média geométrica desta lista é dada por:

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

média Harmônica

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, a média harmônica desta lista é dada por:

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

média Quadrática

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, a média quadrática desta lista é dada por:
$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Desigualdades das média

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

Princípio das gavetas de Dirichlet

Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula mudaremos o foco novamente e iniciaremos os estudos em Geometria Espacial.

ATIVIDADES

..

ATIV. 9.1. Prove que:

a) $k^2 \geq k(1.2.3\ldots(2k-1))^{\frac{1}{k}}$

b) $1+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2 \geq \dfrac{k^3(3.5.7.\ldots.(2k-1))}{3.5\ldots(2k-1)+5.7\ldots(2k-1)+\ldots(2k-1)}$

ATIV. 9.2. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$a_i, b_i \in \mathbb{R}, |a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}$

ATIV. 9.3. Prove que $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$.

ATIV. 9.4. Mostre que: $\frac{x+y^2+3yz}{3\sqrt{3}y} \geq (xy)^{\frac{1}{3}}$

ATIV. 9.5. Prove quese $nk+1$ objetos são colocados em n gavetas, pelo menos uma gaveta recebe mais de k objetos

LEITURA COMPLEMENTAR

..

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

AULA 10

Introdução a Geometria Espacial: Pontos, Retas e Planos

10.1 Introdução

O ensino de Geometria para alunos do segundo ano do segundo grau faz o aluno se deparar com figuras geométricas tridimensionais. Embora figuras tridimensionais sejam naturais, pois todo nosso mundo real é feito delas, a nossa experiência nos diz que há muitas dificuldades na coompreensão dos novos conceitos e principalmente na "visão geométrica"de certos sólidos. Embora o aluno possa ter dificuldade no aprendizado de Geometria, em geral ele não tem dificuldade entender as propriedades essenciais das figuras geométricas simples. Conceitos como paralelismo, perprendicularismo e congruência são bem entendidos pelos alunos.

Tais facilidades não ocorrem quando se começa a estudar Geometria Espacial. As relações entre as figuras geométricas fundamentais são bem mais complexas do que na Geometria Plana. Sempre que você, futuro professor, se deparar com dificuldades em que o aluno tenha em "ver"certas figuras, se possível, experimente expressar através de desenhos ou modelos de figuras.

Vamos agora, fazer uma rápida abordagem histórica.

Tales de Mileto (624-548 a.C.) foi o precursor da geometria pela dedução. À ele atribui-se a autoria da demonstração, entre outros teoremas, de que um ângulo inscrito num semi−círculo é um ângulo reto. Não existe documentos que comprovem estas autorias. Outro matemático antigo, também precursor da geometria dedutiva, ao qual se lhe atribui a autoria da demonstração do famoso teorema - num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos - é Pitágoras de Samos (580 à 500 a.C.). Devido à perda de documentos daquela época e pelo fato de que a escola fundada por ele era secreta, o teorema de Pitágoras assim como o da divisão áurea de um segmento, podem ter sido demonstrados por seus discípulos ou até mesmo pelos babilônios. Dois séculos depois, Euclides de Alexandria publicara o texto mais influente de todos os tempos: "Os Elementos"(300 a.C.). Depois da Bíblia, é o livro com mais edições publicadas (provavelmente mais de mil). Os elementos de Euclides estão divididos em treze livros, dos quais somente os seis primeiros tratam de geometria plana elementar. Em "Os elementos"o ponto é definido de forma bem inusitada: "o ponto é aquilo que não tem partes", e reta como "um comprimento se dimensões". Estas definições por mais claras e simples que apareçam, são mais intuitivas que formais.Contudo, por dois mil anos, Os Elementos constituiu o mais rigoroso tratado lógico dedutivo da matemática elementar.

10.2 Entes Primitivos e Axiomas da Geometria Euclidiana

AXIOMA 1: *Existem um conjunto, denominado espaço, e duas coleções de subconjuntos do espaço satisfazendo às propriedades enunciadas nos axiomas subseqüentes.*

Os elementos do espaço são chamados de pontos, os de uma das coleções referidas no axioma 1 são denominados retas e os da outra, planos. Vale observar que os elementos das retas e dos planos são pontos.

Ponto, reta e plano são os conceitos primitivos da geometria euclidiana plana. Os pontos são denotados usualmente por letras maiúsculas A,B,C, ...; as retas por letras minúsculas r,s,t,...e os planos por letras gregas π, α, β, ...Intuitivamente, podemos imaginar que uma porção de um plano é a superfície de uma mesa ou uma folha de papel estirada; uma porção de um reta é um risco feito com o auxílio de uma régua, ou, um cordão esticado; e um ponto e um furinho feito com a ponta de um alfinete numa folha ou um pingo feito com uma caneta, etc. O espaço pode ser pensado como sendo nosso ambiente. Diremos que dois ou mais pontos são coplanares ou colineares, respectivamente, se pertencem a um mesmo plano ou a uma mesma reta; diremos ainda que dois ou mais conjuntos não vazios de pontos sao coplanares ou colineares se todos os seus pontos são, respectivamente, coplanares ou colineares. Se um ponto A pertence a uma reta r ou a um plano π é usual dizer que r ou π passa por A.

AXIOMA 2 *Por dois pontos distintos passa uma única reta.*

Se A e B são pontos distintos pertencentes à reta r, denotamos $r = \overline{AB}$.

AXIOMA 3 *Por três pontos não colineares passa um único plano.*

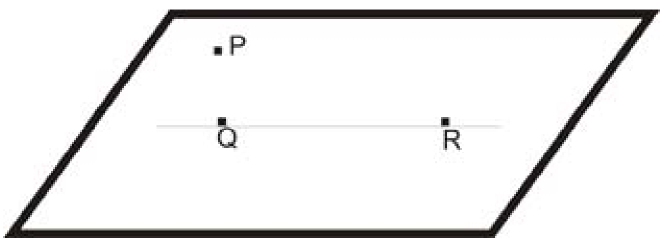
AXIOMA 4 *Cada reta contém pelo menos dois pontos distintos; todo plano contém no mínimo três pontos não colineares; o espaço contém pelo menos quatro pontos distintos entre si não coplanares e não colineares.*

AXIOMA 5 *Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.*

Teorema 10.1. *Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela*

Demonstração

Seja P um ponto não pertencente a reta r. Tomemos, sobre r, dois pontos distintos Q e R. Os pontos P, Q e R não são colineares (de fato, pelo axioma 2, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r). Pelo axioma 3, sabemos que existe um único plano α (figura abaixo) contendo P, Q e R. Como a reta r tem de dois de seus pontos em α, o axioma 4 estabelece que r está contida em α. Logo existe um único plano que contém P, Q, R e r.



10.3 Posições de retas

Nesta seção vamos tratar de questões do tipo:

"Como pode ser a intersecção de duas retas?"

"Quando duas retas determinam um plano?"

Pelo axioma 2, duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum, e quando isto acontece, elas são chamadas de concorrentes, e sempre determinam um plano.

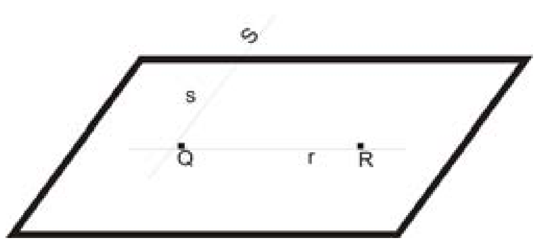


Figura 10.1: Retas concorrentes

Esta última afirmação é de fácil verificação pois, se as retas r e s se interceptam em P, tomemos $R \in r$ e $S \in s$, pelo axioma3, temos o plano π como na figura acima.

Agora se duas retas não são concorrentes elas podem ou não gerar um plano. Primeiramente consideremos a situação mostrada na figura abaixo. Considere r a reta contida num plano α e uma reta s que intercepta o plano α em um ponto P. Deste modo não há nenhum plano que contenha r e s simultaneamente, sendo assim dizemos que *r e s são retas reversas*.

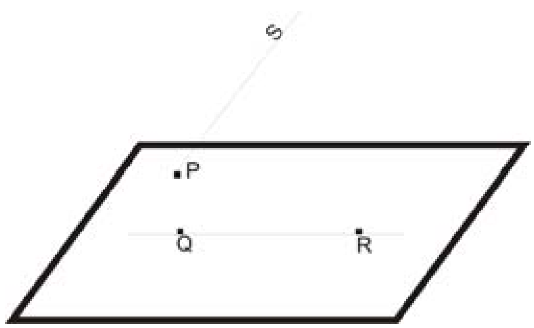


Figura 10.2: Retas reversas

Mas há o caso em que duas retas que também tenham intersecção vazia sejam coplanares, este é o caso das retas paralelas.

