AULA 10

Introdução a Geometria Espacial: Pontos, Retas e Planos

10.1 Introdução

O ensino de Geometria para alunos do segundo ano do segundo grau faz o aluno se deparar com figuras geométricas tridimensionais. Embora figuras tridimensionais sejam naturais, pois todo nosso mundo real é feito delas, a nossa experiência nos diz que há muitas dificuldades na coompreensão dos novos conceitos e principalmente na "visão geométrica"de certos sólidos. Embora o aluno possa ter dificuldade no aprendizado de Geometria, em geral ele não tem dificuldade entender as propriedades essenciais das figuras geométricas simples. Conceitos como paralelismo, perprendicularismo e congruência são bem entendidos pelos alunos.

Tais facilidades não ocorrem quando se começa a estudar Geometria Espacial. As relações entre as figuras geométricas fundamentais são bem mais complexas do que na Geometria Plana. Sempre que você, futuro professor, se deparar com dificuldades em que o aluno tenha em "ver"certas figuras, se possível, experimente expressar através de desenhos ou modelos de figuras.

Vamos agora, fazer uma rápida abordagem histórica.

Tales de Mileto (624-548 a.C.) foi o precursor da geometria pela dedução. À ele atribui-se a autoria da demonstração, entre outros teoremas, de que um ângulo inscrito num semi−círculo é um ângulo reto. Não existe documentos que comprovem estas autorias. Outro matemático antigo, também precursor da geometria dedutiva, ao qual se lhe atribui a autoria da demonstração do famoso teorema - num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos - é Pitágoras de Samos (580 à 500 a.C.). Devido à perda de documentos daquela época e pelo fato de que a escola fundada por ele era secreta, o teorema de Pitágoras assim como o da divisão áurea de um segmento, podem ter sido demonstrados por seus discípulos ou até mesmo pelos babilônios. Dois séculos depois, Euclides de Alexandria publicara o texto mais influente de todos os tempos: "Os Elementos"(300 a.C.). Depois da Bíblia, é o livro com mais edições publicadas (provavelmente mais de mil). Os elementos de Euclides estão divididos em treze livros, dos quais somente os seis primeiros tratam de geometria plana elementar. Em "Os elementos"o ponto é definido de forma bem inusitada: "o ponto é aquilo que não tem partes", e reta como "um comprimento se dimensões". Estas definições por mais claras e simples que apareçam, são mais intuitivas que formais.Contudo, por dois mil anos, Os Elementos constituiu o mais rigoroso tratado lógico dedutivo da matemática elementar.

10.2 Entes Primitivos e Axiomas da Geometria Euclidiana

AXIOMA 1: *Existem um conjunto, denominado espaço, e duas coleções de subconjuntos do espaço satisfazendo às propriedades enunciadas nos axiomas subseqüentes.*

Os elementos do espaço são chamados de pontos, os de uma das coleções referidas no axioma 1 são denominados retas e os da outra, planos. Vale observar que os elementos das retas e dos planos são pontos.

Ponto, reta e plano são os conceitos primitivos da geometria euclidiana plana. Os pontos são denotados usualmente por letras maiúsculas A,B,C, ...; as retas por letras minúsculas r,s,t,...e os planos por letras gregas π, α, β, ...Intuitivamente, podemos imaginar que uma porção de um plano é a superfície de uma mesa ou uma folha de papel estirada; uma porção de um reta é um risco feito com o auxílio de uma régua, ou, um cordão esticado; e um ponto e um furinho feito com a ponta de um alfinete numa folha ou um pingo feito com uma caneta, etc. O espaço pode ser pensado como sendo nosso ambiente. Diremos que dois ou mais pontos são coplanares ou colineares, respectivamente, se pertencem a um mesmo plano ou a uma mesma reta; diremos ainda que dois ou mais conjuntos não vazios de pontos sao coplanares ou colineares se todos os seus pontos são, respectivamente, coplanares ou colineares. Se um ponto A pertence a uma reta r ou a um plano π é usual dizer que r ou π passa por A.

AXIOMA 2 *Por dois pontos distintos passa uma única reta.*

Se A e B são pontos distintos pertencentes à reta r, denotamos $r = \overline{AB}$.

