UNIDADE IV- GEOMETRIA ANALÍTICA I: Estudo do Ponto e da Reta

1- Situando a Temática

O ensino da geometria é de grande interesse na atualidade. A revolução da informática traz como uma de suas ferramentas mais poderosas a visualização e a manipulação precisa de imagens. Na área médica, o impacto dos diagnósticos baseados em imagens foi espetacular. Também nas engenharias, as imagens ampliaram em muito a capacidade de projetar e planejar.

O estudante do Ensino Médio, ao qual vocês terão a oportunidade de lecionar, hoje tem uma grande probabilidade de vir a trabalhar no futuro com um software que empregue as imagens como forma de comunicação com os elementos humanos envolvidos na atividade.

Neste momento, o estudo de geometria, principalmente o da geometria analítica, com conceitos como o de sistema de eixos, coordenadas e outros, pode tornar o ambiente de trabalho muito mais familiar ao estudante. Não queremos dizer aqui que o estudante irá aplicar teoremas complicados na sua atividade, mas sim que seu estudo anterior de geometria fará com que se sinta menos perdido em um ambiente organizado pela geometria.

2- Problematizando a Temática

Contemporâneo de Kepler e Galileu, René Descartes (1596-1650) unifica a aritmética, a álgebra e a geometria, e cria a geometria analítica: um método que permite representar os números de uma equação como pontos em um gráfico, as equações algébricas como formas geométricas e as formas geométricas como equações.

Descartes prova que é possível determinar uma posição em uma curva usando apenas um par de números e duas linhas de referência que se cruzam perpendicularmente: um dos números indica a distância vertical e, o outro, a distância horizontal. Esse tipo de gráfico representa os números como pontos e as equações algébricas como uma seqüência de pontos. Ao fazer isso, descobre que as equações de 2º grau transformam-se em linhas retas ou nas curvas cônicas, demonstradas por Apolônio 19 séculos antes: $x^2 - y^2 = 0$ forma duas linhas cruzadas, $x^2 + y^2 = 4$ forma um círculo, $x^2 - y^2 = 4$ forma uma hipérbole; $x^2 + 2y^2 = 4$, uma elipse; e $x^2 = 4y$, uma parábola. As equações de grau maior ou igual a 3 dão origem a curvas em forma de corações, pétalas, espiras e outras. Atualmente, as linhas que se cruzam são chamados de eixos cartesianos. A linha vertical é o eixo dos y (ordenada) e a linha horizontal é o eixo dos x (abscissa).

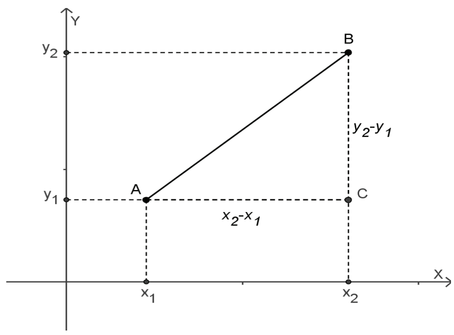
3- Conhecendo a Temática

Na disciplina Matemática para o Ensino Básico II, você teve a oportunidade de conhecer e trabalhar com o sistema cartesiano de coordenadas. Desse modo as figuras podem se representadas através de pares ordenados, equações ou inequações.

3.1- Cálculo da Distância entre Dois Pontos

Dados dois pontos quaisquer $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$, iremos estabelecer uma expressão que indique a distância entre A e B.

Observe o triângulo ABC representado abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$\left[d(A,B)\right]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

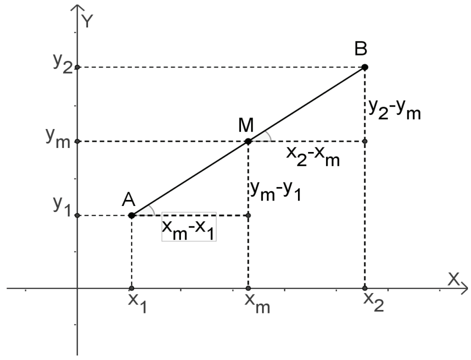
Portanto, dados dois pontos $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$, a distância entre eles é dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3.2- Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento de Reta

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, vamos determinar as coordenadas de M, ponto médio de $\overline{AB}$.

Observe que, pela figura abaixo temos $AM = MB$ e assim $\dfrac{AM}{MB}=1$.



Assim:

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m \Rightarrow x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$$

e .

$$y_m - y_1 = y_2 - y_m \Rightarrow y_m = \frac{y_1+y_2}{2}$$

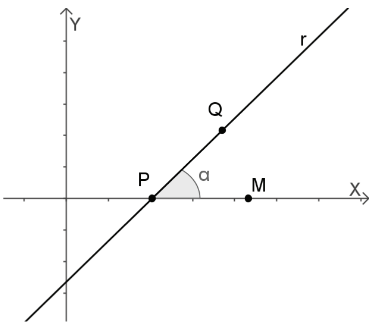
Portanto, as coordenadas do ponto médio são dadas por $M=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

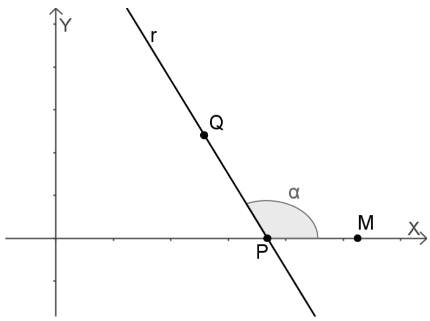
3.3- Equação da Reta

3.3.1 – Inclinação e Coeficiente Angular da Reta

Sabemos que, dados dois pontos distintos A e B de uma reta, podemos representá-la no plano cartesiano. No entanto, existe outra forma de determinar uma reta: basta ter um ponto P da reta e o ângulo α, que a reta forma com o eixo 0x, medido no sentido anti-horário.

