AULA

15

Volume e Área de Superfície, Parte II

15.1 Introdução

Nesta última aula, que é uma sequência obteremos o volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri, e trataremos de idéias de área de superfície. Finalmente abordaremos o contéudo de sólidos de revolução.

Intuitivamente a esfera pode ser "visto"como o lugar geométrico dos pontos no espaço em que a distância destes pontos a um ponto fixo P é constante. A esfera não tem vértices nem arestas. Na seção seguinte daremos algumas definições formais e resultados envolvendo este sólido.

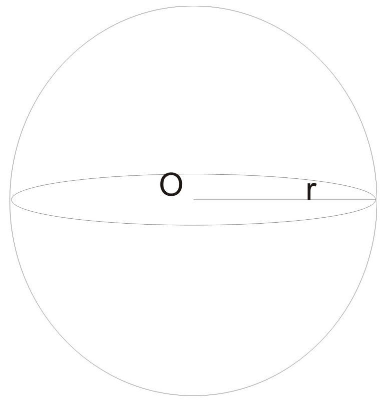
15.2 A Esfera

Definição 15.1. Sejam O um ponto e r um número real positivo. O conjunto ϵ dos pontos do espaço cuja distância a O é menor do que ou igual a r chama-se esfera de centro O e raio r.

Duas esferas são ditas concêntricas se possuem o mesmo centro.

Definição 15.2. Dados uma esfera ϵ , e um ponto P, dizemos que P e um ponto interior ou exterior de ϵ se, respectivamente, $d(P,O) < r$ ou $d(P,O) > r$. O conjunto de todos os pontos interiores de ϵ e chamado de interior de ϵ e é denotado por int(ϵ) e o dos pontos exteriores e chamado de exterior de ϵ e e denotado por ext(ϵ).

Volume e Área de Superfície, Parte II



Definição 15.3. O subconjunto de uma esfera formado pelos pontos cuja distância ao centro é igual ao raio chamaremos de superfície da esfera.

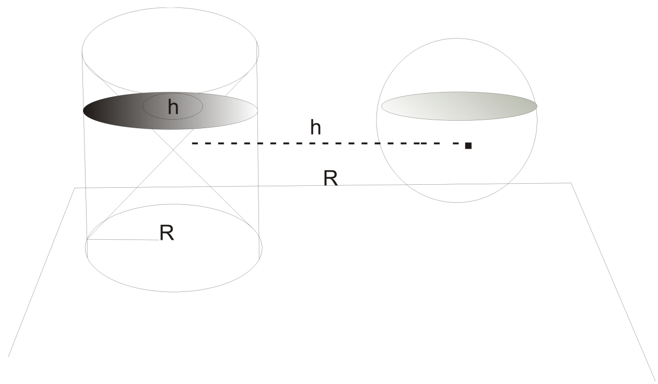
Teorema 15.1. *O volume de uma esfera ϵ de raio r vale* $V(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Demonstração

Para demonstrar este teorema utilizaremos o princípio de Cavalieri. Consideremos uma esfera ϵ e um cilindro C equilátero, ambos de raio r, em um plano horizontal, como na figura abaixo e tomemos uma seção em C que dista h do centro, no caso este é um círculo de área $\pi(r^2 - h^2)$. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido D é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro, produz uma coroa circular cujo raio externo é r e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de D. Como o volume de D é o volume do cilindro de raio r e altura 2r, tirando isto dos dois cones de raio r e altura r, obtemos:

$2r\pi r^2 - 2\frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$, portanto,

$V(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3$.



15.3 Àrea de Superfície

Nesta seção vamos demonstrar algumas fórmulas simples para o cálculo de áreas de superfícies de alguns sólidos.

Teorema 15.2. *A soma das áreas das faces laterais de um prisma reto é igual ao produto do perímetro da base pela altura.*

Demonstração
Cada face lateral é um retângulo cuja altura h é a altura do prisma e cuja base é um lado da base do prisma. Se $l_1, l_2, ..., l_k$ são os lados da base do prisma, então soma das áreas das faces laterais dele é igual a $(l_1h + l_2h + ... + l_kh)$.

Teorema 15.3. *A área da superfície lateral de um cilindro reto é igual ao produto do perímetro da base pela altura.*

Demonstração
A idéia é aproximarmos o contorno da base, que é uma curva fechada simples, por linhas poligonais fechadas cujos vértices pertençam a ele. Assim, as áreas das superfícies laterais dos prismas retos determinados por essas linhas poligonais fechadas com mesma altura do cilindro dado se aproximam da área da superfície lateral dele. Quanto mais aumentarmos o número n de lados da linha

poligonal melhor será a aproximação. Para tal fazemos n crescer, ou seja quando $n \mapsto \infty$, o perímetro da linha poligonal tenderá ao perímetro da base do cilindro e a área da superfície lateral do prisma determinado pela linha tenderá à área da superfície lateral do cilindro ,e portanto, obtemos $A = 2ph$, onde 2p é, o perímetro da linha e da base do cilindro.

