AULA

14

Volume e Área de Superfície, Parte I

14.1 Introdução

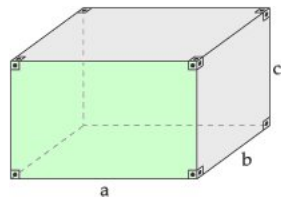
Nesta aula vamos trabalhar com os conceitos que você, aluno já está habituado: volume e área de superfície. Nesta aula, trataremos de volumes de sólidos simples como cilindros, cones, pirâmides, entre outros. Citaremos também o importante Princípio de Cavalieri, que estabelece uma relação simples: se em um dois sólidos, se cortarmos estes por planos e a interseção deste plano com os sólidos tiver mesma área, então os sólidos terão o mesmo volume.

A idéia de *sólido* é uma idéia primitiva, outro conceito primitivo que iremos considerar é o de volume de um sólido. O volume de um sólido é a quantidade de vezes que o cubo de aresta unitária "cabe"nele. Adotaremos a notação $V(S)$ que denota o volume do sólido S.

O matemático e filósofo grego, Arquimedes, nascido em 287 a.C. na cidade de Siracusa, na ilha de Sicília, deu uma grande contribuição à geometria espacial. Ele é responsável pela descoberta das fórmulas do volume e área da superfície dos principais sólidos geométricos tais como a esfera, cilindro, cone, etc., assunto desta e da próxima aula.

14.2 Volume do Paralelepípedo Retangular

O paralelepípedo retângulo é formado por 6 retângulos, como na figura abaixo:



Denotaremos por a como sendo o comprimento deste paralelepípedo, b a sua largura e c a sua altura.
O volume deste paralelepípedo será denotado por $V(a, b, c)$. É fácil ver que a função de 3 variáveis $V(a, b, c)$ tem como propriedades:
i) $V(a, b, c) = aV(1, b, c)$
ii)$V(a, b, c) = bV(a, 1, c)$
iii)$V(a, b, c) = cV(a, b, 1)$.
Deste modo, $V(a, b, c) = aV(1, b, c) = abV(1, 1, c) = abcV(1, 1, 1) = abc$,
Pois $V(1, 1, 1) = 1$.
Concluímos que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular temos:
$V(a, b, c) =$ (área da base) $\times$ (altura).

14.3 O Princípio de Cavalieri

A seguir, enunciaremos um axioma conhecido por "Princípio de Cavalieri ", com o qual iremos deduzir as fórmulas que darão os volumes de prismas em geral.
Axioma (Princípio de Cavalieri)
Sejam S e S' sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S e S' segundo figuras com mesma área, então S e S' têm mesmo volume.

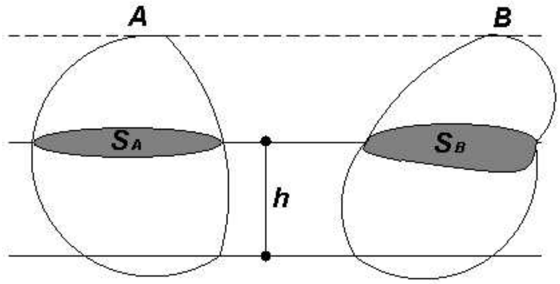


Figura 14.1: Princípio de Cavalieri

OBS 14.1. Consideraremos o conjunto vazio ou um conjunto unitário como uma figura de área nula para efeito do enunciado do princípio de Cavalieri.

Teorema 14.1. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração

Seja C um cilindro entre os planos Π e β de base F e altura h, em que $F \subset \Pi$. Considere um paralelepipedo P, retangular, cuja base R esta contida em Π e tem a mesma area de F, cuja altura seja h e esteja no mesmo semi-espaco em que se encontra C.

Considere um plano α paralelo a Π e β, entre β e Π. Como $\Pi \cap C = F$ e $\Pi \cap P = R$, e como F e R tem mesma área, segue-se as seções $\Pi \cap C$ e $\Pi \cap P$ tem mesma área. Pelo principio de Cavalieri, o cilindro e o paralelepipedo tem mesmo volume. Desde que o volume de P, é o produto da area de R por h, segue que o volume de C e o produto da área de R por h e, como que R e F tem mesma área, segue-se que o volume de C e o produto da area de F por h.

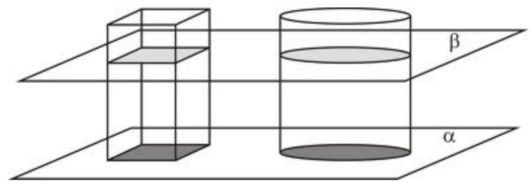


Figura 14.2: Utilização do Princípio de Cavalieri para a obtenção do volume do cilindro

Definição 14.1. O prisma é um poliedro irregular compreendido entre dois polígonos iguais e paralelos, e cujas faces laterais são paralelogramos. Os dois polígonos iguais e paralelos são as bases do prisma; o número de faces laterais é igual ao número dos lados das bases.

Com o princípio de Cavalieri, podemos obtersem dificuldade o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Pelo Princípio de Cavalieri, o volume do prisma P, $V(P)$ é dado por $V(P) =$ (área da base) $\times$ (altura).
Com essa idéia podemos obter o volume de sólidos como a pirâmide, o cone, entre outros.

