AULA

Paralelismo e perpendicularismo 11

11.1 Introdução

Nesta aula estudaremos as noções de paralelismo e perpendicularismo. Vamos assumir que o aluno tenha o conhecimento de todos os resultados concernentes à geometria euclidiana. plana. A idéia de perpendicularismo está intimamente ligada á idéia de se "aumentar uma dimensão", isto se deve ao fato de fazermos aqui a transposição do plano para o espaço ao construirmos uma reta perpendicular a um plano dado. Faremos também um paralelo entre o teorema de Tales no plano e no espaço. Vamos agora dar algumas definições e citar alguns resultados acerca de paralelismo e perpendicularismo de retas e planos.

11.2 Retas e Planos perpendiculares

Definição 11.1. Dadas duas retas r e s, com $r \in \alpha$, dizemos que r e s são ortogonais se a projeção de s' de s em α forma um ângulo reto com r.

OBS 11.1. Note que se estas retas estiverem num mesmo plano, dizemos que elas são perpendiculares. De modo que a definição de ortogonalidade generaliza a noção de perpendicularismo.

Definição 11.2. Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano.

Teorema 11.1. *Sejam r uma reta paralela a umplano α e $P \in \alpha$. Entao, a reta paralela a r passando por P esta contida em α.*

Demonstração

Seja β o plano determinado por P e r. Temos que α e β sao concorrentes. Seja $s = \alpha \cap \beta$.

Como $s \subset \alpha$ e r é paralela paralela a β, segue-se que $s \cap r = \emptyset$ e pelo fato de s e r serem coplanares (estao contidas em β), vem que s e r sao paralelas. Desde que P e comum a α e β, segue que $P \in s$. Logo, a reta paralela a r passando por P esta contida em α.

Corolário 11.1. *Se uma reta r e paralela a um plano α, entao existe uma reta distinta de r, contida em α e paralela a r*

Demonstração

Seja P um ponto qualquer de α. Pelo teorema , a reta paralela a r passando por P esta contida em α.

Teorema 11.2. *Se uma reta r e paralela a uma reta r' contida num plano α e não está contida nesse plano, entao r é paralela a α.*

Demonstração

Por absurdo, suponhamos que r intercepta α. Seja $P = r \cap \alpha$. Seja β o plano determinado por r e r'. Temos: $r' = \beta \cap \alpha$. Sendo que $P \in r \cap \alpha$ e $r \subset \beta$, segue que $P \in \beta \cap \alpha$.

Como $r' = \beta \cap \alpha$, segue-se que $P \in r'$. De fato, isto é uma contradição pelo fato de que $P \in r$ e r ser distinta e paralela a r'.

Teorema 11.3. *Sejam r e s, e, r' e s' pares de retas concorrentes. Se r é paralela a r' e s é paralela a s', então os planos determinados por r e s, e, r' e s' são paralelos ou coincidentes.*

Demonstração

Sejam Π o plano determinado por r e s e β o plano determinado por r' e s'. Suponhamos que $\Pi \neq \beta$. Devemos mostrar que β é paralelo a Π . Antes, mostraremos que r não está contida em β . Por absurdo, suponha que $r \subset \pi$ Assim sendo, teremos necessariamente $s \subset \beta$, pois do contrário, como s é paralela a uma reta contida em β, pelo Teorema anterior, segue que s é paralela a β, o que seria uma contradição ao fato de um ponto de s pertencer a r e $r \subset \beta$. Como que $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$, então $\alpha = \Pi$, uma contradição. Portanto, $r \subsetneq \beta$. Isto implica, de acordo com o Teorema anterior, que r é paralelo a β, já que r é paralela a uma reta contida em β. Dado que s tem um ponto em comum com r e r é paralela a β, segue-se que $s \subsetneq \beta$ de modo ques é paralelo a β , uma vez que s é paralela a uma reta contida em β . Enfim, r e s são retas paralelas a β .

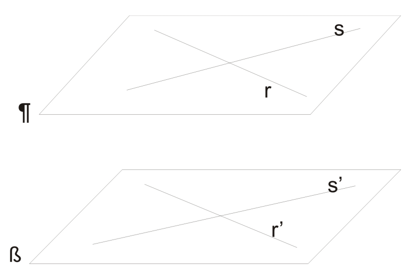


Figura 11.1: Planos Paralelos

Novamente, por absurdo, suponhamos que Π e β não são paralelos. Considere $t = \Pi \cap \beta$. Então, t, r e s são coplanares. Como r e s são concorrentes, t não é simultaneamentre paralela a r e s. Assim, t é concorrente a uma delas, já que t é distinta de ambas. Digamos, r. Um absurdo, pois r é paralela a β.