AXIOMA 3 *Por três pontos não colineares passa um único plano.*

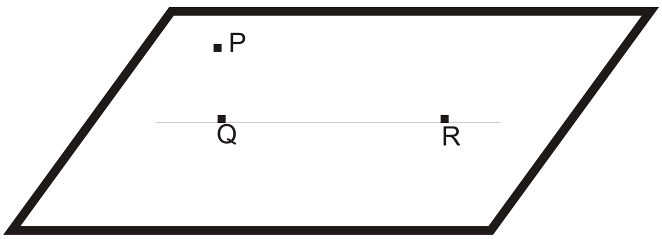
AXIOMA 4 *Cada reta contém pelo menos dois pontos distintos; todo plano contém no mínimo três pontos não colineares; o espaço contém pelo menos quatro pontos distintos entre si não coplanares e não colineares.*

AXIOMA 5 *Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.*

Teorema 10.1. *Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela*

Demonstração

Seja P um ponto não pertencente a reta r. Tomemos, sobre r, dois pontos distintos Q e R. Os pontos P, Q e R não são colineares (de fato, pelo axioma 2, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r). Pelo axioma 3, sabemos que existe um único plano α (figura abaixo) contendo P, Q e R. Como a reta r tem de dois de seus pontos em α, o axioma 4 estabelece que r está contida em α. Logo existe um único plano que contém P, Q, R e r.



10.3 Posições de retas

Nesta seção vamos tratar de questões do tipo:

"Como pode ser a intersecção de duas retas?"

"Quando duas retas determinam um plano?"

Pelo axioma 2, duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum, e quando isto acontece, elas são chamadas de concorrentes, e sempre determinam um plano.

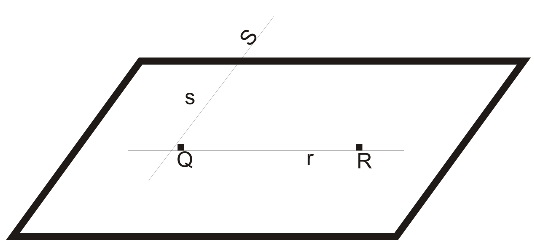


Figura 10.1: Retas concorrentes

Esta última afirmação é de fácil verificação pois, se as retas r e s se interceptam em P, tomemos $R \in r$ e $S \in s$, pelo axioma3, temos o plano π como na figura acima.

Agora se duas retas não são concorrentes elas podem ou não gerar um plano. Primeiramente consideremos a situação mostrada na figura abaixo. Considere r a reta contida num plano α e uma reta s que intercepta o plano α em um ponto P. Deste modo não há nenhum plano que contenha r e s simultaneamente, sendo assim dizemos que *r e s são retas reversas*.

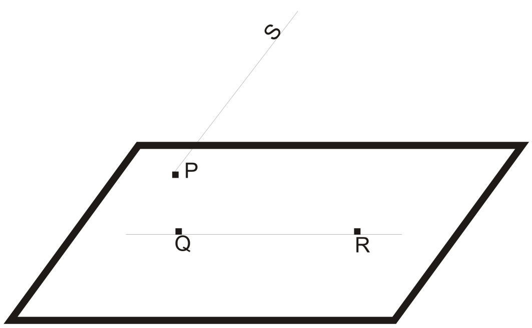


Figura 10.2: Retas reversas

Mas há o caso em que duas retas que também tenham intersecção vazia sejam coplanares, este é o caso das retas paralelas.

Figura 10.3: Retas paralelas

10.4 Posição relativa entre retas e plano

Agora veremos como é possível uma reta e um plano se relacionarem. Dividiremos estas possibilidades em três casos.

O primeiro é o mais simples: é quando r possui dois ou mais pontos no plano α, e assim r está contida em α, como vemos na figura abaixo.

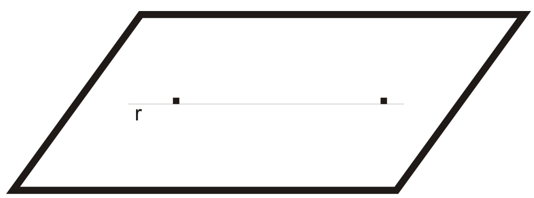


Figura 10.4: uma reta contida em um plano

O segundo caso possível é quando uma reta r "corta"o plano α, ou seja intercepta o plano em um dado ponto P. Neste caso dizemos que a reta r é *secante* ao plano α.