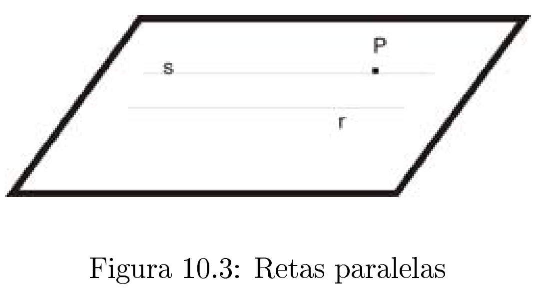


Figura 10.3: Retas paralelas

10.4 Posição relativa entre retas e plano

Agora veremos como é possível uma reta e um plano se relacionarem. Dividiremos estas possibilidades em três casos.

O primeiro é o mais simples: é quando r possui dois ou mais pontos no plano α, e assim r está contida em α, como vemos na figura abaixo.

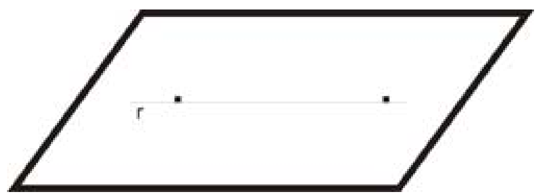


Figura 10.4: uma reta contida em um plano

O segundo caso possível é quando uma reta r "corta"o plano α, ou seja intercepta o plano em um dado ponto P. Neste caso dizemos que a reta r é *secante* ao plano α.

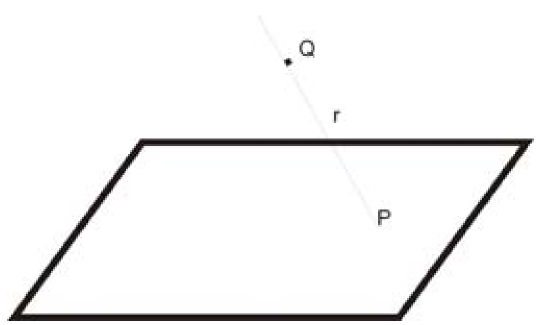


Figura 10.5: uma reta interceptando um plano

O último caso trata-se da situação em que a intersecção de uma reta e um plano seja vazia. No caso se a reta r e o plano α forem tais que, $r \cap \alpha = \emptyset$, dizemos que r e α são paralelos.

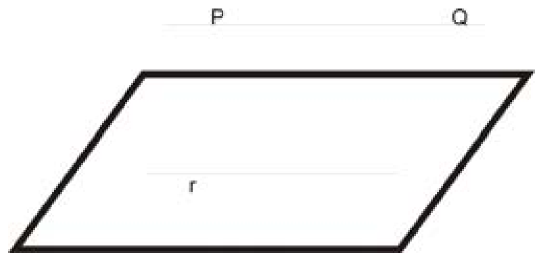


Figura 10.6: uma reta paralela a um plano um plano

10.5 Posição Relativa entre dois planos

Nesta seção veremos como pode se dar a interseção de dois planos. Neste caso teremos duas situações.
A primeira noz diz em que situação um plano pode interceptar outro de modo que esta intercessão seja não vazia. Podemos notar facilmente que se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua interseção é uma reta. Neste caso dizemos que estes planos são secantes.

Figura 10.7: Planos secantes

OBS 10.1. No caso anterior consideramos a possibilidade de um plano ter mais de um ponto em comum, porém se dois planos tiverem dois ou mais pontos em comum, a intersecção deste também é uma reta, sendo isto possível pelo axioma 5.

O segundo caso em relação a posição de planos é o caso em que estes são paralelos. Na verdade dado um plano α é sempre possível encontrar um plano β paralelo a α.

Figura 10.8: Planos Paralelos

10.6 Conclusão

Nesta aula apresentamos idéias intuitivas sobre ponto, reta e plano. Porém estabelecemos relações com as quais trabalharemos com estes conceitos a partir de 5 axiomas. Encorajamos você futuro professor, a sempre lançar mão de idéias fazendo uso de figuras e modelos, para facilitar a aprendizagem dos seus alunos.

RESUMO

..

Posição relativas entre retas

Posição relativa entre r e s	interseção entre r e s
Concorrentes	exatamente um ponto
Reversas	$\emptyset$
Reversas	$\emptyset$

Posição relativas entre reta e plano

Posição relativa entre r e α	interseção entre r e α
r contida em α	r
r secante a α	um único ponto
r paralela a α	$\emptyset$

Posição relativas entre planos

Posição relativa entre α e β	interseção entre α e β
secantes	r
paralelos	$\emptyset$

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula estudaremos relações de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos.

ATIVIDADES

..

ATIV. 10.1. Quantos planos distintos existem tais que eles sejam determinados por 4 pontos distintos?

ATIV. 10.2. Prove as afirmações abaixo.

a) Por um ponto passam, no mínimo, três retas.

b) Três pontos não colineares são distintos entre si.

c) Dada uma reta, há, pelo menos, dois planos que a contêm.

d) Um plano contém pelo menos três retas.

e)Dados um plano α e um ponto pertencente a α, existem, no minimo, duas retas contidas em α passando por esse ponto.

ATIV. 10.3. Seja F uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos sejam coplanares. Mostre que F é plana, isto é, está contida num plano.

ATIV. 10.4. Uma figura é formada por quatro pontos A, B, C eD e pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Ela é uma figura plana?

ATIV. 10.5. Sejam r e s duas retas reversas e $P \in r$ e $Q \in s$. Qual é a interseção do plano α definido por r e Q com o plano β definido por s e P?

ATIV. 10.6. Qual é a seção determinada pela interseçao do paralelepípedo ABCDEFGH com o plano determinado por ABG?

ATIV. 10.7. Três planos distintos têm em comum dois pontos. Mostre que existe uma reta comum aos três planos.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005

AULA 11

Paralelismo e perpendicularismo

11.1 Introdução

Nesta aula estudaremos as noções de paralelismo e perpendicularismo. Vamos assumir que o aluno tenha o conhecimento de todos os resultados concernentes à geometria euclidiana. plana. A idéia de perpendicularismo está intimamente ligada á idéia de se "aumentar uma dimensão", isto se deve ao fato de fazermos aqui a transposição do plano para o espaço ao construirmos uma reta perpendicular a um plano dado. Faremos também um paralelo entre o teorema de Tales no plano e no espaço. Vamos agora dar algumas definições e citar alguns resultados acerca de paralelismo e perpendicularismo de retas e planos.

11.2 Retas e Planos perpendiculares

Definição 11.1. Dadas duas retas r e s, com $r \in \alpha$, dizemos que r e s são ortogonais se a projeção de s' de s em α forma um ângulo reto com r.

OBS 11.1. Note que se estas retas estiverem num mesmo plano, dizemos que elas são perpendiculares. De modo que a definição de ortogonalidade generaliza a noção de perpendicularismo.

Definição 11.2. Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano.

Paralelismo e perpendicularismo

Teorema 11.1. *Sejam r uma reta paralela a umplano α e $P \in \alpha$. Entao, a reta paralela a r passando por P esta contida em α.*

Demonstração

Seja β o plano determinado por P e r. Temos que α e β sao concorrentes. Seja $s = \alpha \cap \beta$.

Como $s \subset \alpha$ e r é paralela paralela a β, segue-se que $s \cap r = \emptyset$ e pelo fato de s e r serem coplanares (estao contidas em β), vem que s e r sao paralelas. Desde que P e comum a α e β, segue que $P \in s$. Logo, a reta paralela a r passando por P esta contida em α.

Corolário 11.1. *Se uma reta r e paralela a um plano α, entao existe uma reta distinta de r, contida em α e paralela a r*

Demonstração

Seja P um ponto qualquer de α. Pelo teorema , a reta paralela a r passando por P esta contida em α.

Teorema 11.2. *Se uma reta r e paralela a uma reta r' contida num plano α e não está contida nesse plano, entao r é paralela a α.*

Demonstração

Por absurdo, suponhamos que r intercepta α. Seja $P = r \cap \alpha$. Seja β o plano determinado por r e r'. Temos: $r' = \beta \cap \alpha$. Sendo que $P \in r \cap \alpha$ e $r \subset \beta$, segue que $P \in \beta \cap \alpha$.