Teorema 11.4. *Por um ponto não pertencente a um plano, passa um único plano paralelo ao plano dado.*

Demonstração

Sejam P um ponto e Π um plano tais que $P \notin \Pi$. Sejam u e v retas concorrentes contidas em Π e r e s as retas passando por P, respectivamente, paralelas a u e v. É claro que r e s não estão contidas no plano Π. Pelo teorema anterior, o plano α determinado por r e s é paralelo a Π. Seja β um plano paralelo a Π passando por P. Mostraremos que $\alpha = \beta$. É claro que as retas concorrentes u e v contidas em Π são paralelas ao plano β. Pelo Teorema 11.1, as respectivas paralelas a u e v passando por P estao contidas em β, uma vez que $P \in \beta$. Essas paralelas sao r e s. Posto que duas retas concorrentes determinam um único plano, segue-se que $\alpha = \beta$.

Teorema 11.5. *Seja* Π *o plano determinado por duas retas concorrentes r e s no ponto O. Se uma reta t é perpendicular a r e a s em O, então t e perpendicular a* Π *em O.*

Demonstração

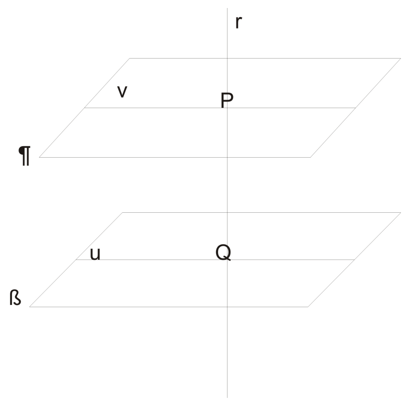
Seja u uma reta qualquer contida em Π passando por O. Mostraremos que t é perpendicular a u. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \neq r$ e $u \neq s$. Tomemos em r e s, respectivamente, pontos A e B tais que A e B se encontram em semi-planos abertos opostos em relacao a u.

O segmento $\overline{AB}$ intercepta u num ponto C entre A e B. Sejam D e D' pontos distintos em t tais que O é ponto médio de $\overline{DD'}$. Sendo t perpendicular a r, segue-se, pelo caso L.A.L.(lado, ângulo, lado) de congruência de triangulos, que AOD é côngruo a AOD' e sendo t perpendicular a s, segue, por $L.A.L.$, que BOD é congruente a BOD'. Desse modo, $AD = AD'$ e $BD = BD'$, donde,

por L.L.L., ABD é congruente a ABD e, portanto, o ângulo BÂD é igual a BÂD'. Isto acarreta, por L.A.L., que CAD é congruente a CAD', por conseguinte, $CD = CD'$. Assim sendo, por L.L.L., COD é congruente a COD'. Portanto, o ângulo CÔD é reto, e assim t é perprendicular a u.

Teorema 11.6. *Por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano.*

Demonstração
Sejam Π um plano e $P \notin \Pi$ um ponto. Seja β o plano paralelo a Π passando por P. Seja r a reta perpendicular a β passando por P.



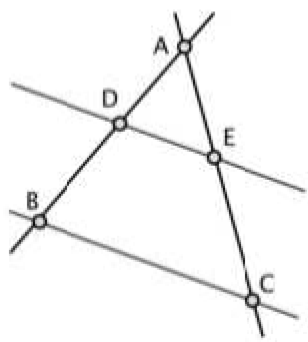
Como Π é paralelo a β , então r intercepta Π em Q. Seja $u \subset \Pi$ uma reta qualquer passando por Q. Vamos mostrar que r é perpendicular a u. Seja v a reta paralela a u passando por P. Sendo que u é paralelo a β, vem, pelo Teorema 11.1, que $v \subset \beta$. Desde que r é perpendicular a β, segue que r é perpendicular a v. Sendo que r e transversal as paralelas u e v, segue que r é perpendicular a u. Portanto, r é perpendicular a Π e passa por P. Para mostrarmos a unicidade, considere r' uma reta perpendicular a β passando por P. Devemos mostrar que $r' = r$. Para isso, basta mostrarmos que $Q \in r'$. Seja $Q' \in \Pi$ perpendicular a r'. Mostraremos que $Q' = Q$. Por absurdo, suponhamos que $Q \neq Q$. Assim, a soma dos ângulos internos do triangulo PQQ' é maior do que 180^0, um absurdo. Logo, $Q' = Q$, donde, $Q \in r$ e, portanto, $r' = r$.