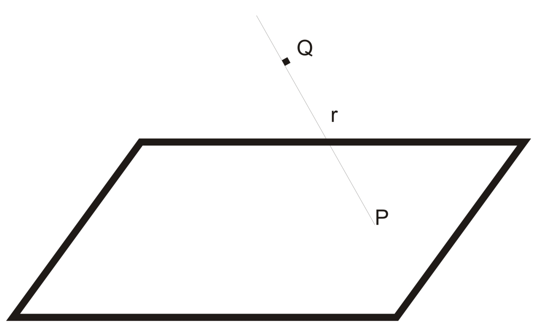


Figura 10.5: uma reta interceptando um plano

O último caso trata-se da situação em que a intersecção de uma reta e um plano seja vazia. No caso se a reta r e o plano α forem tais que, $r \cap \alpha = \emptyset$, dizemos que r e α são paralelos.

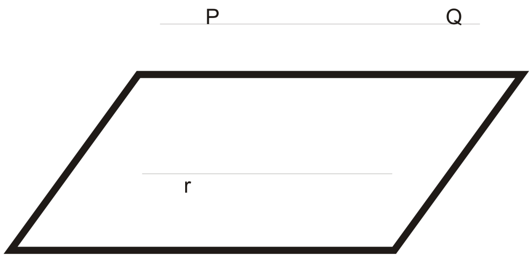


Figura 10.6: uma reta paralela a um plano um plano

10.5 Posição Relativa entre dois planos

Nesta seção veremos como pode se dar a interseção de dois planos. Neste caso teremos duas situações.
A primeira noz diz em que situação um plano pode interceptar outro de modo que esta intercessão seja não vazia. Podemos notar facilmente que se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua interseção é uma reta. Neste caso dizemos que estes planos são secantes.

Figura 10.7: Planos secantes

OBS 10.1. No caso anterior consideramos a possibilidade de um plano ter mais de um ponto em comum, porém se dois planos tiverem dois ou mais pontos em comum, a intersecção deste também é uma reta, sendo isto possível pelo axioma 5.

O segundo caso em relação a posição de planos é o caso em que estes são paralelos. Na verdade dado um plano α é sempre possível encontrar um plano β paralelo a α.

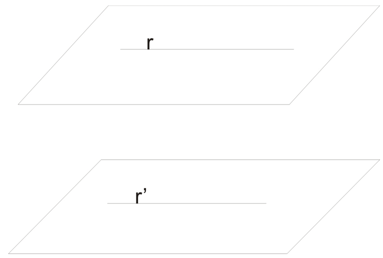


Figura 10.8: Planos Paralelos

10.6 Conclusão

Nesta aula apresentamos idéias intuitivas sobre ponto, reta e plano. Porém estabelecemos relações com as quais trabalharemos com estes conceitos a partir de 5 axiomas. Encorajamos você futuro professor, a sempre lançar mão de idéias fazendo uso de figuras e modelos, para facilitar a aprendizagem dos seus alunos.

RESUMO

Posição relativas entre retas

Posição relativa entre r e s	interseção entre r e s
Concorrentes	exatamente um ponto
Reversas	$\emptyset$
Reversas	$\emptyset$

Posição relativas entre reta e plano

Posição relativa entre r e α	interseção entre r e α
r contida em α	r
r secante a α	um único ponto
r paralela a α	$\emptyset$

Posição relativas entre planos

Posição relativa entre α e β	interseção entre α e β
secantes	r
paralelos	$\emptyset$

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula estudaremos relações de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos.

ATIVIDADES

..

ATIV. 10.1. Quantos planos distintos existem tais que eles sejam determinados por 4 pontos distintos?

ATIV. 10.2. Prove as afirmações abaixo.

a) Por um ponto passam, no mínimo, três retas.

b) Três pontos não colineares são distintos entre si.

c) Dada uma reta, há, pelo menos, dois planos que a contêm.

d) Um plano contém pelo menos três retas.

e)Dados um plano α e um ponto pertencente a α, existem, no minimo, duas retas contidas em α passando por esse ponto.

ATIV. 10.3. Seja F uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos sejam coplanares. Mostre que F é plana, isto é, está contida num plano.

ATIV. 10.4. Uma figura é formada por quatro pontos A, B, C eD e pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Ela é uma figura plana?

ATIV. 10.5. Sejam r e s duas retas reversas e $P \in r$ e $Q \in s$. Qual é a interseção do plano α definido por r e Q com o plano β definido por s e P?

ATIV. 10.6. Qual é a seção determinada pela interseçao do paralelepípedo ABCDEFGH com o plano determinado por ABG?

ATIV. 10.7. Três planos distintos têm em comum dois pontos. Mostre que existe uma reta comum aos três planos.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005