Definição: Seja r uma reta do plano cartesiano ortogonal concorrente com o eixo 0x no ponto $P=(x_0,0)$ e que passa pelo ponto $Q=(x_q,y_q)$, com $y_q>0$. Seja $M(x_m,0)$, com $x_m > x_p$:





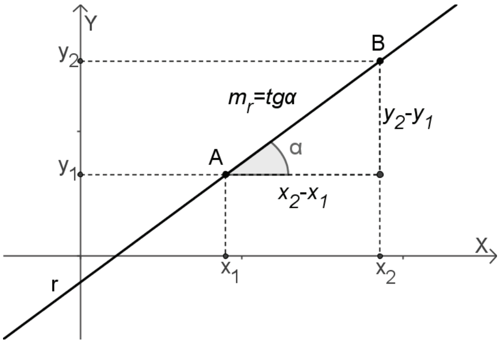
Chama-se inclinação da reta r a medida α, com $0° \le \alpha < 180°$, do ângulo MPQ orientado a partir do lado $\overline{PM}$ no sentido anti-horário.

Definição: Chama-se coeficiente angular de uma reta r de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$, o número real m_r tal que $m_r = tg\alpha$.

> **Observação:** Retas verticais não possuem coeficiente angular, pois não existe $tg90°$.

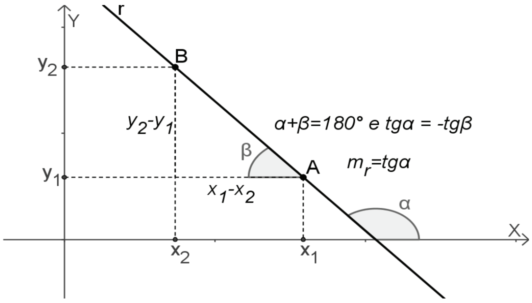
Consideremos dois pontos distintos de $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ em uma reta r, de inclinação α. Desta forma temos os seguintes casos:

I) $\alpha < 90°$



Temos que $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e mais, como $0° \le \alpha \le 90°$ então $m_r > 0$.

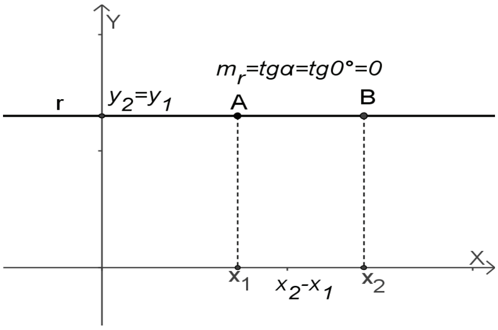
II) $\alpha > 90°$



Note que $\alpha + \beta = 180°$, ou seja, α e β são suplementares e assim $tg\alpha = -tg\beta$. Como $tg\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, então

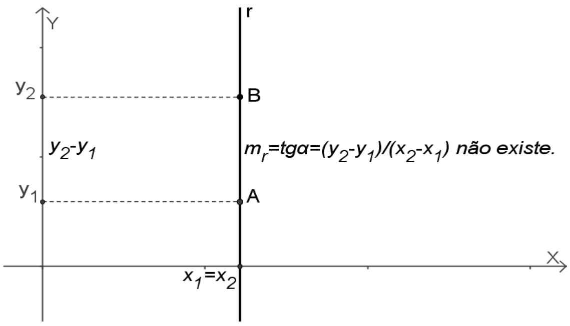
$$m_r = tg\alpha = -\frac{(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$, onde $m_r < 0$, pois $\alpha > 90°$.

III) $\alpha = 0°$



Note que $m_r = tg\alpha = tg0° = 0$. Como $y_1 = y_2$ e $x_1 \neq x_2$, então $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0 = tg\alpha$, e assim, podemos dizer que neste caso também vale a relação $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

IV) $\alpha = 90°$



Sabemos que $tg90°$ não existe, ou seja, a reta r não possui coeficiente angular.

Portanto dado dois pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ de uma reta, teremos $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, com $\alpha \neq 90°$.

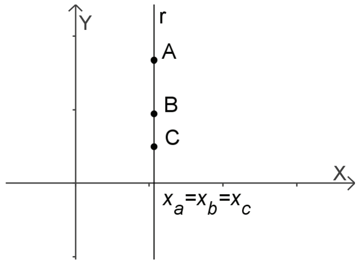
Teorema 1: Três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e C=(x_3, y_3) são colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Demonstração:

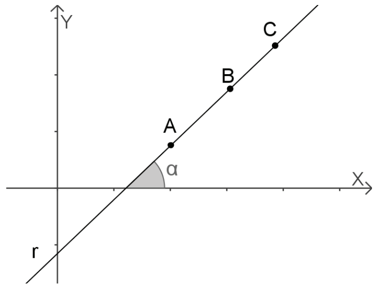
Primeiramente iremos mostrar que:

A,B,C são colineares $\Rightarrow$ $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existir m_{AB} e m_{BC}.

Observe, pela figura abaixo, que se A, B e C pertencem a uma única reta vertical, então $x_1 = x_2 = x_3$ e assim $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $m_{BC} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ não existem.



Se A, B e C pertencem a uma reta não vertical com inclinação $\alpha\left(\alpha \neq 90°\right)$, então $m_{AB} = tg\alpha$ e $m_{BC} = tg\alpha$, isto é, $m_{AB} = m_{BC}$ como mostra a figura abaixo.



Mostraremos agora a recíproca, ou seja:

$m_{AB} = m_{BC}$ ou não existir m_{AB} e m_{BC} $\Rightarrow A, B, C$ são colineares.

Se $m_{AB} = m_{BC}$, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, as quais possuem o ponto B em comum e, portanto, os pontos A, B e C são colineares.

Se m_{AB} e m_{BC} não existem, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são verticais e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm o ponto B em comum, então são coincidentes e assim A, B e C são colineares.

Exercício 1: Verifique se os pontos $A = (1,6), B = (-2,-6)$ e $C = (3,14)$ são colineares.

Solução:

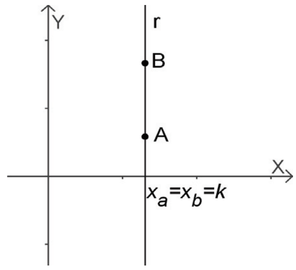
Devemos calcular m_{AB} e m_{BC}. Temos que $m_{AB} = \dfrac{-6-6}{-2-1} = 4$ e $m_{BC} = \dfrac{14+6}{3+2} = 4$. Como $m_{AB} = m_{BC}$ então os pontos A, B e C estão alinhados.

3.3.2 – Equação Fundamental, Equação Reduzida e Equação Geral da Reta

Sabemos que dois pontos distintos A e B determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos A e B, existe uma única reta que passa pelos dois pontos e mais $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se $x_2 \neq x_1$.

