AULA 13

Poliedros

13.1 Introdução

Nesta aula estudaremos os sólidos formados por regiões do espaço (faces), chamados poliedros. O conceito de poliedro está para o espaço assim como o conceito de polígono está para o plano. Historicamente, não é possível estabelecer com certeza quando começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros, identificados como sólidos de faces planas. Do ponto de vista matemático, existem fontes egípcias, chinesas e babilônicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides.

Intuitivamente, podemos dizer que poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, de tal forma que a interseção de dois polígonos distintos seja uma aresta comum, um vértice comum, ou vazia . Os polígonos são denominados faces do poliedro. Os lados e os vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, arestas e vértices do poliedro. Porém necessitaremos aqui de algumas definições formais.

13.2 Definições

Chama-se polígono a região de um plano delimitada por um número finito de segmentos de reta, contidos nesse plano, que satisfazem as seguintes condicões:

i) cada extremidade de qualquer segmento e extremidade de exatamente dois segmentos;
ii) dois segmentos consecutivos quaisquer nunca são colineares;
iii) dois segmentos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.
Os segmentos sao chamados de lados e suas extremidades de vértices do polígono. A reunião dos lados chama-se linha poligonal fechada, bordo ou fronteira do polígono.
Denotaremos por dP o bordo do polígono P.
iv) fixado cada lado, os demais se encontram num mesmo semiplano (em relação ao fixado).

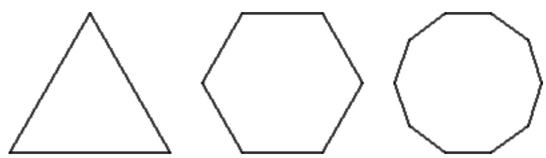

Figura 13.1: Exemplos de polígonos

Definição 13.1. Dois polígonos P e Q serão chamados de consecutivos se $P \cap Q \neq \emptyset$ e $P \cap Q \subset dP \cap dQ$.

Definição 13.2. Chamamos de poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições:
i) cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois polígonos;
ii) dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares;
iii) dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.

Exemplo 13.1.

Associada a esta definição podemos definir um poliedro convexo como:

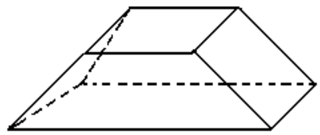

Figura 13.2: Exemplo de poliedro

Definição 13.3. Um poliedro é convexo se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em no máximo 2 pontos, ou equivalentemente:fixada cada face, as demais se encontram num mesmo semi-espaço.

Exemplo 13.2. O poliedro abaixo é não convexo, note que a reta abaixo corta o poliedro em 3 pontos distintos.

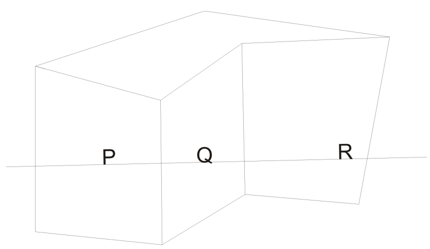

Figura 13.3: Exemplo de poliedro não convexo

13.3 A relação de Euler

Vamos agora enunciar a famosa relação de Euler:

Teorema 13.1. *Se V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então:*
$V - A + F = 2$

Demonstração

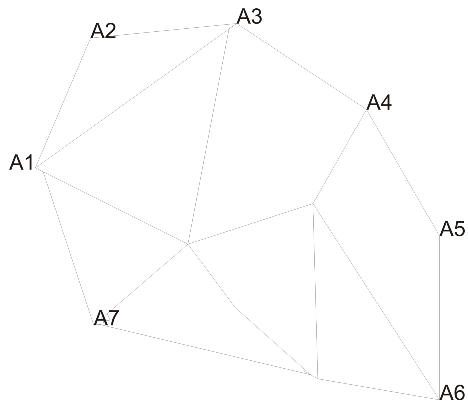

Figura 13.4: Exemplo de poliedro não convexo

Sejam $P_1, P_2, ..., P_s$ as faces do poliedro e $n_1, n_2, ..., n_s$, respectivamente, o número de arestas de $P_1, P_2, ..., P_s$. Consideremos a representação plana do poliedro segundo a face P_1. Sejam $A_1, A_2, ..., A_{n1}$ os vértices correspondentes aos vértices de P_1 nessa representação plana.

