AULA

Noções de distâncias e ângulos 12

12.1 Introdução

Nesta aula trataremos de distância e ângulos entre retas. A idéia é utilizar todos os conceitos das últimas duas aulas para estudar problemas métricos no espaço. No caso de ângulos, se duas retas são coplanares, já sabemos que elas podem ser coincidentes ou paralelas. A novidade, para o caso espacial, fica por conta de um par de retas ser reversas.

A distância entre dois pontos P e Q é a medida do segmento $\overline{PQ}$. Como feito no plano, utilizamos o teorema de Pitágoras para determinar a distância entre pontos no espaço.

12.2 Ângulos

Sejam r e s retas. Assumimos o conhecimento do conceito de ângulo entre retas no caso das retas serem coplanares.

No caso, se r e s são coincidentes ou paralelas dizemos que o ângulo entre r e s é zero. Se são concorrentes, elas formam dois pares de ângulos opostos pelo vértice (que têm mesma medida) sendo que dois desses ângulos não opostos pelo vértice são suplementares. Neste caso, o ângulo entre elas é, por definição, o menor dos quatro ângulos.

Se r e s são reversas, podemos definir:

Definição 12.1. Sejam $A \in r$ e $B \in s$ pontos quaisquer, r' a reta paralela a r passando por B e s' a reta paralela a s passando por A. O ângulo formado por essas retas concorrentes é o ângulo formado pelas retas dadas inicialmente. A notação adotada será $\angle(r, s')$, que no caso $\angle(r', s)$=$\angle(r, s')$=$\angle(r, s)$.

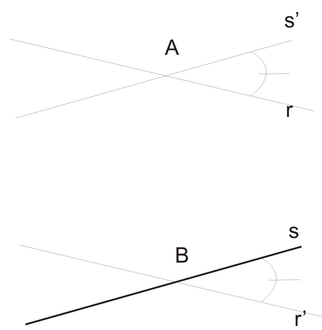


Figura 12.1: Ângulo entre retas

OBS 12.1. Lembremos que o ângulo formado por duas retas concorrentes é definido como o menor dos 4 ângulos que elas formam, compreendido entre 0^0, quando as retas são paralelas ou coincidentes, e 90^0, quando as retas são ortogonais.

Definição 12.2. Se dois planos são coincidentes ou paralelos dizemos que o ângulo entre eles é zero. Suponhamos que dois planos Π e β são concorrentes. Seja $t = \Pi \cap \beta$. Sejam $A, B \in t$, distintos, r e r' as perpendiculares a t em Π passando, respectivamente, por A e B, e, s e s' as perpendiculares a t em β passando, respectivamente, por A e B. A medida do ângulo entre Π e β é, por definição, igual a medida do ângulo r e s $\angle(r, s)$, que no caso vale $\angle(r, s) = \angle(r', s')$.

Definição 12.3. Dizemos que dois planos α e β são perpendiculares se o ângulo, $\angle(\alpha, \beta) = 90^0$.

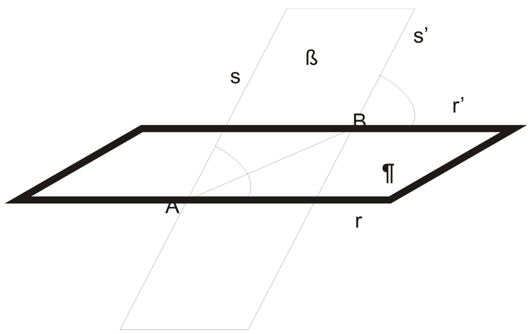


Figura 12.2: Ângulo entre planos

Definição 12.4. Chama-se diedro ou ângulo diedral a reunião de dois semi-planos com mesma origem. Os semi-planos são chamados de faces do diedro e a origem comum chama-se aresta.

Se as faces de um ângulo diedral sao semi-planos coincidentes ou opostos a medida do ângulo diedral e, por definicão, respectivamente, 0 ou 180^0. Agora, suponhamos que os planos que contém as faces sao concorrentes.