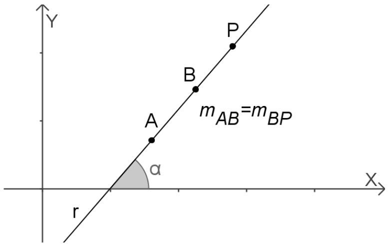
Vamos agora determinar a equação da reta que passa pelos pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Temos que considerar duas situações:

I) $x_1 = x_2 = k$, ou seja, a reta que passa por A e B é uma reta vertical.



Portanto a reta r é a reta formada pelos pontos (k, y), ou seja, os pontos de abscissa $x = k$. Neste caso, a equação da reta é $r : x = k$.

II) $x_2 \neq x_1$, ou seja, a reta r que passa pelos pontos A e B não é uma reta vertical.



Considerando $P=(x,y)$ um ponto genérico dessa reta, temos que $m_{AB}=m_{BP}$, pois os pontos *A, B* e *P* estão alinhados. Assim, como $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $m_{BP}=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

então $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow \boxed{y-y_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)}$.

Portanto a equação da reta que passa pelos pontos distintos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ é dado por $y-y_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$, ou $y-y_2=m_r(x-x_2)$ onde $m_r=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ é coeficiente angular da reta. Essa equação é denominada **Equação Fundamental** da reta.

Observação:

I) Se escolhermos o ponto particular $(0,n)$ em que a reta intercepta o eixo y, pela equação anterior teremos: $y-n=m_r(x-0)\Rightarrow y=mx+n$

A equação $y=m_r x+n$ é denominada **Equação Reduzida** da reta *r* onde *n* é chamado coeficiente linear.

II) Caso a reta *r* seja horizontal então $m_r=tg0°=0$ e assim teremos $y-y_p=0(x-x_p)$, ou seja, a equação reduzida da reta horizontal *r* que passa pelo ponto $P(x_p,y_p)$ é dada por $y=y_p$.

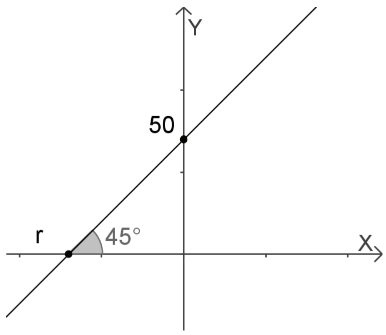
III) Podemos ainda representar uma reta *r* através da equação *ax + by + c = 0*, oriunda da equação fundamental $y-y_p=m_r(x-x_p)$. A equação *ax + by + c = 0* é denominada **Equação Geral** da reta *r*.

Exercício 2*:* Determinar as equações da reta *r* que passa pelo ponto $P=(4,-3)$ e tem coeficiente angular $m=-2$.

Solução:

Sabemos que a equação fundamental da reta *r* é dada por: $y-y_p=m(x-x_p)$ e assim $y-(-3)=-2(x-4)\Rightarrow y=-2x+5$ (equação reduzida) ou $2x+y-5=0$ (equação geral).

Exercício 3: Determinar a equação da reta *r* cujo gráfico está representado abaixo:



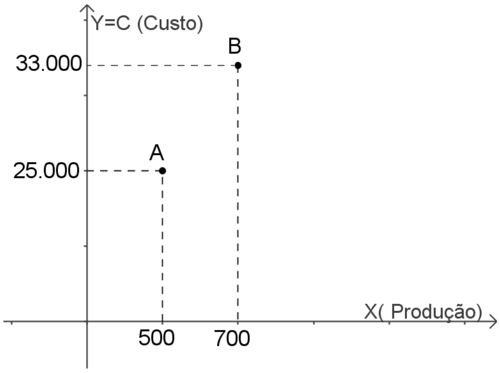
Solução: Observe que a reta *r* passa pelo ponto $P=(0,50)$ e possui coeficiente angular $m_r=tg45°=1$.

Logo $y-50=1(x-0)\Rightarrow y=x+50$ ou $x-y+50=0$. Portanto a reta *r* tem como equação geral $x-y+50=0$ e $y=x+50$ é sua equação reduzida.

Exercício 4: Um gerente de uma loja de bolsas verificou que quando se produzia 500 bolsas por mês, o custo mensal da empresa era R$ 25.000,00 e quando se produzia 700 bolsas o custo era R$ 33.000,00. Sabe-se que cada bolsa é vendida por R$ 52,50.

a) Admitindo que o gráfico do custo mensal (C) em função do número x de bolsas produzido por mês, seja formado por pontos de uma reta, obtenha C em função de x.
b) Seja R a receita mensal obtida pela venda de x unidades produzidas. Obtenha R em função de x.
c) Represente graficamente, num mesmo plano cartesiano, o custo e a receita mensal desta loja de bolsas.

Solução: a) Graficamente temos a seguinte situação:



Como o custo mensal (C) é formado por uma reta que passa por A e B então

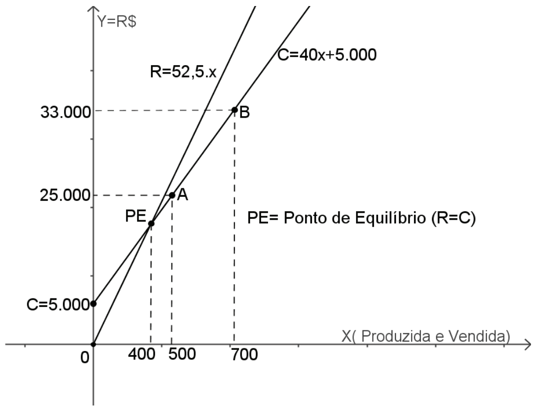
$$m_r = \frac{33.000 - 25.000}{700 - 500} = \frac{8000}{200} = 40.$$

Assim a equação da reta é dada por: $y - 25000 = 40\left(x - 500\right) \Rightarrow y = 40x + 5000$.

Portanto temos $C = 40x + 5000$ onde C é o custo mensal e x é a quantidade produzida.

b) A receita (R) pela venda de uma determinada mercadoria nada mais é do que o produto do preço de venda pela quantidade vendida, ou seja, $R = p.q$. Como o preço de venda é de R$ 52,50 a unidade e x representa a quantidade vendida, então $R = 52,50.x$.

c) Os gráficos das retas $C = 40x + 5000$ e $R = 52,50.x$ estão representado abaixo:



Observe que as retas $C = 40x + 5000$ e $R = 52,5.x$ estão representadas apenas no 1° quadrante, pois o valor de x que representa a produção e a venda é sempre maior ou igual a zero $\left(x \geq 0\right)$.