Como $r' = \beta \cap \alpha$, segue-se que $P \in r'$. De fato, isto é uma contradição pelo fato de que $P \in r$ e r ser distinta e paralela a r'.

Teorema 11.3. *Sejam r e s, e, r' e s' pares de retas concorrentes. Se r é paralela a r' e s é paralela a s', então os planos determinados por r e s, e, r' e s' são paralelos ou coincidentes.*

Demonstração

Sejam Π o plano determinado por r e s e β o plano determinado por r' e s'. Suponhamos que $\Pi \neq \beta$. Devemos mostrar que β é paralelo a Π . Antes, mostraremos que r não está contida em β . Por absurdo, suponha que $r \subset \pi$ Assim sendo, teremos necessariamente $s \subset \beta$, pois do contrário, como s é paralela a uma reta contida em β, pelo Teorema anterior, segue que s é paralela a β, o que seria uma contradição ao fato de um ponto de s pertencer a r e $r \subset \beta$. Como que $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$, então $\alpha = \Pi$, uma contradição. Portanto, $r \subsetneq \beta$. Isto implica, de acordo com o Teorema anterior, que r é paralelo a β, já que r é paralela a uma reta contida em β. Dado que s tem um ponto em comum com r e r é paralela a β, segue-se que $s \subsetneq \beta$ de modo ques é paralelo a β , uma vez que s é paralela a uma reta contida em β . Enfim, r e s são retas paralelas a β .

Figura 11.1: Planos Paralelos

Novamente, por absurdo, suponhamos que Π e β não são paralelos. Considere $t = \Pi \cap \beta$. Então, t, r e s são coplanares. Como r e s são concorrentes, t não é simultaneamentre paralela a r e s. Assim, t é concorrente a uma delas, já que t é distinta de ambas. Digamos, r. Um absurdo, pois r é paralela a β.

Teorema 11.4. *Por um ponto não pertencente a um plano, passa um único plano paralelo ao plano dado.*

Demonstração

Sejam P um ponto e Π um plano tais que $P \notin \Pi$. Sejam u e v retas concorrentes contidas em Π e r e s as retas passando por P, respectivamente, paralelas a u e v. É claro que r e s não estão contidas no plano Π. Pelo teorema anterior, o plano α determinado por r e s é paralelo a Π. Seja β um plano paralelo a Π passando por P. Mostraremos que $\alpha = \beta$. É claro que as retas concorrentes u e v contidas em Π são paralelas ao plano β. Pelo Teorema 11.1, as respectivas paralelas a u e v passando por P estao contidas em β, uma vez que $P \in \beta$. Essas paralelas sao r e s. Posto que duas retas concorrentes determinam um único plano, segue-se que $\alpha = \beta$.

Teorema 11.5. *Seja* Π *o plano determinado por duas retas concorrentes r e s no ponto O. Se uma reta t é perpendicular a r e a s em O, então t e perpendicular a* Π *em O.*

Demonstração

Seja u uma reta qualquer contida em Π passando por O. Mostraremos que t é perpendicular a u. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \neq r$ e $u \neq s$. Tomemos em r e s, respectivamente, pontos A e B tais que A e B se encontram em semi-planos abertos opostos em relacao a u.

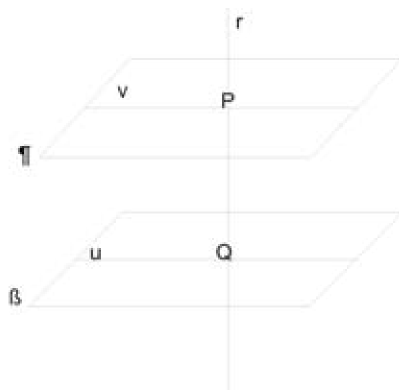
O segmento $\overline{AB}$ intercepta u num ponto C entre A e B. Sejam D e D' pontos distintos em t tais que O é ponto médio de $\overline{DD'}$. Sendo t perpendicular a r, segue-se, pelo caso L.A.L.(lado, ângulo, lado) de congruência de triangulos, que AOD é côngruo a AOD' e sendo t perpendicular a s, segue, por $L.A.L.$, que BOD é congruente a BOD'. Desse modo, $AD = AD'$ e $BD = BD'$, donde,

por L.L.L., ABD é congruente a ABD e, portanto, o ângulo BÂD é igual a BÂD'. Isto acarreta, por L.A.L., que CAD é congruente a CAD', por conseguinte, $CD = CD'$. Assim sendo, por L.L.L., COD é congruente a COD'. Portanto, o ângulo CÔD é reto, e assim t é perprendicular a u.

Teorema 11.6. *Por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano.*

Demonstração

Sejam Π um plano e $P \notin \Pi$ um ponto. Seja β o plano paralelo a Π passando por P. Seja r a reta perpendicular a β passando por P.



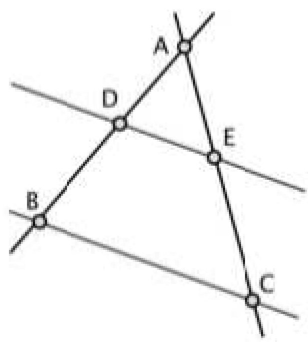
Como Π é paralelo a β , então r intercepta Π em Q. Seja $u \subset \Pi$ uma reta qualquer passando por Q. Vamos mostrar que r é perpendicular a u. Seja v a reta paralela a u passando por P. Sendo que u é paralelo a β, vem, pelo Teorema 11.1, que $v \subset \beta$. Desde que r é perpendicular a β, segue que r é perpendicular a v. Sendo que r e transversal as paralelas u e v, segue que r é perpendicular a u. Portanto, r é perpendicular a Π e passa por P. Para mostrarmos a unicidade, considere r' uma reta perpendicular a β passando por P. Devemos mostrar que $r' = r$. Para isso, basta mostrarmos que $Q \in r'$. Seja $Q' \in \Pi$ perpendicular a r'. Mostraremos que $Q' = Q$. Por absurdo, suponhamos que $Q \neq Q$. Assim, a soma dos ângulos internos do triangulo PQQ' é maior do que 180^0, um absurdo. Logo, $Q' = Q$, donde, $Q \in r$ e, portanto, $r' = r$.

11.3 Planos Paralelos e Proporcionalidade

Na Geometria Plana fazemos a associação de retas paralelas com proporcionalidade. Aqui faremos um análogo: enunciaremos o teorema de Tales de Mileto no espaço, relacionando-o com planos paralelos. Para recordarmos, vamos enunciar o teorema de Tales no plano:

Teorema 11.7. *Se duas retas paralelas são interceptadas por duas retas concorrentes, então as medidas dos segmentos correspondentes determinados nas transversais são proporcionais.*

Omitiremos a demonstração deste fato, que pode ser encontrado nas referências abaixo.

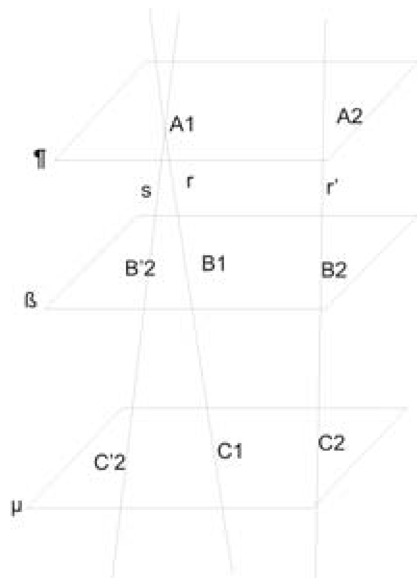


Podemos enunciar a versão do teorema de Tales no espaço como dado abaixo:

Teorema 11.8. *Um feixe de planos paralelos determina seguimentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.*

Demonstração

Considere como na figura acima, pelo ponto $A_1 \in r$, traçamos uma reta s paralela a r', que passa pelos 3 planos nos pontos $A_1 B_2'$ e C_2'. As retas r e r' determinamum plano, que corta β e μ segundo as retas paralelas $B_1 B_2'$ e $C_1 C_2'$. Logo pelo teorema de Tales no plano, temos: $\dfrac{A_1B_1}{A_1B_2'} = \dfrac{B_1C_1}{B_2'C_2'} = \dfrac{A_1C_1}{A_1C_2'}$.



Mas $A_1B_2' = A_2B_2$, $B_2'C_2' = B_2C_2$ e $A_1C_2' = A_2C_2$, assim, $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$., o que prova o teorema.