11.3 Planos Paralelos e Proporcionalidade

Na Geometria Plana fazemos a associação de retas paralelas com proporcionalidade. Aqui faremos um análogo: enunciaremos o teorema de Tales de Mileto no espaço, relacionando-o com planos paralelos. Para recordarmos, vamos enunciar o teorema de Tales no plano:

Teorema 11.7. *Se duas retas paralelas são interceptadas por duas retas concorrentes, então as medidas dos segmentos correspondentes determinados nas transversais são proporcionais.*

Omitiremos a demonstração deste fato, que pode ser encontrado nas referências abaixo.

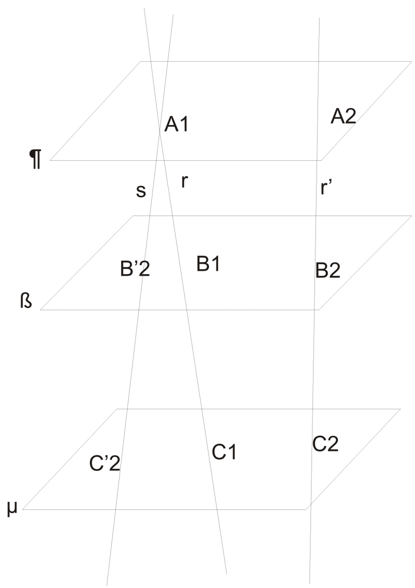


Podemos enunciar a versão do teorema de Tales no espaço como dado abaixo:

Teorema 11.8. *Um feixe de planos paralelos determina seguimentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.*

Demonstração

Considere como na figura acima, pelo ponto $A_1 \in r$, traçamos uma reta s paralela a r', que passa pelos 3 planos nos pontos $A_1 B_2'$ e C_2'. As retas r e r' determinamum plano, que corta β e μ segundo as retas paralelas $B_1 B_2'$ e $C_1 C_2'$. Logo pelo teorema de Tales no plano, temos: $\dfrac{A_1B_1}{A_1B_2'} = \dfrac{B_1C_1}{B_2'C_2'} = \dfrac{A_1C_1}{A_1C_2'}$.



Mas $A_1B_2' = A_2B_2$, $B_2'C_2' = B_2C_2$ e $A_1C_2' = A_2C_2$, assim, $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{A_1C_1}{A_2C_2}$., o que prova o teorema.

11.4 Conclusão

Nesta aula fornecemos muitos resultados acerca de retas perpendiculares a planos, e por último enunciamos e mostramos a versão espacial do teorema de Tales. Esperamos que você aluno tenha visto estas demonstrações com cuidado a fim de quando surgirem alguns problemas envolvendo estes conceitos, você possa resolvê-los com facilidade. Novamente, recomenda-se fortemente que você disponibilize desenhos para a "visualização"do que é proposto.

RESUMO

Retas ortogonais

> Dadas duas retas r e s, com $r \in \alpha$, dizemos que r e s são ortogonais se a projeção de s' de s em α forma um ângulo reto com r.

Reta perpendicular a um plano

> Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano.

Teorema de Tales no espaço

> Um feixe de planos paralelos determina seguimentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos noções intuitivas e formais sobre distâncias e ângulos.

ATIVIDADES

ATIV. 11.1. Seja P um ponto exterior a um plano α. Para cada ponto $Q \in \alpha$ seja X o ponto do segmento $\overline{PQ}$ que o divide na razão $\frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}} = k$.
Qual é o lugar geométrico do ponto X quando Q percorre o plano α.

ATIV. 11.2. Considere dois planos α e β. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão em α e β, respectivamente?

Sejam duas retas reversas r e s. Sejam A e B pontos distintos de r e C e D pontos distintos de s. Qual é a posição relativa das retas determinadas pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$?

ATIV. 11.3. Três planos distintos têm em comum dois pontos. Mostre que existe uma reta comum aos três planos.

ATIV. 11.4. Mostre que por um ponto dado existe uma única reta ortogonal a duas retas não paralelas.

ATIV. 11.5. Seja t uma reta contida em dois planos distintos. Mostre que t é a interseção desses dois planos.

ATIV. 11.6. Mostre que se uma reta é paralela a dois planos concorrentes, então ela é paralela à reta de interseção dos dois planos.

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005