Logo, se a produção for de zero unidade, a empresa terá um custo de R$ 5.000,00, que, em Economia, é denominado custo fixo, devido ao fato de que existem custos fixos que não dependem da produção como, por exemplo, aluguel, folha de pagamento entre outras.

Ampliando o seu conhecimento...

O ponto de intersecção entre a Receita (R) e o Custo(C) e é denominado, em Economia, como Ponto de Equilíbrio (PE). Para determinar esse ponto, basta resolver a equação R = C que neste caso encontraremos x = 400 unidades. Este ponto de equilíbrio significa que o lucro obtido pela produção e venda de 400 unidades é zero. Observe, pelo gráfico acima, que se x > 400 a empresa obterá lucro e, caso x < 400, a empresa terá prejuízo.

3.3.2.1-Equações Paramétricas da Reta

Vimos que a equação de uma reta pode ser apresentada nas formas: geral, reduzida ou fundamental. Por exemplo, a equação geral $2x + 4y + 4 = 0$ representa uma reta r.

Observe que se $x = t + 2$, onde $t \in \mathbf{R}$, então $2(t+2) + 4y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t - 2$.

Desta forma, a reta r pode ser representada pelas equações

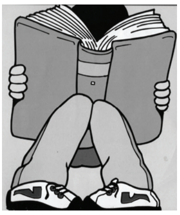
$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\dfrac{t}{2} - 2 \end{cases} \quad t \in R$$

denominadas **Equações Paramétricas** da reta.

Generalizando, podemos apresentar as coordenadas de cada ponto $P = (x, y)$ de uma reta r em função de um parâmetro t.

$$r: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são expressões do 1° grau. Estas são as **equações paramétricas** da reta r.



Ampliando o seu conhecimento...

Quando as equações paramétricas são usadas em situações práticas, como na física, química, economia etc., o parâmetro t pode representar qualquer grandeza como tempo, temperatura, pressão, preço etc.

Exercício 5: Um ponto $P = (x, y)$ descreve uma trajetória no plano cartesiano, tendo sua posição a cada instante t $(t \geq 0)$ dada pelas equações $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$. Determine a distância percorrida pelo ponto $P = (x, y)$ para $0 \leq t \leq 3$.

Solução: Para $t = 0$ temos $x = 2 \cdot 0 = 0$ e $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$ e assim obtemos o ponto da reta $P_1 = (0, 2)$. Analogamente quando $t = 3$, teremos $x = 2 \cdot 3 = 6$ e $y = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ e obtemos outro ponto da reta r, $P_2 = (6, 7)$.

Desta forma, iremos calcular a distância percorrida pelo ponto $P(x, y)$ (para $0 \leq t \leq 3$) do ponto inicial $P_1 = (0, -2)$ $(t = 0)$ ao ponto final $P_2 = (6, 7)$ $(t = 3)$.

Logo $d(P_1, P_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$. Portanto a distância percorrida pelo ponto $P = (x, y)$ para $0 \leq t \leq 3$ é $3\sqrt{13}$ u.c.

Observação:

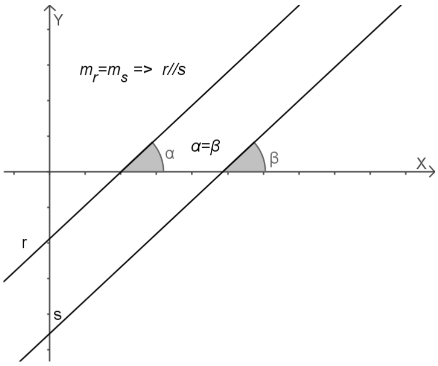
Como $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$, podemos determinar a equação geral da reta da fazendo $t = \dfrac{x}{2}$ e assim, $y = \dfrac{3x}{2} - 2 \Rightarrow \dfrac{3}{2}x - y - 2 = 0$ ou, equivalentemente, $3x - 2y - 4 = 0$.

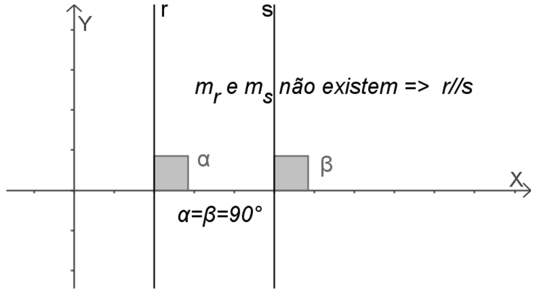
No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo este conteúdo. Acesse e participe!

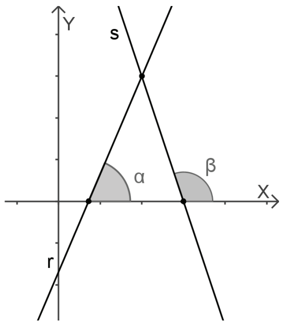
3.4 – Posição Relativa de Duas Retas

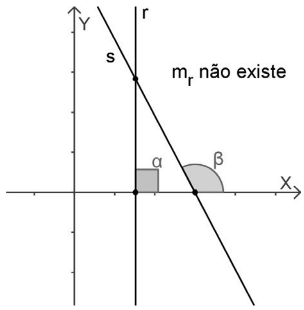
Duas retas r e s contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes. Desta forma, note que duas retas r e s são paralelas se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular $(m_r = m_s)$, ou não existem m_r e m_s.



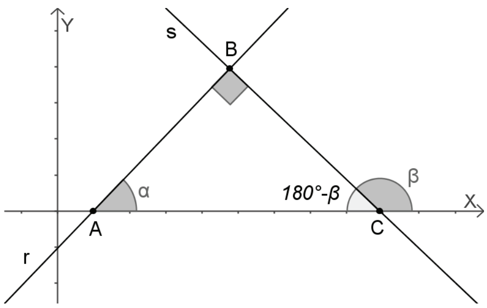


Conseqüentemente, duas retas são concorrentes se $m_r \neq m_s$ ou somente um dos coeficientes m_r ou m_s, não existe.





Considere agora duas retas *r* e *s* perpendiculares.



Sabemos que $m_r = tg\alpha$ e $m_s = tg\beta$, e mais, que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é180° e assim $\beta = 90° + \alpha$.