11.4 Conclusão

Nesta aula fornecemos muitos resultados acerca de retas perpendiculares a planos, e por último enunciamos e mostramos a versão espacial do teorema de Tales. Esperamos que você aluno tenha visto estas demonstrações com cuidado a fim de quando surgirem alguns problemas envolvendo estes conceitos, você possa resolvê-los com facilidade. Novamente, recomenda-se fortemente que você disponibilize desenhos para a "visualização"do que é proposto.

RESUMO

..

Retas ortogonais

Dadas duas retas r e s, com $r \in \alpha$, dizemos que r e s são ortogonais se a projeção de s' de s em α forma um ângulo reto com r.

Reta perpendicular a um plano

Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano.

Teorema de Tales no espaço

Um feixe de planos paralelos determina seguimentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula estudaremos noções intuitivas e formais sobre distâncias e ângulos.

..

ATIVIDADES

ATIV. 11.1. Seja P um ponto exterior a um plano α. Para cada ponto $Q \in \alpha$ seja X o ponto do segmento $\overline{PQ}$ que o divide na razão $\frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}} = k$.
Qual é o lugar geométrico do ponto X quando Q percorre o plano α.

ATIV. 11.2. Considere dois planos α e β. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão em α e β, respectivamente?

Sejam duas retas reversas r e s. Sejam A e B pontos distintos de r e C e D pontos distintos de s. Qual é a posição relativa das retas determinadas pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$?

ATIV. 11.3. Três planos distintos têm em comum dois pontos. Mostre que existe uma reta comum aos três planos.

ATIV. 11.4. Mostre que por um ponto dado existe uma única reta ortogonal a duas retas não paralelas.

ATIV. 11.5. Seja t uma reta contida em dois planos distintos. Mostre que t é a interseção desses dois planos.

ATIV. 11.6. Mostre que se uma reta é paralela a dois planos concorrentes, então ela é paralela à reta de interseção dos dois planos.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005

AULA

Noções de distâncias e ângulos

12

12.1 Introdução

Nesta aula trataremos de distância e ângulos entre retas. A idéia é utilizar todos os conceitos das últimas duas aulas para estudar problemas métricos no espaço. No caso de ângulos, se duas retas são coplanares, já sabemos que elas podem ser coincidentes ou paralelas. A novidade, para o caso espacial, fica por conta de um par de retas ser reversas.

A distância entre dois pontos P e Q é a medida do segmento $\overline{PQ}$. Como feito no plano, utilizamos o teorema de Pitágoras para determinar a distância entre pontos no espaço.

12.2 Ângulos

Sejam r e s retas. Assumimos o conhecimento do conceito de ângulo entre retas no caso das retas serem coplanares.

No caso, se r e s são coincidentes ou paralelas dizemos que o ângulo entre r e s é zero. Se são concorrentes, elas formam dois pares de ângulos opostos pelo vértice (que têm mesma medida) sendo que dois desses ângulos não opostos pelo vértice são suplementares. Neste caso, o ângulo entre elas é, por definição, o menor dos quatro ângulos.

Se r e s são reversas, podemos definir:

Definição 12.1. Sejam $A \in r$ e $B \in s$ pontos quaisquer, r' a reta paralela a r passando por B e s' a reta paralela a s passando por A. O ângulo formado por essas retas concorrentes é o ângulo formado pelas retas dadas inicialmente. A notação adotada será $\angle(r, s')$, que no caso $\angle(r', s)$=$\angle(r, s')$=$\angle(r, s)$.

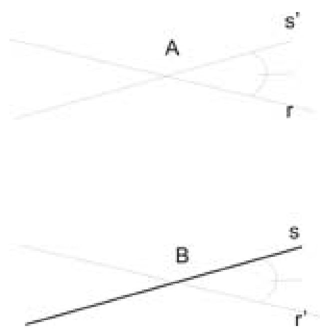


Figura 12.1: Ângulo entre retas

OBS 12.1. Lembremos que o ângulo formado por duas retas concorrentes é definido como o menor dos 4 ângulos que elas formam, compreendido entre 0^0, quando as retas são paralelas ou coincidentes, e 90^0, quando as retas são ortogonais.

Definição 12.2. Se dois planos são coincidentes ou paralelos dizemos que o ângulo entre eles é zero. Suponhamos que dois planos Π e β são concorrentes. Seja $t = \Pi \cap \beta$. Sejam $A, B \in t$, distintos, r e r' as perpendiculares a t em Π passando, respectivamente, por A e B, e, s e s' as perpendiculares a t em β passando, respectivamente, por A e B. A medida do ângulo entre Π e β é, por definição, igual a medida do ângulo r e s $\angle(r, s)$, que no caso vale $\angle(r, s) = \angle(r', s')$.

Definição 12.3. Dizemos que dois planos α e β são perpendiculares se o ângulo, $\angle(\alpha, \beta) = 90^0$.

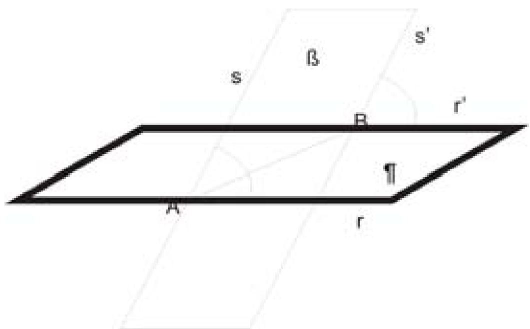


Figura 12.2: Ângulo entre planos

Definição 12.4. Chama-se diedro ou ângulo diedral a reunião de dois semi-planos com mesma origem. Os semi-planos são chamados de faces do diedro e a origem comum chama-se aresta.

Se as faces de um ângulo diedral sao semi-planos coincidentes ou opostos a medida do ângulo diedral e, por definicão, respectivamente, 0 ou 180^0. Agora, suponhamos que os planos que contém as faces sao concorrentes.

Sejam A e B dois pontos distintos pertencentes a aresta. A partir de A tracemos as semi-retas $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ perpendiculares a aresta, uma em cada face e a partir de B tracemos as semi-retas $\overline{BC}$ e $\overline{BF}$ também perpendiculares a aresta, sendo $\overline{BC}$ contida na mesma face em que se encontra $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$ contida na mesma face em que se encontra $\overline{AE}$, tais que $BC = AD$ e $BF = AE$. Desse modo, ABCD e ABFE sao paralelogramos, o que implica que CDEF e tambem um paralelogramo, donde, $ADE \equiv BCF$ (L.L.L.). Assim sendo, $\angle(DAE) = \angle(CBF)$. Definimos a a medida do ângulo diedral, nesse caso, como sendo a medida de $\angle(DAE) = \angle(CBF)$ que independe do ponto escolhido sobre a aresta.

OBS 12.2. Todo plano α reparte o espaco em tres subconjuntos: o proprio plano, o subconjunto dos pontos que ficam em um mesmo lado do plano e o subconjunto dos pontos que ficam no outro lado. Cada um desses dois ultimos subconjuntos chama-se semi-espaco aberto determinado por α e a uniao do plano com um semi-espaco aberto chama-se semi-espaco fechado determinado por α ou, simplesmente, semi-espaco. Assim, um plano determina dois semi-espacos que chamaremos de semi-espacos opostos em relacao a α.

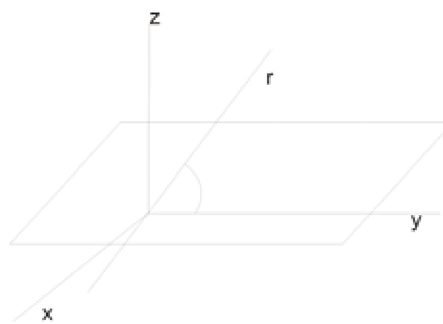
Teorema 12.1. *Sejam r uma reta que intercepta um plano α num ponto P, tal que $A \in r - P$ e A' o pé da perpendicular a α passando em A. Então, r e perpendicular a α, se, e somente se, $A' = P$.*

Demonstração
Seja r e $\overline{AA'}$ perpendiculares a α e passam no ponto $A \notin \alpha$. É fácil ver que, por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano, segue-se que r é a reta que passa pelos pontos A e A'. Sendo que P e A' pertencem a $r \cap \alpha$ e r intercepta α, segue que $A' = P$.
Para a recíproca devemos mostrar que r é perpendicular a α. Mas com r é a reta que passa por A e A' e também por A e P e r é perpendicular a α.
Agora, vamos definir o ângulo entre uma reta e um plano.