Corolário 15.1. *A area da superficie lateral de um cilindro circular reto cuja altura e h e cujo raio da base e r e igual a* $2\pi rh$.

15.4 Sólidos de revolução

Consideremos em um plano a reta r que chamaremos de eixo e uma linha L que não corta r. A idéia agora é fazer L "girar"em torno deste eixo. Esta idéia é igual a quando você estudava sólidos de revolução na disciplina de cálculo I. Tomando cada ponto P de L, este percorre uma circunferência cujo o raio é a sua distância ao eixo. A união de todas essas circunferências é dado o nome de sólido de revolução.

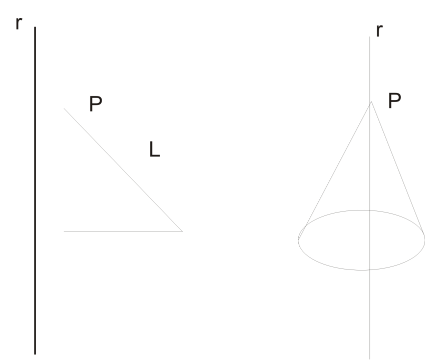


Figura 15.1: Exemplo de sólido de revolução

Agora, vamos formalizar esta idéia pelo conhecido
teorema de Pappus.

Teorema 15.4. *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Demonstração
Faremos aqui a demonstração para uma linha poligonal, pois para o caso geral será necessário cálculo integral, o que não é a proposta de um curso de matemática para o ensino médio.

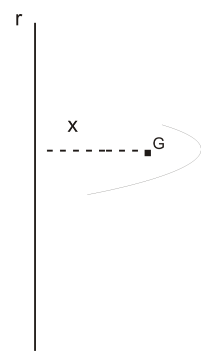


Figura 15.2: Exemplo de sólido de revolução

Se uma linha tem um comprimento L e se x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E, temos que provar que a área da superfície de revolução em torno de r vale $A = 2\pi x L$.
Seja uma linha poligonal que tem lados com comprimentos valendo $a_1, a_2, ..., a_k$ e cujos pontos médios distam $x_1, x_2, ..., x_k$ de r, respectivamente. Consideremos $L = a_1 + a_2 + ... + a_k$. Rotacionando todos os segmentos temos a superfície lateral de um tronco de cone e portanto a área da superfície gerada é:
$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + ... + 2\pi x_k a_k = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_k a_k)$, mas sendo x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E, temos
$xL = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k$, e portanto,

$A = 2\pi x L.$

15.5 Conclusão

Nesta sequência de duas aulas trabalhamos relações de área de superfície e volume em sólidos. Exibimos muitos resultados tais que suas demonstrações são costumeiramente omitidas no ensino médio. Nosso objetivo foi o de mostrar com clareza estas demonstrações e incentivar o uso destas em sua sala de aula aluno, pois acreditamos que isto aguçaria a visão espacial do aluno. Deixamos por último e não menos importante o Teorema de Pappus, que em geral é a idéia primitiva que você teve em cálculo I: encontrar o volume de sólidos por meio de rotações sob um eixo fixo. Estas noções para os seus futuros alunos será de fato muito importante, mesmo que hoje, no Brasil o ensino destes "Entes Primitivos"estejam fracassando.

RESUMO

Esfera de raio r

> Sejam O um ponto e r um número real positivo. O conjunto ϵ dos pontos do espaço cuja distância a O é menor do que ou igual a r chama-se esfera de centro O e raio r. O volume de ϵ de raio r é $V(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Teorema de Pappus

> Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.

ATIVIDADES

..

ATIV. 15.1. Um plano secante a uma esfera de raio r dista $r - a$ de seu centro. Expresse a área da superfície da calota menor determinada pelo plano, em função de a e r, bem como o volume do sólido delimitado por essa calota e o plano.

ATIV. 15.2. Suponha que o centro de uma esfera de raio r pertence a umsetor esférico determinado por dois planos que distam, respectivamente, a e b do centro. Expresse o volume do setor e área da zona esférica correspondente a esse setor em função de a, b e r.

ATIV. 15.3. Dois prismas têm mesma altura e bases regulares inscritas em círculos de raios unitários com, respectivamente, 4 e 5 arestas. Demonstre que o que tem maior volume é aquele cuja base tem 5 arestas.

ATIV. 15.4. Encontre o volume da esfera utilizando o Teorema de Pappus.

ATIV. 15.5. Encontre a área da superfície do sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo equilátero de lado 1 em torno de um eixo, que contém um vértice e é perpendicular a um lado.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

LIMA, Elon L., Matemática para o Ensino Médio, Vol.2, IMPA, Projeto Euclides, 1.ed., Rio de Janeiro, 1998.

LORIGGIO, P. Geometria Espacial, volume1, editora moderna, 1997.

Volume e Área de Superfície, Parte II

Dolce, O., Pompeo, J.N., Fundamentos de Matemática Elementar - 10: Geometria Espacial - Vol. 10, editora Atual, 2005