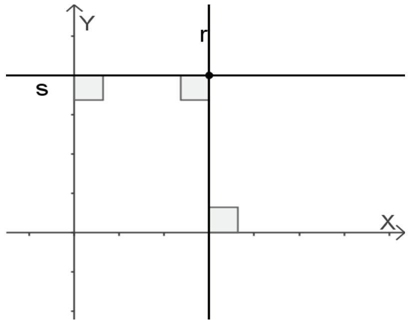
Desta forma, $tg\beta = tg\left(90° + \alpha\right) = \dfrac{sen\left(90° + \alpha\right)}{\cos\left(90° + \alpha\right)}$.

Da trigonometria, temos que $sen\left(90° + \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(90° + \alpha\right) = -sen\alpha$ e $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$, assim:

$tg\beta = \dfrac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = -\cot g\alpha = -\dfrac{1}{tg\alpha}$, ou seja, $m_s = -\dfrac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r.m_s = -1$.

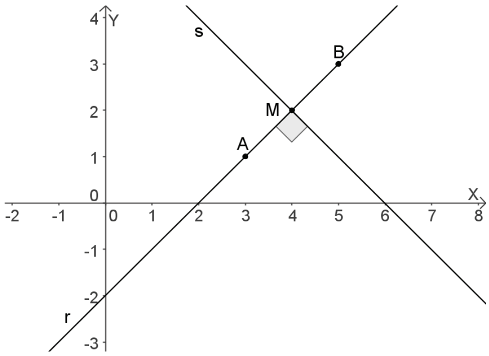
Portanto, duas retas, nenhuma delas vertical, são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas for oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja, $m_s = -\dfrac{1}{m_r}$.

Note que, sendo *r* uma reta vertical, uma reta *s* é perpendicular a *r* se, e somente se, *s* é horizontal (m_s = 0).



Exercício 6: Qual é a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, dados $A=(3,1)$ e $B=(5,3)$?

Solução: A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$ e é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$.



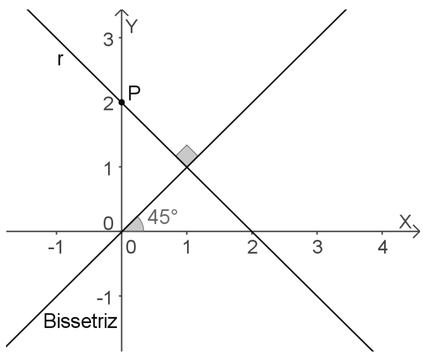
Temos que $M=\left(\dfrac{3+5}{2},\dfrac{1+3}{2}\right)=(4,2)$, $m_{AB}=\dfrac{3-1}{5-3}=\dfrac{2}{2}=1$ e que $m_s=-\dfrac{1}{m_{AB}}=-1$.

Pela equação fundamental da reta, $y-y_M=m_s\left(x-x_M\right)$ e assim $y-2=-1(x-4)$.

Portanto, a equação reduzida da mediatriz é $s: y=-x+6$.

Exercício 7: A reta *r* perpendicular à bissetriz dos quadrantes impares (1º e 3º) e intercepta um eixo coordenado no ponto $P=(0,2)$. Escreva a equação geral da reta *r*.

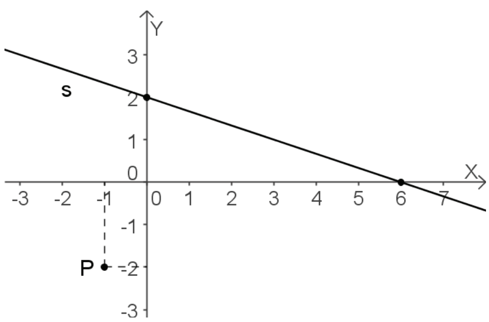
Solução: Observe a ilustração gráfica abaixo.



Para encontrar a equação geral da reta ***r*** precisamos do coeficiente angular m_r e do ponto da reta $P=(0,2)$. Como ***r*** é perpendicular a s então $m_r=-\dfrac{1}{m_s}$. Pelo gráfico acima $m_s=tg45°=1$ e assim $m_r=-1$.

A equação fundamental é dada por $y-y_p=m_r\left(x-x_p\right)$. Logo $r: y-2=-1(x-0)$ e, portanto a equação geral da reta r é $x+y-2=0$.

Exercício 8: Determine a equação reduzida da reta *r* que passa pelo ponto $P=(-1,-2)$ e é perpendicular á reta *s* representada no gráfico abaixo.

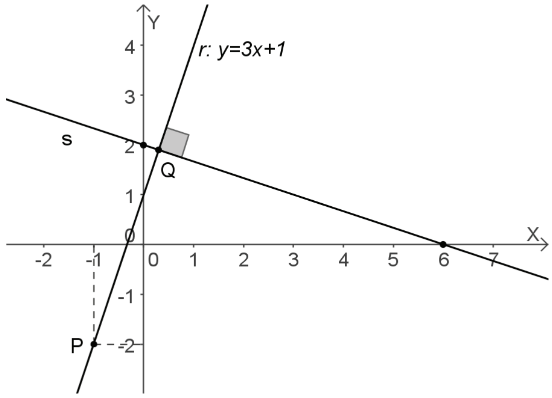


Solução:

Para determinar a equação da reta que passa por $P=(-1,-2)$ e que é perpendicular à reta s precisamos determinar m_r, dado por $m_r=-\dfrac{1}{m_s}$. Como a reta s passa pelos pontos $A=(6,0)$ e $B=(0,2)$, então $m_s=\dfrac{2-0}{0-6}=\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$.

Assim $m_r=-\dfrac{1}{(-1/3)}=3$. Desta forma pela equação fundamental da reta teremos:

$r: y-(-2)=3(x-(-1)) \Rightarrow r: \boxed{y=3x+1}$ que é a equação reduzida da reta (ver figura abaixo).



Caso você queira determinar o ponto Q, que é a intersecção entre as retas r e s, procederemos da seguinte forma.

Primeiramente, precisamos da equação da reta s. Como s passa pelo ponto $A=(6,0)$ e $m_s=-\dfrac{1}{3}$ então $s: y-0=-\dfrac{1}{3}(x-6)\Rightarrow s: \boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+2}$.