Temos: $n_1 + n_2 + ... + n_s = 2A$, pois, de acordo com a definição de poliedro, cada aresta tem exatamente duas faces e, portanto, na contagem $n_1 + n_2 + ... + n_s$ computamos duas vezes o número de arestas. Agora vamos calcular a soma dos ângulos internos de todos os poligonos da decomposição da face $A_1A_2...A_{n1}$. Faremos isso de maneiras. A face transformada est decomposta em $s - 1$ polígonos. Os números de lados desses polígonos são $n_1, n_2, ..., n_s$. Por conseguinte, as respectivas somas de seus ângulos internos sao $180^0(n_2 - 2), 180^0(n_3 - 2), ..., 180^0(n_s - 2) = 180^0(n_2 + n_3 + ... + n_s - 2(s - 1))$.

De outra maneira podemos calcular o soma desses ângulos pelos ângulos internos de $A_1A_2...A_{n1}$ e a este resultado somar os ângulos que ficam em torno dos vértices internos da decomposicao de $A_1A_2...A_{n1}$. É fácil ver que a soma dos ângulos que ficam em torno de cada um desses vértices vale 360^0, de modo que temos $V - n_1$ vértices. E portanto temos $180^0(n_2 + n_3 + ... + n_s - 2(s-1)) = 180^0(n_2 - 1) + 360^0(V - n_1)$, e substituindo $n_2 + n_3 + ... + n_s$ por $2A - n_1$, temos $V - A + F = 2$.

Exemplo 13.3. (FAAP - SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

Solução:
De acordo com o problema temos $A = V + 6$, substituindo A na relaçao de Euler temos $F = 8$.

Exemplo 13.4. (UFS) Qual é o número de vértices de um poliedro convexo de sete faces, sendo duas pentagonais e cinco quadrangulares?

Solução:
Pela relação de Euler, temos: $V + F - A = 2$ e $F = 7$, e $2A = 2.5 + 4.5$, assim $A = 15$. Substituindo na relação de Euler, temos: $V = 10$.

Definição 13.4. Um poliedro convexo é dito regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema 13.2. *Existem apenas 5 poliedros regulares convexos.*

Demonstração
Dado um poliedro regular P, sendo que suas faces tem n de arestas e cada aresta é aresta de duas faces, segue que $nF = 2A$, e comoque de cada vértice partem o mesmo número m de arestas, segue que $Vm = nF$. Substituindo na relação de Euler, temos:
$F = \frac{4m}{2m+2n-mn}$.
Assim, $2m + 2n - mn > 0$, e como $m \geq 3$ temos que $n \leq 5$.

Um poliedro regular também recebe o nome de poliedro de Platão. De fato segue uma tabela com os 5 poliedros de Platão.

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4	12	8	6	hexaedro
3	5	30	20	12	dodecaedro
4	3	12	6	8	octaedro
5	3	30	12	20	icosaedro

13.4 Conclusão

Nesta aula esperamos que o aluno tenha compreendido com muita precisão os conceitos de poliedros convexos e regulares para que possa aplicar tais conceitos na relação de Euler; e principalmente compreender que só existem 5 poliedros regulares.

RESUMO

Poliedros

Chamamos de poliedro a região do espaço delimitada por um número finito de polígonos que satisfazem às seguintes condições:

i) cada lado de qualquer polígono é lado de exatamente dois polígonos;

ii) dois polígonos consecutivos quaisquer nunca são coplanares;

iii) dois polígonos não consecutivos quaisquer jamais se interceptam.

Poliedro convexo

Um poliedro é convexo se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em no máximo 2 pontos, ou equivalentemente:fixada cada face, as demais se encontram num mesmo semi-espaço.

Poliedro regular

Um poliedro convexo é dito regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos vértices concorrem o mesmo número de arestas. Só existem 5 poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro, o icosaedro, o cubo, e o dodecaedro.

Relação de Euler

Se V, A e F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, então:

$V - A + F = 2$

PRÓXIMA AULA

..

Na próxima aula iniciaremos os estudos sobre área de superfícies e volumes.

ATIVIDADES

..

ATIV. 13.1. Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. Qual é o número de vértices deste poliedro?

ATIV. 13.2. (ITA - SP) Um poliedro convexo tem 13 faces. De um dos seus vértices partem 6 arestas; de 6 outros vértices partem, de cada um, 4 arestas, e finalmente, de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. O número de arestas desse poliedro é: a. 13 b. 17 c. 21 d. 24 e. 27

ATIV. 13.3. Quantas diagonais possui um dodecaedro regular?

ATIV. 13.4. Mostre que para todo poliedro convexo valem as desigualdades:
a) $A + 6 \leq 3F$ b)$A + 6 \leq 3V$

ATIV. 13.5. Descreva todos os poliedros que possuem 8 arestas

ATIV. 13.6. Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas então ele tem 6 faces

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.
LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.
Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005