Definição 12.5. O ângulo entre uma reta r e um plano Π é igual ao menor ângulo formado por r e uma reta qualquer do plano.

OBS 12.3. Definimos o ângulo entre uma reta r e um plano Π como sendo 90^0 se r é perpendicular a Π. Porém se r não é perpendicular a Π , podemos definir $\angle(r, \alpha)$como sendo o ângulo que r faz com sua projeção sobre Π.

Exemplo 12.1. Considere uma reta r dada pela equação $y = x$, calcule o ângulo desta com o plano xy.



Solução:

É fácil ver que a reta r faz um ângulo de 45^0 com o eixo x. Portanto $\angle(r, \alpha) = 45^0$, onde α é o plano xy.

12.3 Distâncias

Primeiramente vamos definir a distância de um ponto A a uma reta r.

Definição 12.6. Dado um ponto A e uma reta r, o ponto B em que a reta intercepta o plano perpendicular a r passando por A é chamado de *projeção ortogonal* de A sobre r. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é definido como a distância de A a r, e denotado por $d(A, r)$.

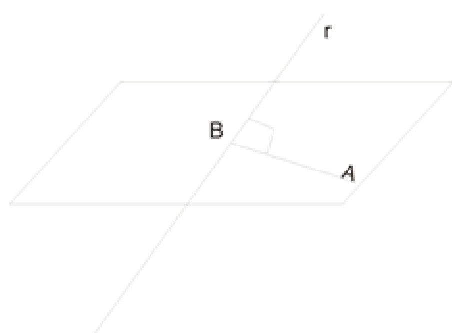
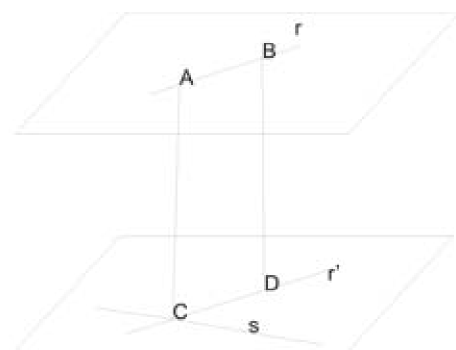


Figura 12.3: Distância entre ponto e reta

Teorema 12.2. *Se por um ponto A tracçarmos a perpendicular $\overline{AA'}$ ao plano Π e por um ponto qualquer B de Π traçarmos uma reta r perpendiculat a $\overline{A'B}$,então a reta $\overline{AB}$ é perpendicular a r.*

Demonstração
Note que as retas determinadas pelos segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{A'B}$ são ambas ortogonais a r. Portanto, o plano definido por essas retas é perpendicular a r, e assim, a reta determinada por $\overline{AB}$ desse plano é perpendicular a r.

Definição 12.7. Definimos a distância entre duas retas r e s reversas como sendo a distância entre os planos paralelos referidos no teorema 11.3., como na figura abaixo



12.4 Conclusão

Nesta aula entramos em alguns conceitos que você aluno, já estudou em Geometria Analítica. Porém lá o tratamento é menos abstrato e construtivo do que o visto aqui. O objetivo, ao fim desta aula é que você consiga fazer algumas construções, que possibilite as idéias intuitivas sobre ângulos e distância, para que enfim você possa formalizar estas idéias.

RESUMO

..

Retas reversas

Sejam $A \in r$ e $B \in s$ pontos quaisquer, r' a reta paralela a r passando por B e s' a reta paralela a s passando por A. O ângulo formado por essas retas concorrentes é o ângulo formado pelas retas dadas inicialmente. A notação adotada será $\angle(r, s')$, que no caso $\angle(r', s)$=$\angle(r, s')$=$\angle(r, s)$.

ângulo entre planos

Sejam dois planos Π e β são concorrentes. Seja $t = \Pi \cap \beta$. Sejam $A, B \in t$, distintos, r e r' as perpendiculares a t em Π passando, respectivamente, por A e B, e, s e s' as perpendiculares a t em β passando, respectivamente, por A e B. A medida do ângulo entre Π e β é, por definição, igual a medida do ângulo r e s $\angle(r, s)$, que no caso vale $\angle(r, s) = \angle(r', s')$.

ângulo diedral

Definimos ângulo diedral como sendo a reunião de dois semi-planos com mesma origem. Os semi-planos são chamados de faces do diedro e a origem comum chama-se aresta.

ângulo entre reta e plano

O ângulo entre uma reta r e um plano Π é igual ao menor ângulo formado por r e uma reta qualquer do plano.

Distância entre reta e plano

Dado um ponto A e uma reta r, o ponto B em que a reta intercepta o plano perpendicular a r passando por A é chamado de *projeção ortogonal* de A sobre r. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é definido como a distância de A a r, e denotado por $d(A, r)$.

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula trabalharemos com poliedros e exploraremos a conhecida relação de Euler.

ATIVIDADES

..

ATIV. 12.1. Considere duas retas paralelas secantes a dois planos paralelos. Mostre que os segmentos destas retas determinados pelos dois planos são congruentes.

ATIV. 12.2. Mostre que dois ângulos diedrais opostos pela aresta têm a mesma medida.

ATIV. 12.3. Mostre que o ângulo formado entre um plano α e um plano β e igual ao ângulo formado por αe qualquer plano paralelo a β.

ATIV. 12.4. Mostre que arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais

ATIV. 12.5. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de 3 pontos não colineares?

ATIV. 12.6. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes dados?

ATIV. 12.7. Mostre que um plano é perpendicular a dois planos concorrentes se, e somente se, ele é perpendicular à reta de interseção dos dois planos.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005

AULA
Poliedros
13

13.1 Introdução

Nesta aula estudaremos os sólidos formados por regiões do espaço (faces), chamados poliedros. O conceito de poliedro está para o espaço assim como o conceito de polígono está para o plano. Historicamente, não é possível estabelecer com certeza quando começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros, identificados como sólidos de faces planas. Do ponto de vista matemático, existem fontes egípcias, chinesas e babilônicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides.

Intuitivamente, podemos dizer que poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, de tal forma que a interseção de dois polígonos distintos seja uma aresta comum, um vértice comum, ou vazia . Os polígonos são denominados faces do poliedro. Os lados e os vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, arestas e vértices do poliedro. Porém necessitaremos aqui de algumas definições formais.

13.2 Definições

Chama-se polígono a região de um plano delimitada por um número finito de segmentos de reta, contidos nesse plano, que satisfazem as seguintes condicões:

i) cada extremidade de qualquer segmento e extremidade de exatamente dois segmentos;
ii) dois segmentos consecutivos quaisquer nunca são colineares;
iii) dois segmentos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.
Os segmentos sao chamados de lados e suas extremidades de vértices do polígono. A reunião dos lados chama-se linha poligonal fechada, bordo ou fronteira do polígono.
Denotaremos por dP o bordo do polígono P.
iv) fixado cada lado, os demais se encontram num mesmo semiplano (em relação ao fixado).

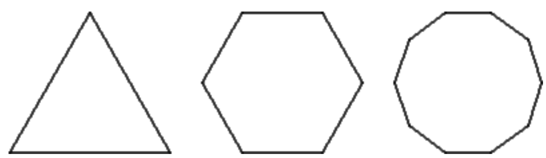


Figura 13.1: Exemplos de polígonos

Definição 13.1. Dois polígonos P e Q serão chamados de consecutivos se $P \cap Q \neq \emptyset$ e $P \cap Q \subset dP \cap dQ$.

Definição 13.2. Chamamos de poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições:
i) cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois polígonos;
ii) dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares;
iii) dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.

Exemplo 13.1.

Associada a esta definição podemos definir um poliedro convexo como:

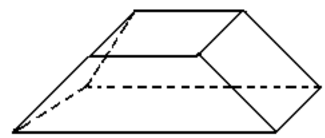


Figura 13.2: Exemplo de poliedro

Definição 13.3. Um poliedro é convexo se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em no máximo 2 pontos, ou equivalentemente:fixada cada face, as demais se encontram num mesmo semi-espaço.

Exemplo 13.2. O poliedro abaixo é não convexo, note que a reta abaixo corta o poliedro em 3 pontos distintos.