Assim, como $Q\in r$ e $Q\in s$ então o ponto Q será a solução do sistema:

$$\begin{cases} y=3x+1 & \text{(reta } r\text{)} \\ y=-\dfrac{1}{3}x+2 & \text{(reta } s\text{)} \end{cases}.$$

Teremos $3x+1=-\dfrac{1}{3}x+2\Rightarrow x=\dfrac{3}{10}$ e conseqüentemente $y=\dfrac{19}{10}$.

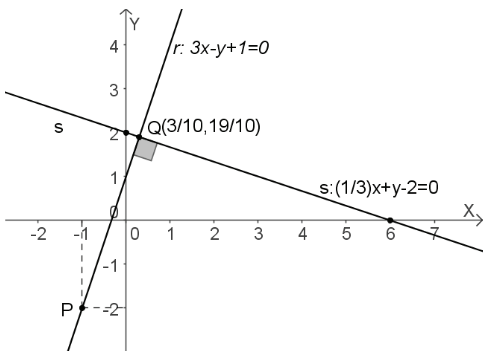
Portanto o ponto de interseção das retas r e s é o ponto $Q=\left(\dfrac{3}{10},\dfrac{19}{10}\right)$.

3.5 – Estudo Complementar da Reta

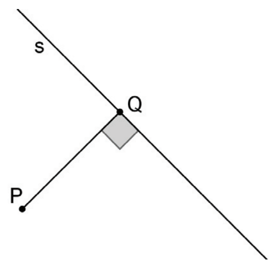
3.5.1 – Distância Entre Ponto e Reta

A distância entre um ponto P a uma reta r é a distância entre P e Q, onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r.

Por exemplo, no exercício 8 encontramos a equação da reta r que passa pelo ponto $P=(-1,-2)$ e é perpendicular à reta $s:\dfrac{1}{3}x+y-2=0$.



O ponto $Q=\left(\dfrac{3}{10},\dfrac{19}{10}\right)$ é a intersecção das retas r e s, e o segmento $\overline{PQ}$ é a projeção ortogonal de P sobre a reta s.



Vamos calcular a distância do ponto $P=(-1,-2)$ ao ponto $Q=\left(\dfrac{3}{10},\dfrac{19}{10}\right)$.

Neste caso, temos $d(P,Q)=\sqrt{\left(\dfrac{3}{10}-(-1)\right)^2+\left(\dfrac{19}{10}-(-2)\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{13}{10}\right)^2+\left(\dfrac{39}{10}\right)^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{169}{100}+\dfrac{1521}{100}}=\sqrt{\dfrac{1690}{100}}=\dfrac{13}{\sqrt{10}}=\dfrac{13\sqrt{10}}{10}$.

Portanto a distância entre o ponto $P=(-1,-2)$ e a reta $s:\dfrac{1}{3}x+y-2=0$ é $d(P,s)=\dfrac{13\sqrt{10}}{10}$ u. c.

Generalizando o raciocínio utilizado no exercício 8, obtemos o resultado descrito pelo teorema a seguir.

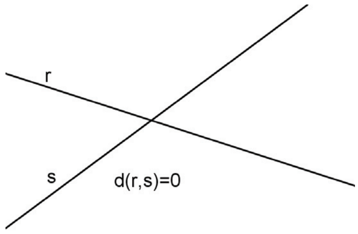
Teorema 2: A distância d entre um ponto $P=(x_0,y_0)$ e uma reta $r: ax+by+c=0$ é dada por: $d=d(P,r)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

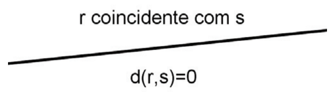
Devido à extensão, não apresentaremos a demonstração deste teorema. No entanto, na disciplina de Cálculo Vetorial você encontrará este teorema com uma demonstração bastante simples.

Exercício 9: Calcular a distância entre as retas $r: 2x+y+4=0$ e $s: 4x+2y-6=0$.

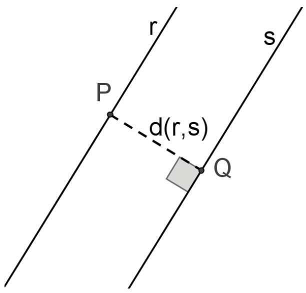
Solução:

Primeiramente vamos verificar a posição relativa entre as retas pois, caso as retas sejam concorrentes ou coincidentes, a distância entre elas será zero.





Caso as retas r e s sejam paralelas, vamos calcular a distância entre elas tomando um ponto P qualquer de uma delas e calculamos a distância do ponto P a outra reta.



Pelas equações das retas r e s dadas, encontramos $m_r=-2=m_s$, pois $r: y=-2x-4$ e $s: y=-2x+3$, e assim r // s.

Fazendo $x=1$ na equação da reta r encontraremos $y=-6$, ou seja, o ponto $P=(1,-6)$ pertence a reta r.

Como $d(P,s)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, onde $P=(1,-6)$ e $s: 4x+2y-6=0$, então

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|4.1+2.(-6)-6|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, a distância d entre r e s é $d=d(r,s)=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Faremos algumas aplicações da teoria dos determinantes na geometria analítica. Tal teoria vai nos ajudar no cálculo de áreas de polígonos bem como estabelecer uma condição para o alinhamento de três pontos. Acesse a Plataforma Moodle para encontrar diversos problemas envolvendo este conteúdo.

3.5.2 – Condição de Alinhamento de Três Pontos

Considere três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e C=(x_3,y_3).

A equação da reta r que passa pelos pontos $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ é dada por:

$r: y-y_2=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$. E assim:

$$(x_c-x_b)(y-y_b)=(y_c-y_b)(x-x_b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3.y-x_3.y_2-x_2.y+\cancel{x_2.y_2}-y_3.x+y_3.x_2+y_2.x-\cancel{y_2.x_2}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_2-y_3).x+(x_3-x_2).y+(x_2y_3-x_3y_2)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0.$$

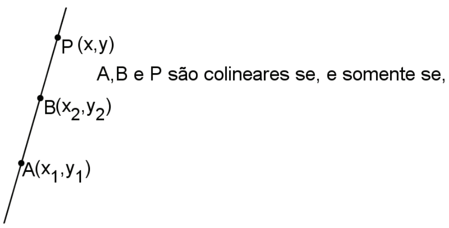
Se os pontos *A, B* e *C* estiverem alinhados então o ponto $A=(x_1,y_1)$ pertence à reta r e, desta forma, satisfaz à equação $(y_2-y_3).x+(x_3-x_2).y+(x_2y_3-x_3y_2)=0$, que nada mais é do que

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}=0.$$

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3: Três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ são colineares se, e somente se,

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}=0.$$



$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{bmatrix}=0\cdot$$

Como conseqüência do teorema acima, podemos encontrar a **equação geral** de uma reta que passa pelos pontos distintos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$.