Sejam A e B dois pontos distintos pertencentes a aresta. A partir de A tracemos as semi-retas $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ perpendiculares a aresta, uma em cada face e a partir de B tracemos as semi-retas $\overline{BC}$ e $\overline{BF}$ também perpendiculares a aresta, sendo $\overline{BC}$ contida na mesma face em que se encontra $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$ contida na mesma face em que se encontra $\overline{AE}$, tais que $BC = AD$ e $BF = AE$. Desse modo, ABCD e ABFE sao paralelogramos, o que implica que CDEF e tambem um paralelogramo, donde, $ADE \equiv BCF$ (L.L.L.). Assim sendo, $\angle(DAE) = \angle(CBF)$. Definimos a a medida do ângulo diedral, nesse caso, como sendo a medida de $\angle(DAE) = \angle(CBF)$ que independe do ponto escolhido sobre a aresta.

OBS 12.2. Todo plano α reparte o espaco em tres subconjuntos: o proprio plano, o subconjunto dos pontos que ficam em um mesmo lado do plano e o subconjunto dos pontos que ficam no outro lado. Cada um desses dois ultimos subconjuntos chama-se semi-espaco aberto determinado por α e a uniao do plano com um semi-espaco aberto chama-se semi-espaco fechado determinado por α ou, simplesmente, semi-espaco. Assim, um plano determina dois semi-espacos que chamaremos de semi-espacos opostos em relacao a α.

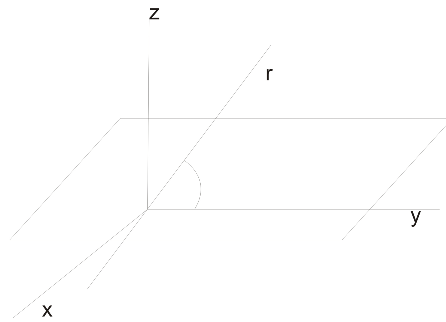
Teorema 12.1. *Sejam r uma reta que intercepta um plano α num ponto P, tal que $A \in r - P$ e A' o pé da perpendicular a α passando em A. Então, r e perpendicular a α, se, e somente se, $A' = P$.*

Demonstração
Seja r e $\overline{AA'}$ perpendiculares a α e passam no ponto $A \notin \alpha$. É fácil ver que, por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano, segue-se que r é a reta que passa pelos pontos A e A'. Sendo que P e A' pertencem a $r \cap \alpha$ e r intercepta α, segue que $A' = P$.
Para a recíproca devemos mostrar que r é perpendicular a α. Mas com r é a reta que passa por A e A' e também por A e P e r é perpendicular a α.
Agora, vamos definir o ângulo entre uma reta e um plano.

Definição 12.5. O ângulo entre uma reta r e um plano Π é igual ao menor ângulo formado por r e uma reta qualquer do plano.

OBS 12.3. Definimos o ângulo entre uma reta r e um plano Π como sendo 90^0 se r é perpendicular a Π. Porém se r não é perpendicular a Π , podemos definir $\angle(r, \alpha)$como sendo o ângulo que r faz com sua projeção sobre Π.

Exemplo 12.1. Considere uma reta r dada pela equação $y = x$, calcule o ângulo desta com o plano xy.



Solução:

É fácil ver que a reta r faz um ângulo de 45^0 com o eixo x. Portanto $\angle(r, \alpha) = 45^0$, onde α é o plano xy.

12.3 Distâncias

Primeiramente vamos definir a distância de um ponto A a uma reta r.

Definição 12.6. Dado um ponto A e uma reta r, o ponto B em que a reta intercepta o plano perpendicular a r passando por A é chamado de *projeção ortogonal* de A sobre r. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é definido como a distância de A a r, e denotado por $d(A, r)$.