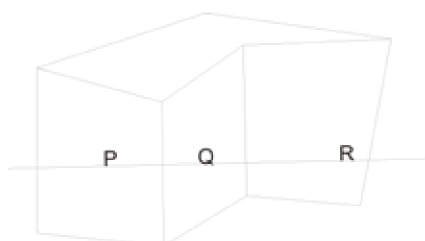


Figura 13.3: Exemplo de poliedro não convexo

13.3 A relação de Euler

Vamos agora enunciar a famosa relação de Euler:

Teorema 13.1. *Se V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então:*
$V - A + F = 2$

Demonstração

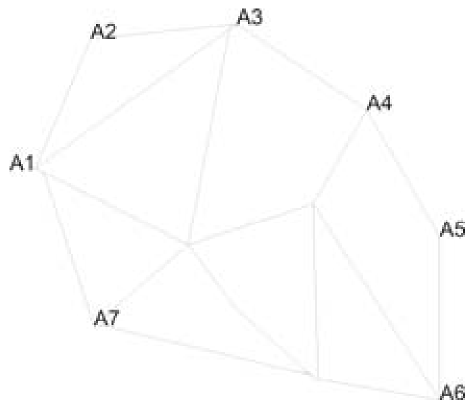


Figura 13.4: Exemplo de poliedro não convexo

Sejam $P_1, P_2, ..., P_s$ as faces do poliedro e $n_1, n_2, ..., n_s$, respectivamente, o número de arestas de $P_1, P_2, ..., P_s$. Consideremos a representação plana do poliedro segundo a face P_1. Sejam $A_1, A_2, ..., A_{n1}$ os vértices correspondentes aos vértices de P_1 nessa representação plana.

Temos: $n_1 + n_2 + ... + n_s = 2A$, pois, de acordo com a definição de poliedro, cada aresta tem exatamente duas faces e, portanto, na contagem $n_1 + n_2 + ... + n_s$ computamos duas vezes o número de arestas. Agora vamos calcular a soma dos ângulos internos de todos os poligonos da decomposição da face $A_1 A_2 ... A_{n1}$. Faremos isso de maneiras. A face transformada est decomposta em $s - 1$ polígonos. Os números de lados desses polígonos são $n_1, n_2, ..., n_s$. Por conseguinte, as respectivas somas de seus ângulos internos sao $180^0(n_2 - 2), 180^0(n_3 - 2), ..., 180^0(n_s - 2) = 180^0(n_2 + n_3 + ... + n_s - 2(s - 1))$.

De outra maneira podemos calcular o soma desses ângulos pelos ângulos internos de $A_1 A_2 ... A_{n1}$ e a este resultado somar os ângulos que ficam em torno dos vértices internos da decomposicao de $A_1 A_2 ... A_{n1}$. É fácil ver que a soma dos ângulos que ficam em torno de cada um desses vértices vale 360^0, de modo que temos $V - n_1$ vértices. E portanto temos $180^0(n_2 + n_3 + ... + n_s - 2(s-1)) = 180^0(n_2 - 1) + 360^0(V - n_1)$, e substituindo $n_2 + n_3 + ... + n_s$ por $2A - n_1$, temos $V - A + F = 2$.

Exemplo 13.3. (FAAP - SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

Solução:

De acordo com o problema temos $A = V + 6$, substituindo A na relaçao de Euler temos $F = 8$.

Exemplo 13.4. (UFS) Qual é o número de vértices de um poliedro convexo de sete faces, sendo duas pentagonais e cinco quadrangulares?

Solução:

Pela relação de Euler, temos: $V + F - A = 2$ e $F = 7$, e $2A = 2.5 + 4.5$, assim $A = 15$. Substituindo na relação de Euler, temos: $V = 10$.

Definição 13.4. Um poliedro convexo é dito regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema 13.2. *Existem apenas 5 poliedros regulares convexos.*

Demonstração

Dado um poliedro regular P, sendo que suas faces tem n de arestas e cada aresta é aresta de duas faces, segue que $nF = 2A$, e comoque de cada vértice partem o mesmo número m de arestas, segue que $Vm = nF$. Substituindo na relação de Euler, temos:

$F = \frac{4m}{2m+2n-mn}$.

Assim, $2m + 2n - mn > 0$, e como $m \geq 3$ temos que $n \leq 5$.

Um poliedro regular também recebe o nome de poliedro de Platão. De fato segue uma tabela com os 5 poliedros de Platão.

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4	12	8	6	hexaedro
3	5	30	20	12	dodecaedro
4	3	12	6	8	octaedro
5	3	30	12	20	icosaedro

13.4 Conclusão

Nesta aula esperamos que o aluno tenha compreendido com muita precisão os conceitos de poliedros convexos e regulares para que possa aplicar tais conceitos na relação de Euler; e principalmente compreender que só existem 5 poliedros regulares.

RESUMO

..

Poliedros

Chamamos de poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições:

i) cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois polígonos;

ii) dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares;

iii) dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.

Poliedro convexo

Um poliedro é convexo se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em no máximo 2 pontos, ou equivalentemente:fixada cada face, as demais se encontram num mesmo semi-espaço.

Poliedro regular

Um poliedro convexo é dito regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos vértices concorrem o mesmo número de arestas. Só existem 5 poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro, o icosaedro, o cubo, e o dodecaedro.

Relação de Euler

Se V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então:

$V - A + F = 2$

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iniciaremos os estudos sobre área de superfícies e volumes.

ATIVIDADES

ATIV. 13.1. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. Qual é o número de vértices deste poliedro?

ATIV. 13.2. (ITA - SP) Um poliedro convexo tem 13 faces. De um dos seus vértices partem 6 arestas; de 6 outros vértices partem, de cada um, 4 arestas, e finalmente, de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. O número de arestas desse poliedro é: a. 13 b. 17 c. 21 d. 24 e. 27

ATIV. 13.3. Quantas diagonais possui um dodecaedro regular?

ATIV. 13.4. Mostre que para todo poliedro convexo valem as desigualdades:
a) $A + 6 \leq 3F$ b)$A + 6 \leq 3V$

ATIV. 13.5. Descreva todos os poliedros que possuem 8 arestas

ATIV. 13.6. Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas então ele tem 6 faces

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005

AULA

14

Volume e Área de Superfície, Parte I

14.1 Introdução

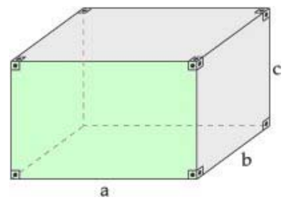
Nesta aula vamos trabalhar com os conceitos que você, aluno já está habituado: volume e área de superfície. Nesta aula, trataremos de volumes de sólidos simples como cilindros, cones, pirâmides, entre outros. Citaremos também o importante Princípio de Cavalieri, que estabelece uma relação simples: se em um dois sólidos, se cortarmos estes por planos e a interseção deste plano com os sólidos tiver mesma área, então os sólidos terão o mesmo volume.

A idéia de *sólido* é uma idéia primitiva, outro conceito primitivo que iremos considerar é o de volume de um sólido. O volume de um sólido é a quantidade de vezes que o cubo de aresta unitária "cabe"nele. Adotaremos a notação $V(S)$ que denota o volume do sólido S.

O matemático e filósofo grego, Arquimedes, nascido em 287 a.C. na cidade de Siracusa, na ilha de Sicília, deu uma grande contribuição à geometria espacial. Ele é responsável pela descoberta das fórmulas do volume e área da superfície dos principais sólidos geométricos tais como a esfera, cilindro, cone, etc., assunto desta e da próxima aula.

14.2 Volume do Paralelepípedo Retangular

O paralelepípedo retângulo é formado por 6 retângulos, como na figura abaixo:



Denotaremos por a como sendo o comprimento deste paralelepípedo, b a sua largura e c a sua altura.
O volume deste paralelepípedo será denotado por $V(a,b,c)$. É fácil ver que a função de 3 variáveis $V(a,b,c)$ tem como propriedades:
i) $V(a,b,c) = aV(1,b,c)$
ii)$V(a,b,c) = bV(a,1,c)$
iii)$V(a,b,c) = cV(a,b,1)$.
Deste modo, $V(a,b,c) = aV(1,b,c) = abV(1,1,c) = abcV(1,1,1) = abc$,
Pois $V(1,1,1) = 1$.
Concluímos que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular temos:
$V(a,b,c) =$ (área da base) $\times$ (altura).

14.3 O Princípio de Cavalieri

A seguir, enunciaremos um axioma conhecido por "Princípio de Cavalieri ", com o qual iremos deduzir as fórmulas que darão os volumes de prismas em geral.
Axioma (Princípio de Cavalieri)
Sejam S e S' sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S e S' segundo figuras com mesma área, então S e S' têm mesmo volume.

