AULA 9

Médias e o Princípio das Gavetas de Dirichlet

9.1 Introdução

Nesta aula vamos introduzir o importante conceito de médias, dentre elas as mais importantes: a média aritmética, média geométrica, e harmônica. Vamos estabelecer relações entre as médias fornecendo algumas aplicaçoes aplicações. Trabalharemos também com o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como o princípio das casas dos pombos; e veremos que este nome é bem sugestivo para o conceito.

9.2 Médias

É de se esperar que a média de uma lista de números é um valor que poderá substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista. Se essa característica é a soma dos elementos da lista, obtemos a média mais simples que é a aritmética. Veremos logo a seguir que esta não é a única e mais, compreenderemos algumas propriedades entre elas.

Definição 9.1. A média aritmética da lista de n números, $x_1, x_2, ..., x_n$ é o valor MA que vale:
$MA = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Exemplo 9.1. A média para a lista de números $5, 6, -7, 9$ é
$MA = \dfrac{5+6-7+9}{4} = 3,25.$

Definição 9.2. A média geométrica dos n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor positivo MG tal que
$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$

OBS 9.1. Observe que só definimos a média geométrica para números positivos. Assim evitamos a possibilidade da média não existir. Por exemplo qual seria a média geométrica entre 1 e -9?

Exemplo 9.2. A média geométrica dos números $2, 5, 12$ é:
$MG = \sqrt[3]{2.5.12} = 4,934.$

Definição 9.3. A média harmônica dos n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor MH tal que,

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

OBS 9.2. A média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos dos números. E aqui, observamos também que, evitamos a possibilidade da média não existir, por essa razão definimos a média harmônica apenas para números positivos.

Exemplo 9.3. A média harmônica dos números 3, 36 e 54 é:

$$MH = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{54}} = \frac{324}{41}$$

Definição 9.4. A média quadrática dos n números positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é o valor MQ tal que,

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Exemplo 9.4. A média quadrática dos números 3, 9 e 6 é:

$MQ = \sqrt{\dfrac{3^2+9^2+6^2}{3}} \equiv 6,48.$

Exemplo 9.5. Um atleta aumentou seu rendimento (potência) muscular durante 2 meses de treinamento. No primeiro mês a taxa de aumento foi de 5% e no segundo foi de 15%. Qual foi a taxa média de aumento mensal?

Solução:

Queremos uma taxa média i tal que, se em todos os meses a taxa de aumento fosse igual a i, o aumento em dois meses seria o mesmo. O aumento em dois mese foi de 20, 075%, conforme mostra o esquema abaixo.

$100 \mapsto 100.1,05 \mapsto 100.1,05.1,15 = 120,075$

Se em todos os meses tivéssemos um aumento de taxa i, teríamos
$100 \mapsto 100(1+i) \mapsto 100(1+i)^2$.

Logo,

$120,075 = 100(1+i)^2$, e resolvendo para i, teremos:

$i \equiv 0,095 = 9,5\%$.

9.3 Desigualdade das médias

Nesta seção vamos majorar as médias vistas até agora, no caso as desigualdades são válidas:

$MQ \geq MA \geq MG \geq MH$.

Para demonstrar isto vamos lançar mão do lema de Cauchy.

Lema 9.1. *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos com $x_1x_2...x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.*

Demonstração

Vamos provar este lema por indução sobre n. O caso $n = 1$ é absolutamente trivial. Vamos supor por indução que para $x_1, x_2, ..., x_k$ reais positivos com $x_1 x_2 ... x_k = 1$, valha $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$ e provemos a validade para $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}_+$.

Deste modo, se $x_1 x_2 ... (x_k x_{k+1}) = 1$, tem-se $x_1 + x_2 + ... + (x_k x_{k+1}) \geq k$.

Sem perda de generalidade, supomos, $x_k \geq 1$ e $x_{k+1} \leq 1$.

Assim $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} + (x_k x_{k+1}) \geq k + (x_k x_{k+1})$,

Somando $-x_k x_{k+1}$ em ambos os lados, e somando 1-1 no membro direito, temos:

$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} + 1 - 1$, e fatorando:

$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + (x_k - 1) + (1 - x_{k+1}) \geq k + 1.$

A partir do lema de Cauchy, vamos provar a desigualdade das médias.

Teorema 9.1. • $MA \geq MG$

Demonstração

$(MG)^n = x_1 x_2 ... x_n$ e dividindo ambos os lados por $(MG)^n$, temos:

$1 = \frac{x_1}{MG} \frac{x_2}{MG} ... \frac{x_n}{MG}$, pelo lema de Cauchy temos:

$\frac{x_1}{MG} + \frac{x_2}{MG} + ... + \frac{x_n}{MG} \geq n$ e portanto,

$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq MG.$

Teorema 9.2. • $MG \geq MH$

Demonstração

Sabendo que, $MA \geq MG$, considere $x_i = \frac{1}{y_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, assim:

$$\frac{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + ... + \frac{1}{y_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{y_1} . \frac{1}{y_2} ... \frac{1}{y_n}}.$$

Portanto $MH \leq MG$.