Teorema 14.2. *Dois cones têm mesmo volume se têm mesma altura e suas bases têm mesma área.*

Demonstração
Inserimos as bases dos dois cones num mesmo plano α, e seus vértices num mesmo semi-espaco determinado por α. Sejam: C e C' os cones, F e F' as respectivas bases, V e V' os respectivos vértices e h a altura comum. Para demonstrar que C e C' tem o mesmo volume utilizaremos o princípio de Cavalieri. Seja β um plano paralelo a α, entre V, e α e $h' = d(V, \beta)$. Basta mostrarmos que $\beta \cap C$ e $\beta \cap C'$ têm mesma área.

Mas como $F \equiv \beta \cap C$, com razão de semelhança $\frac{h}{h'}$, e desde que $\frac{rea(F)}{rea(\beta \cap C)} = \frac{h^2}{h'^2}$ e área(F)=área(F'), segue que

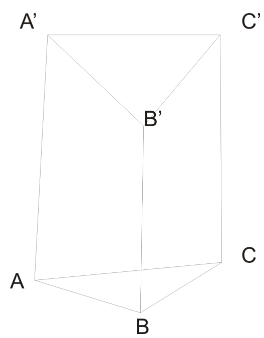
área($\beta \cap C$) =área($\beta \cap C'$).

Como consequência do teorema anterior, temos:

Teorema 14.3. *O volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.*

Demonstração

Consideremos um prisma triangular cujas bases são ABC e A'B'C'.



Seja h a altura do prisma, e a área de ABC é a. Sabemos que o volume deste prisma é ah. Vamos dividir este prisma em 3 tetraedros: $A - A'B'C', B' - ACC'$, e $B' - ABC$. Sejam a_1, a_2, a_3 os volumes destes três tetraedros. Pelo teorema anterior temos:

$a_1 = V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') = V(A' - ABC)$.

$a_2 = V(B' - ACC') = V(C' - ABC)$

$a_3 = V(B' - ABC)$.

Portanto, o volume do prisma é igual a soma dos volumes dos três tetraedros, de modo que o volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.

Corolário 14.1. *O volume de um cone circular e igual a* $\frac{1}{3}\pi h r^2$, *em que r e o raio da base e h e a altura do cone.*

Corolário 14.2. *O volume de uma pirâmide, cuja base é um polígono regular, é igual a* $\frac{1}{3}pah$*, em que* p *e* a *são, respectivamente, o semi-perímetro e o apótema da base e* h *é a altura da pirâmide.*

Corolário 14.3. *O volume de um tronco de pirâmide, cujas bases são polígonos regulares, cuja altura é* h*, cujos semi-perímetros das bases maior e menor, respectivamente, são* P *e* p*, e, cujos apótemas das bases maior e menor, respectivamente, são* A *e* a *é igual a* $\frac{1}{3}h(pa + pA + PA)$

RESUMO

Volume de um paralelepípedo retangular

O volume de um paralelepípedo retangular com comprimento a, largura b, e altura c, é denotado por $V(a, b, c)$, e vale $V(a, b, c) = abc$.

Princípio de Cavalieri

Sejam S e S' sólidos. Se todo plano horizontal intercepta S e S' segundo figuras com mesma área, então S e S' têm mesmo volume.

Volume de um cone

O volume de um cone é igual a um terço da área da base pela altura.

Volume de uma pirâmide

O volume de uma pirâmide, cuja base é um polígono regular, é igual a $\frac{1}{3}pah$, em que p e a são, respectivamente, o semi-perímetro e o apótema da base e h é a altura da pirâmide.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula iniciaremos a segunda parte deste conteúdo, onde obteremos a fórmula do volume da esfera e faremos algumas construções com sólidos de revolução.

ATIVIDADES

ATIV. 14.1. Qual o número máximo de caixas cujas dimensões (exteriores) são 30cm, 20cm e 50cm que podem ser acomodadas em uma caixa cujas dimensões (interiores) são 2m, 3m e 5m?

ATIV. 14.2. Determine o volume e a área da superfície de uma esfera de raio igual a $\sqrt{\pi}$.

ATIV. 14.3. Em quantos por cento devemos aumentar a aresta de um cubo para que tenhamos um novo cubo com o dobro do volume do outro?

Um cone reto tem 3m de raio, 2cm de altura. Calcule seu volume, área e os raios das esferas inscritas e circunscrita.

ATIV. 14.4. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta a.

ATIV. 14.5. Demonstre que dentre os paralelepípedos retangulares de base quadrada com área total constante o de maior volume é o cubo.

ATIV. 14.6. Uma lata fechada, em forma de cilindro circular reto, tem as seguintes dimensões externas: altura h e raio r. Sabendo que sua espessura mede a, determine seu volume interno.

ATIV. 14.7. Um prisma reto de base hexagonal regular tem como altura o dobro da aresta da base. Qual a razão entre o volume deste prisma e o volume do cone circular reto nele inscrito?

ATIV. 14.8. Um cone e um cilindro, ambos circulares retos, possuem o mesmo volume e bases com mesmo raio. Supondo que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio r, determine a razão entre a altura do cone e r.

LEITURA COMPLEMENTAR

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005