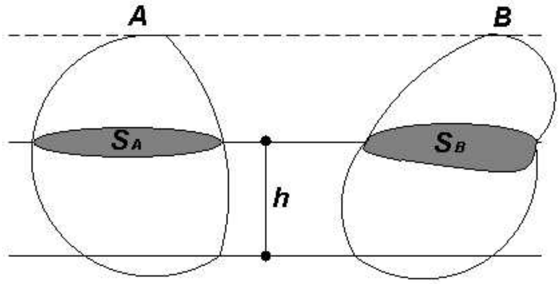


Figura 14.1: Princípio de Cavalieri

OBS 14.1. Consideraremos o conjunto vazio ou um conjunto unitário como uma figura de área nula para efeito do enunciado do princípio de Cavalieri.

Teorema 14.1. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração

Seja C um cilindro entre os planos Π e β de base F e altura h, em que $F \subset \Pi$. Considere um paralelepipedo P, retangular, cuja base R esta contida em Π e tem a mesma area de F, cuja altura seja h e esteja no mesmo semi-espaco em que se encontra C.

Considere um plano α paralelo a Π e β, entre β e Π. Como $\Pi \cap C = F$ e $\Pi \cap P = R$, e como F e R tem mesma área, segue-se as seções $\Pi \cap C$ e $\Pi \cap P$ tem mesma área. Pelo principio de Cavalieri, o cilindro e o paralelepipedo tem mesmo volume. Desde que o volume de P, é o produto da area de R por h, segue que o volume de C e o produto da área de R por h e, como que R e F tem mesma área, segue-se que o volume de C e o produto da area de F por h.

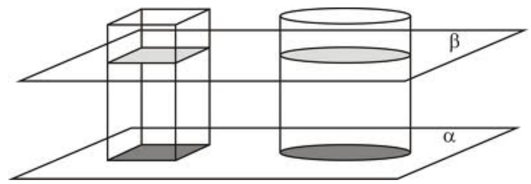


Figura 14.2: Utilização do Princípio de Cavalieri para a obtenção do volume do cilindro

Definição 14.1. O prisma é um poliedro irregular compreendido entre dois polígonos iguais e paralelos, e cujas faces laterais são paralelogramos. Os dois polígonos iguais e paralelos são as bases do prisma; o número de faces laterais é igual ao número dos lados das bases.

Com o princípio de Cavalieri, podemos obtersem dificuldade o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do prisma P, $V(P)$ é dado por $V(P) =$ (área da base) $\times$ (altura).
Com essa idéia podemos obter o volume de sólidos como a pirâmide, o cone, entre outros.

Teorema 14.2. *Dois cones têm mesmo volume se têm mesma altura e suas bases têm mesma área.*

Demonstração
Inserimos as bases dos dois cones num mesmo plano α, e seus vértices num mesmo semi-espaco determinado por α. Sejam: C e C' os cones, F e F' as respectivas bases, V e V' os respectivos vértices e h a altura comum. Para demonstrar que C e C' tem o mesmo volume utilizaremos o princípio de Cavalieri. Seja β um plano paralelo a α, entre V, e α e $h' = d(V, \beta)$. Basta mostrarmos que $\beta \cap C$ e $\beta \cap C'$ têm mesma área.

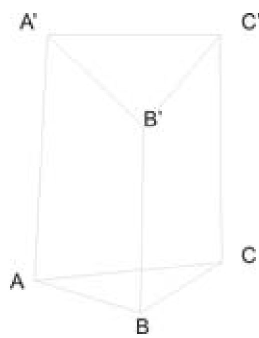
Mas como $F \equiv \beta \cap C$, com razão de semelhança $\frac{h}{h'}$, e desde que $\frac{rea(F)}{rea(\beta \cap C)} = \frac{h^2}{h'^2}$ e área(F)=área(F'), segue que área$(\beta \cap C)$ =área$(\beta \cap C')$.

Como consequência do teorema anterior, temos:

Teorema 14.3. *O volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.*

Demonstração

Consideremos um prisma triangular cujas bases são ABC e A'B'C'.



Seja h a altura do prisma, e a área de ABC é a. Sabemos que o volume deste prisma é ah. Vamos dividir este prisma em 3 tetraedros: $A - A'B'C', B' - ACC'$, e $B' - ABC$. Sejam a_1, a_2, a_3 os volumes destes três tetraedros. Pelo teorema anterior temos:

$a_1 = V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') = V(A' - ABC)$.

$a_2 = V(B' - ACC') = V(C' - ABC)$

$a_3 = V(B' - ABC)$.

Portanto, o volume do prisma é igual a soma dos volumes dos três tetraedros, de modo que o volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.

Corolário 14.1. *O volume de um cone circular e igual a $\frac{1}{3}\pi h r^2$, em que r e o raio da base e h e a altura do cone.*

Corolário 14.2. *O volume de uma pirâmide, cuja base é um polígono regular, é igual a* $\frac{1}{3}pah$*, em que* p *e* a *são, respectivamente, o semi-perímetro e o apótema da base e* h *é a altura da pirâmide.*

Corolário 14.3. *O volume de um tronco de pirâmide, cujas bases são polígonos regulares, cuja altura é* h*, cujos semi-perímetros das bases maior e menor, respectivamente, são* P *e* p*, e, cujos apótemas das bases maior e menor, respectivamente, são* A *e* a *é igual a* $\frac{1}{3}h(pa + pA + PA)$

RESUMO

..

Volume de um paralelepípedo retangular

O volume de um paralelepípedo retangular com comprimento a, largura b, e altura c, é denotado por $V(a, b, c)$, e vale $V(a, b, c) = abc$.

Princípio de Cavalieri

Sejam S e S' sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S e S' segundo figuras com mesma área, então S e S' têm mesmo volume.

Volume de um cone

O volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.

Volume de uma pirâmide

O volume de uma pirâmide, cuja base é um polígono regular, é igual a $\frac{1}{3}pah$, em que p e a são, respectivamente, o semi-perímetro e o apótema da base e h é a altura da pirâmide.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iniciaremos a segunda parte deste conteúdo, onde obteremos a fórmula do volume da esfera e faremos algumas construções com sólidos de revolução.

ATIVIDADES

ATIV. 14.1. Qual o número máximo de caixas cujas dimensões (exteriores) são 30cm, 20cm e 50cm que podem ser acomodadas em uma caixa cujas dimensões (interiores) são 2m, 3m e 5m?

ATIV. 14.2. Determine o volume e a área da superfície de uma esfera de raio igual a $\sqrt{\pi}$.

ATIV. 14.3. Em quantos por cento devemos aumentar a aresta de um cubo para que tenhamos um novo cubo com o dobro do volume do outro?

Um cone reto tem 3m de raio, 2cm de altura. Calcule seu volume, área e os raios das esferas inscritas e circunscrita.

ATIV. 14.4. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta a.

ATIV. 14.5. Demonstre que dentre os paralelepípedos retangulares de base quadrada com área total constante o de maior volume é o cubo.

ATIV. 14.6. Uma lata fechada, em forma de cilindro circular reto, tem as seguintes dimensões externas: altura h e raio r. Sabendo que sua espessura mede a, determine seu volume interno.

ATIV. 14.7. Um prisma reto de base hexagonal regular tem como altura o dobro da aresta da base. Qual a razão entre o volume deste prisma e o volume do cone circular reto nele inscrito?

ATIV. 14.8. Um cone e um cilindro, ambos circulares retos, possuem o mesmo volume e bases com mesmo raio. Supondo que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio r, determine a razão entre a altura do cone e r.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005

AULA 15

Volume e Área de Superfície, Parte II

15.1 Introdução

Nesta última aula, que é uma sequência obteremos o volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri, e trataremos de idéias de área de superfície. Finalmente abordaremos o contéudo de sólidos de revolução.

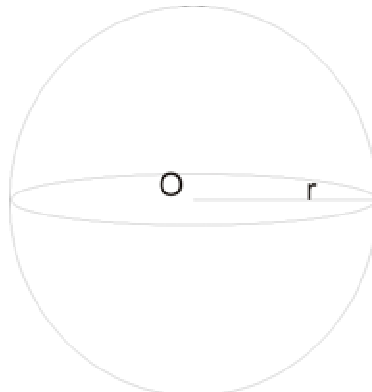
Intuitivamente a esfera pode ser "visto"como o lugar geométrico dos pontos no espaço em que a distância destes pontos a um ponto fixo P é constante. A esfera não tem vértices nem arestas. Na seção seguinte daremos algumas definições formais e resultados envolvendo este sólido.