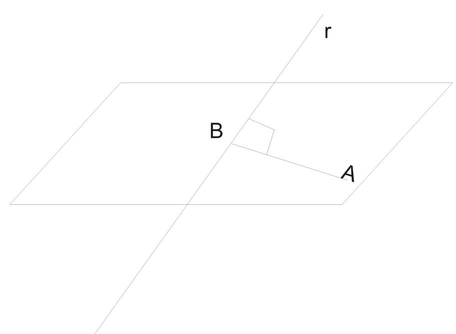


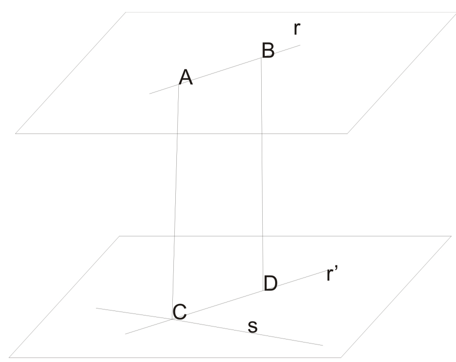
Figura 12.3: Distância entre ponto e reta

Teorema 12.2. *Se por um ponto A tracçarmos a perpendicular $\overline{AA'}$ ao plano Π e por um ponto qualquer B de Π traçarmos uma reta r perpendiculat a $\overline{A'B}$,então a reta $\overline{AB}$ é perpendicular a r.*

Demonstração

Note que as retas determinadas pelos segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{A'B}$ são ambas ortogonais a r. Portanto, o plano definido por essas retas é perpendicular a r, e assim, a reta determinada por $\overline{AB}$ desse plano é perpendicular a r.

Definição 12.7. Definimos a distância entre duas retas r e s reversas como sendo a distância entre os planos paralelos referidos no teorema 11.3., como na figura abaixo



12.4 Conclusão

Nesta aula entramos em alguns conceitos que você aluno, já estudou em Geometria Analítica. Porém lá o tratamento é menos abstrato e construtivo do que o visto aqui. O objetivo, ao fim desta aula é que você consiga fazer algumas construções, que possibilite as idéias intuitivas sobre ângulos e distância, para que enfim você possa formalizar estas idéias.

RESUMO

Retas reversas

Sejam $A \in r$ e $B \in s$ pontos quaisquer, r' a reta paralela a r passando por B e s' a reta paralela a s passando por A. O ângulo formado por essas retas concorrentes é o ângulo formado pelas retas dadas inicialmente. A notação adotada será $\angle(r, s')$, que no caso $\angle(r', s)=\angle(r, s')=\angle(r, s)$.

ângulo entre planos

Sejam dois planos Π e β são concorrentes. Seja $t = \Pi \cap \beta$. Sejam $A, B \in t$, distintos, r e r' as perpendiculares a t em Π passando, respectivamente, por A e B, e, s e s' as perpendiculares a t em β passando, respectivamente, por A e B. A medida do ângulo entre Π e β é, por definição, igual a medida do ângulo r e s $\angle(r, s)$, que no caso vale $\angle(r, s) = \angle(r', s')$.

ângulo diedral

Definimos ângulo diedral como sendo a reunião de dois semi-planos com mesma origem. Os semi-planos são chamados de faces do diedro e a origem comum chama-se aresta.

ângulo entre reta e plano

O ângulo entre uma reta r e um plano Π é igual ao menor ângulo formado por r e uma reta qualquer do plano.

Distância entre reta e plano

> Dado um ponto A e uma reta r, o ponto B em que a reta intercepta o plano perpendicular a r passando por A é chamado de *projeção ortogonal* de A sobre r. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é definido como a distância de A a r, e denotado por $d(A, r)$.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula trabalharemos com poliedros e exploraremos a conhecida relação de Euler.

ATIVIDADES

ATIV. 12.1. Considere duas retas paralelas secantes a dois planos paralelos. Mostre que os segmentos destas retas determinados pelos dois planos são congruentes.

ATIV. 12.2. Mostre que dois ângulos diedrais opostos pela aresta têm a mesma medida.

ATIV. 12.3. Mostre que o ângulo formado entre um plano α e um plano β e igual ao ângulo formado por αe qualquer plano paralelo a β.

ATIV. 12.4. Mostre que arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais

ATIV. 12.5. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de 3 pontos não colineares?

ATIV. 12.6. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes dados?

ATIV. 12.7. Mostre que um plano é perpendicular a dois planos concorrentes se, e somente se, ele é perpendicular à reta de interseção dos dois planos.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005