Se $P=(x,y)$ é um ponto genérico da reta r que passa por A e B. Então *P, A* e *B* são colineares e assim pelo teorema 3 temos: $\det\begin{bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{bmatrix}=0$.

Calculando o determinante acima obtemos $\underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0$ que representa a **equação geral** da reta r.

3.5.3- Área de um Triângulo

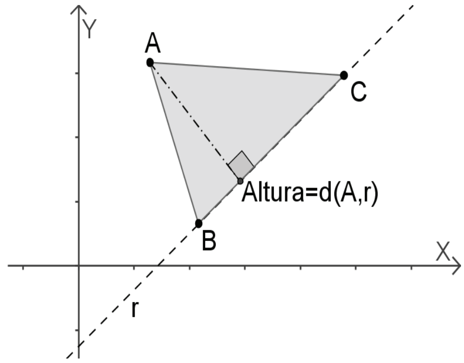
Veremos um teorema a seguir, o qual nos ajudará a determinar a área de qualquer triângulo *ABC*.

Teorema 4: A área de um triângulo cujos vértices são $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ é dada por:

$$A=\frac{|D|}{2}, \text{ onde } D=\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Observe a figura ao lado:



Note que a área do triângulo ABC é dada por $A_\Delta = \dfrac{d(B,C).d(A,r)}{2}$, onde $d(B,C)$ é a distância entre os pontos B e C e $d(A,r)$ é a distância do ponto A à reta r que passa pelos pontos B e C.

Temos que, $d(B,C)=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$, e que a equação geral da reta r, que passa por B e C, é dada por:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow r: \underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0 .$$

Calculando a distância entre o ponto $A=(x_1,y_1)$ e a reta r pelo teorema 2, encontramos:

$$d(A,r)=\frac{\left|\overbrace{(y_2-y_3)x_1+(x_3-x_2)y_1+(x_2y_3-x_3y_2)}^{D}\right|}{\underbrace{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}_{d(B,C)}} .$$

Como já vimos, $(y_2-y_3).x_1+(x_3-x_2).y_1+(x_2y_3-x_3y_2)=\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}=D$ e que

$d(B,C)=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$, então $A_\Delta=\dfrac{1}{2}d(B,C).d(A,r)=\dfrac{1}{2}\cancel{d(B,C)}.\dfrac{|D|}{\cancel{d(B,C)}}$.

Portanto a área de um triângulo cujos vértices são A, B e C é $A_\Delta=\dfrac{|D|}{2}$.

4 – Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade fizemos o estudo do ponto e da reta. Amplie sua visão sobre o assunto desta unidade visitando sempre o Moodle e pesquisando na bibliografia sugerida. Os assuntos aqui são tratados de forma sucinta. Cabe a você procurar expandir seu conhecimento sempre resolvendo os exercícios deixados na plataforma e tirando suas dúvidas com os professores tutores. Lembre-se: estamos sempre ao seu lado.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª** ed. São Paulo: Ática. Vol. 3. 2000.

2. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna. Vol. 3. 2002.

3. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

4. GENTIL, Nelson S. **Matemática para o 2º grau.** Vol. 3. Ática, 7ª ed. São Paulo: 1998.

Unidade V – Geometria Analítica II: Estudo das Cônicas

1 – Situando a Temática

As cônicas foram de fundamental importância para o desenvolvimento da astronomia, sendo descritos na antiguidade por Apolônio de Perga, um geômetra grego. Mais tarde, Kepler e Galileu mostraram que essas curvas ocorrem em fenômenos naturais como nas trajetórias de um projétil ou de um planeta.

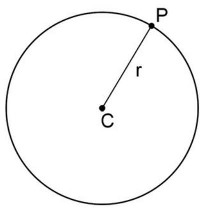
2 – Problematizando a Temática

Vimos nas seções anteriores, por exemplo, que a equação $-2x+5y+8=0$ representa uma reta *r* no plano cartesiano. Do mesmo modo como fizemos com a reta *r*, vamos aqui associar a cada cônica (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) uma equação e, a partir daí, estudar as suas propriedades.

3 – Conhecendo a Temática

3.1 – Circunferência

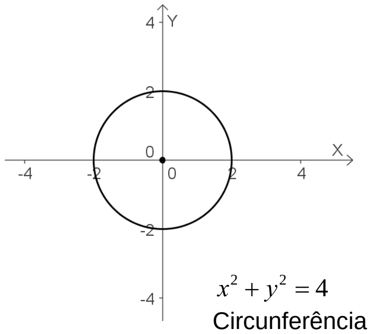
Sabemos da geometria elementar que circunferência é o conjunto de todos os pontos eqüidistantes de um ponto fixo $C=(a,b)$ denominado centro da circunferência.



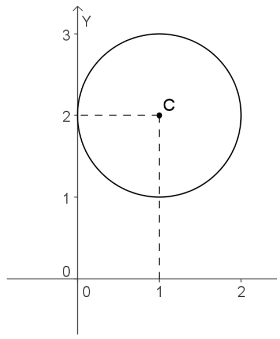
Considerando o centro da circunferência como sendo o ponto $C=(a,b)$, *r* sendo o raio e $P=(x,y)$ um ponto da circunferência, temos:

$$d(C,P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Portanto, uma circunferência de centro $C=(a,b)$ e raio *r* tem equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, denominada **Equação Reduzida** da circunferência.



$x^2+y^2=4$
Circunferência de centro C=(0,0) e raio 2.



$(x-1)^2+(y-2)^2=1$
Circunferência de centro C=(1,2) e raio 1.

Desenvolvendo a equação reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ temos: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$. Esta equação é chamada **equação geral** da circunferência.

Exercício 1: Determine o centro e o raio da circunferência $x^2+y^2-4x-8y+19=0$.

Solução:

Da equação geral $x^2+y^2-4x-8y+19=0$, vamos encontrar a equação reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Vamos utilizar um processo conhecido como completamento de quadrados. Para isso, lembramos que $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ e $y^2-2bx+b^2=(y-b)^2$.