15.2 A Esfera

Definição 15.1. Sejam O um ponto e r um número real positivo. O conjunto ϵ dos pontos do espaço cuja distância a O é menor do que ou igual a r chama-se esfera de centro O e raio r.

Duas esferas são ditas concêntricas se possuem o mesmo centro.

Definição 15.2. Dados uma esfera ϵ , e um ponto P, dizemos que P e um ponto interior ou exterior de ϵ se, respectivamente, $d(P, O) < r$ ou $d(P, O) > r$. O conjunto de todos os pontos interiores de ϵ e chamado de interior de ϵ e é denotado por int(ϵ) e o dos pontos exteriores e chamado de exterior de ϵ e e denotado por ext(ϵ).



Definição 15.3. O subconjunto de uma esfera formado pelos pontos cuja distância ao centro é igual ao raio chamaremos de superfície da esfera.

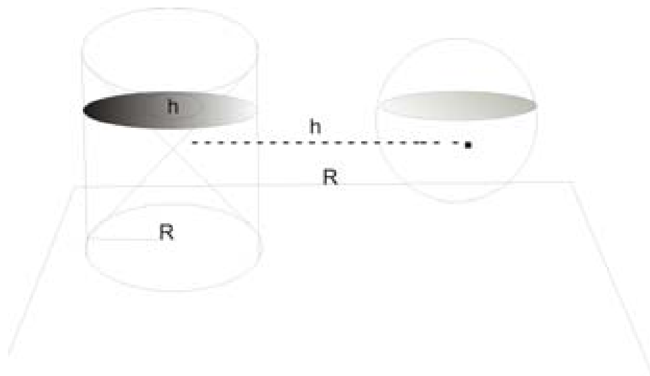
Teorema 15.1. *O volume de uma esfera ϵ de raio r vale* $V(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Demonstração

Para demonstrar este teorema utilizaremos o princípio de Cavalieri. Consideremos uma esfera ϵ e um cilindro C equilátero, ambos de raio r, em um plano horizontal, como na figura abaixo e tomemos uma seção em C que dista h do centro, no caso este é um círculo de área $\pi(r^2 - h^2)$. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido D é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro, produz uma coroa circular cujo raio externo é r e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de D. Como o volume de D é o volume do cilindro de raio r e altura 2r, tirando isto dos dois cones de raio r e altura r, obtemos:

$2r\pi r^2 - 2\frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$, portanto,

$V(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3$.



15.3 Àrea de Superfície

Nesta seção vamos demonstrar algumas fórmulas simples para o cálculo de áreas de superfícies de alguns sólidos.

Teorema 15.2. *A soma das áreas das faces laterais de um prisma reto é igual ao produto do perímetro da base pela altura.*

Demonstração
Cada face lateral é um retângulo cuja altura h é a altura do prisma e cuja base é um lado da base do prisma. Se $l_1, l_2, ..., l_k$ são os lados da base do prisma, então soma das áreas das faces laterais dele é igual a $(l_1h + l_2h + ... + l_kh)$.

Teorema 15.3. *A área da superfície lateral de um cilindro reto é igual ao produto do perímetro da base pela altura.*

Demonstração
A idéia é aproximarmos o contorno da base, que é uma curva fechada simples, por linhas poligonais fechadas cujos vértices pertençam a ele. Assim, as áreas das superfícies laterais dos prismas retos determinados por essas linhas poligonais fechadas com mesma altura do cilindro dado se aproximam da área da superfície lateral dele. Quanto mais aumentarmos o número n de lados da linha

poligonal melhor será a aproximação. Para tal fazemos n crescer, ou seja quando $n \mapsto \infty$, o perímetro da linha poligonal tenderá ao perímetro da base do cilindro e a área da superfície lateral do prisma determinado pela linha tenderá à área da superfície lateral do cilindro ,e portanto, obtemos $A = 2ph$, onde 2p é, o perímetro da linha e da base do cilindro.

Corolário 15.1. *A area da superficie lateral de um cilindro circular reto cuja altura e h e cujo raio da base e r e igual a* $2\pi rh$.

15.4 Sólidos de revolução

Consideremos em um plano a reta r que chamaremos de eixo e uma linha L que não corta r. A idéia agora é fazer L "girar"em torno deste eixo. Esta idéia é igual a quando você estudava sólidos de revolução na disciplina de cálculo I. Tomando cada ponto P de L, este percorre uma circunferência cujo o raio é a sua distância ao eixo. A união de todas essas circunferências é dado o nome de sólido de revolução.

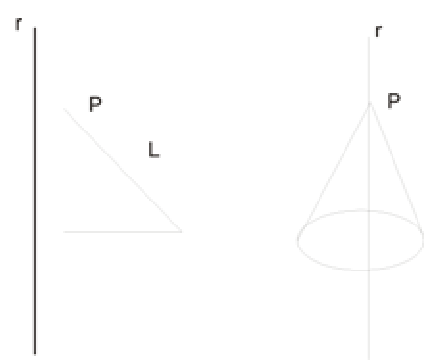


Figura 15.1: Exemplo de sólido de revolução

Agora, vamos formalizar esta idéia pelo conhecido
teorema de Pappus.

Teorema 15.4. *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Demonstração

Faremos aqui a demonstração para uma linha poligonal, pois para o caso geral será necessário cálculo integral, o que não é a proposta de um curso de matemática para o ensino médio.

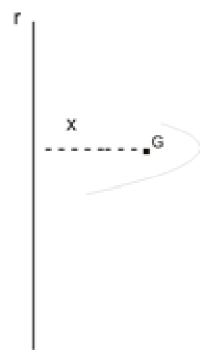


Figura 15.2: Exemplo de sólido de revolução

Se uma linha tem um comprimento L e se x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E, temos que provar que a área da superfície de revolução em torno de r vale $A = 2\pi x L$.
Seja uma linha poligonal que tem lados com comprimentos valendo $a_1, a_2, ..., a_k$ e cujos pontos médios distam $x_1, x_2, ..., x_k$ de r, respectivamente. Consideremos $L = a_1 + a_2 + ... + a_k$. Rotacionando todos os segmentos temos a superfície lateral de um tronco de cone e portanto a área da superfície gerada é:
$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + ... + 2\pi x_k a_k = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_k a_k)$,
mas sendo x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E, temos
$xL = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k$, e portanto,

$A = 2\pi x L.$

15.5 Conclusão

Nesta sequência de duas aulas trabalhamos relações de área de superfície e volume em sólidos. Exibimos muitos resultados tais que suas demonstrações são costumeiramente omitidas no ensino médio. Nosso objetivo foi o de mostrar com clareza estas demonstrações e incentivar o uso destas em sua sala de aula aluno, pois acreditamos que isto aguçaria a visão espacial do aluno. Deixamos por último e não menos importante o Teorema de Pappus, que em geral é a idéia primitiva que você teve em cálculo I: encontrar o volume de sólidos por meio de rotações sob um eixo fixo. Estas noções para os seus futuros alunos será de fato muito importante, mesmo que hoje, no Brasil o ensino destes "Entes Primitivos"estejam fracassando.

RESUMO

..

Esfera de raio r

> Sejam O um ponto e r um número real positivo. O conjunto ϵ dos pontos do espaço cuja distância a O é menor do que ou igual a r chama-se esfera de centro O e raio r. O volume de ϵ de raio r é $V(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Teorema de Pappus

> Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.

ATIVIDADES

ATIV. 15.1. Um plano secante a uma esfera de raio r dista $r - a$ de seu centro. Expresse a área da superfície da calota menor determinada pelo plano, em função de a e r, bem como o volume do sólido delimitado por essa calota e o plano.

ATIV. 15.2. Suponha que o centro de uma esfera de raio r pertence a umsetor esférico determinado por dois planos que distam, respectivamente, a e b do centro. Expresse o volume do setor e área da zona esférica correspondente a esse setor em função de a, b e r.

ATIV. 15.3. Dois prismas têm mesma altura e bases regulares inscritas em círculos de raios unitários com, respectivamente, 4 e 5 arestas. Demonstre que o que tem maior volume é aquele cuja base tem 5 arestas.

ATIV. 15.4. Encontre o volume da esfera utilizando o Teorema de Pappus.

ATIV. 15.5. Encontre a área da superfície do sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo equilátero de lado 1 em torno de um eixo, que contém um vértice e é perpendicular a um lado.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Volume e Área de Superfície, Parte II

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005