Teorema 9.3. • $MQ \geq MA$

Demonstração

Supondo por absurdo $MQ < MA$, assim
$\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}} < \dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$, elevando os dois membros ao quadrado, e fazendo as simplificações necessárias, temos:
$(n-3)(x_1^2+x_2^2+...x_n^2)+2(x_1^2+x_2^2+...x_n^2-x_1x_2-x_1x_3-...-x_{n-2}x_n-x_{n-1}x_n)<0$,
que é um absurdo. Logo, $MQ \geq MA$.

Exemplo 9.6. (Olimpíada Ibero-Americana) Demonstre a seguinte desigualdade:
Se $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, então $S = \frac{1}{x}(1+xy)+\frac{1}{y}(1+yz)+\frac{1}{z}(1+xz) \geq 6$.

Solução:

Desenvolvendo a expressão, temos, $S = \frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}+x$, pelo teorema de Cauchy, temos que $S \geq 6$, pois $x.\frac{1}{x}.y\frac{1}{y}.z\frac{1}{z} = 1$.

Exemplo 9.7. (ITA-2002) Mostre que $(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2) > \dbinom{8}{4}$.
Solução:

Temos que encontrar uma desigualdade que seja capaz de provar a proposição.
Como $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, e portanto $2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 4$. Elevando os lados a quarta potência, temos:
$(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2) \geq 256 > \dbinom{8}{4}$

Exemplo 9.8. Mostre que, entre todos os retângulos de área A, o quadrado é o de menor perímetro.

Solução:

Se os lados do retÂngulo são x e y, temos $xy = A$, isto é, a média geométrica de x e y é $\sqrt{A}$. O perímetro do retângulo é $2(x+y)$. Temos
$2(x+y) = 4\frac{x+y}{2} \geq 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}$.

A igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$.

9.4 Princípio das Gavetas de Dirichlet

O princípio das gavetas pode ser enunciado como: *Se* $n+1$ *ou mais objetos são colocados em* n *ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.*

Prova O número médio de objetos por gaveta é maior do que ou igual a $\frac{n+1}{n}$, que é maior que 1. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1.

Exemplo 9.9. Mostre que, em um grupo de 13 pessoas há sempre pelo menos duas que nasceram no mesmo mês.

Solução:

Como $\frac{13}{12} < 1$, utilizando o princípio das gavetas, temos que há pelo menso duas pessoas que nasceram no mesmo mês.

Exemplo 9.10. Considere 5 pontos sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução:

Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados postos. Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O princípio das gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos no mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é $\sqrt{2}$.

9.5 Conclusão

Nesta aula podemos verificar que as propriedades das médias são ferramentas preciosas para se resolver problemas de majoração que a primeira vista se apresentam difíceis. Pela proposta do ensino médio, não é necessário, que você futuro professor, demonstre essas desigualdades, mas é necessário que você enriqueça sua aula com muitos exemplos (alguns até bem elaborados), para resaltar a importancia destes resultados. O princípio das gavetas se revela outra ferramenta muito simples para resolver problemas de alocação de objetos. E é também aconselhável que você aluno, forneça muitas aplicaçoes sobre isto.

RESUMO

¨

Média aritmética

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais, a média aritmética desta lista é dada por:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Média Geométrica

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, a média geométrica desta lista é dada por:

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

média Harmônica

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, a média harmônica desta lista é dada por:

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

média Quadrática

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos, a média quadrática desta lista é dada por:

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Desigualdades das média

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

Princípio das gavetas de Dirichlet

Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula mudaremos o foco novamente e iniciaremos os estudos em Geometria Espacial.

ATIVIDADES

ATIV. 9.1. Prove que:

a) $k^2 \geq k(1.2.3\ldots(2k-1))^{\frac{1}{k}}$

b) $1+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2 \geq \dfrac{k^3(3.5.7.\ldots.(2k-1))}{3.5\ldots(2k-1)+5.7\ldots(2k-1)+\ldots(2k-1)}$

ATIV. 9.2. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$a_i, b_i \in \mathbb{R}, |a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}.\sqrt{(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}$

ATIV. 9.3. Prove que $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$.

ATIV. 9.4. Mostre que: $\frac{x+y^2+3yz}{3\sqrt{3}y} \geq (xy)^{\frac{1}{3}}$

ATIV. 9.5. Prove quese $nk+1$ objetos são colocados em n gavetas, pelo menos uma gaveta recebe mais de k objetos

LEITURA COMPLEMENTAR

..

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

Santos, J.P.O., Mello, M. P., Murari, I. T. C., Introdução à Análise Combinatória, 4 ed., Editora Moderna, Rio de Janeiro, 2007.