Com base na equação $x^2+y^2-4x-8y+19=0$ separamos os termos que envolvam as variáveis *x* e *y*, da seguinte forma:

I) $x^2 \underbrace{-4}_{\substack{2a=4\\ a=2\\ a^2=4}} x = \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2} - 4 = (x-2)^2 - 4$ e II) $y^2 \underbrace{-8}_{\substack{2b=8\\ b=4\\ b^2=16}} y = \underbrace{y^2-8y+16}_{(y-4)^2} - 16 = (y-4)^2 - 16$

Desta maneira, de (I) e (II) temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 19 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 + 19 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$

Logo, a equação $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$ representa uma circunferência de centro $C = (2,4)$ e raio 1.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo completamento de quadrado. Aproveite para exercitar já que trabalharemos essa ferramenta com bastante freqüência.

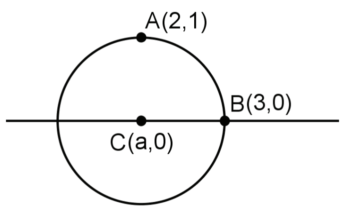
Exercício 2: Determine a equação da circunferência que passa pela origem e tem centro no ponto $C = (3,4)$.

Solução: A equação da circunferência é $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Como esta circunferência tem centro no ponto $C = (3,4)$ então $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$. A origem (0,0) é um ponto da circunferência e assim podemos escrever:

$$(0-3)^2 + (0-4)^2 = r^2 \Rightarrow 9 + 16 = r^2 \Rightarrow \boxed{r^2 = 25}.$$

Portanto, $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ é a equação da circunferência pedida.

Exercício 3: A circunferência representada no gráfico abaixo passa pelos pontos A e B. Determine sua equação reduzida.



Solução:

A equação reduzida da circunferência de centro $C = (a,0)$ é $(x-a)^2 + (y-0)^2 = r^2$. Como $A = (2,1)$ e $B = (3,0)$ pertencem à circunferência, temos:

$$(I)\ (2-a)^2 + 1^2 = r^2 \qquad (II)\ (3-a)^2 + 0 = r^2$$

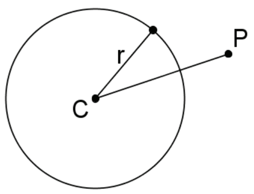
De (I) e (II) temos $(2-a)^2 + 1 = (3-a)^2$, ou seja, $4 - 4a + \cancel{a^2} + 1 = 9 - 6a + \cancel{a^2}$ e, portanto $a = 2$. Desta forma, a equação reduzida da circunferência é $(x-2)^2 + y^2 = r^2$.

Vamos determinar o valor de r^2. Para isso lembramos que o ponto $B = (3,0)$ pertence à circunferência, assim: $(3-2)^2 + 0^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{1 = r^2}$.

Portanto $(x-2)^2 + y^2 = 1$ é a equação reduzida da circunferência pedida.

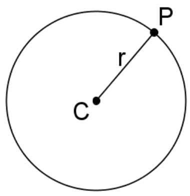
3.1.2 – Posição de um Ponto em Relação a uma Circunferência

Em relação à circunferência $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, um ponto $P = (m,n)$ pode ocupar as seguintes posições:



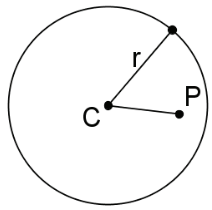
P é exterior à circunferência se, e somente se, $d(P,c) > r$, ou seja, $(m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$.

(Figura 1)



P pertence à circunferência se, e somente se, $d(P,c) = r$, ou seja, $(m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$.

(Figura 2)



P é interior à circunferência se, e somente se, $d(P,c) < r$, ou seja, $(m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$.

(Figura 3)

Assim para determinar a posição de um ponto $P = (m,n)$ em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas desse ponto na expressão $(x-a)^2 + (y-b)^2$ e observar que:

1º caso: Se $(m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$, P é exterior à circunferência (Figura 1);

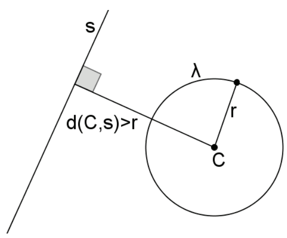
2º caso: Se $(m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$, P pertence à circunferência (Figura 2);

3º caso: Se $(m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$, P é interior à circunferência (Figura 3).

3.1.3 – Posições Relativas entre Reta e Circunferência

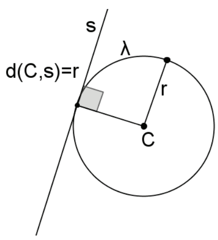
Analogamente, como fizemos na seção anterior, dado uma reta $s: Ax + By + D = 0$ e uma circunferência $\lambda : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ temos três posições relativas possíveis da reta s e a circunferência.

Caso 1: s é exterior a circunferência $(s \cap \lambda = \varnothing)$;



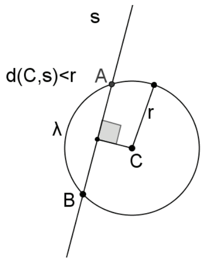
Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é maior do que o raio r.

Caso 2: s é tangente à circunferência $(s \cap \lambda = P(x_0, y_0))$;



Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é igual ao raio **r.**

Caso 3: s é secante à circunferência $\left(s \cap \lambda = \{A, B\}\right)$.



Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é menor do que o raio r.

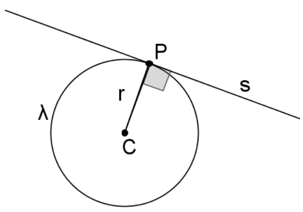
Sabemos que a distância entre um ponto $C = (a,b)$ e uma reta $s: Ax + By + D = 0$ é dada por $d(C,s) = \dfrac{|Aa + Bb + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, e assim basta calcular o valor de $d(C,s)$ e verificar qual dos casos acima teremos. Veja o exercício abaixo.

Exercício 4: Qual é a posição da reta $s: 3x + y - 19 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$. Caso a reta intercepte a circunferência, encontre os referidos pontos de intersecção.

Solução: Primeiramente vamos determinar a posição da reta s em relação à circunferência. Para isso vamos calcular a distância do centro $C = (2,3)$ da circunferência à reta $s: 3x + y - 19 = 0$.

Logo, $d(C,s) = \dfrac{|3.2 + 1.3 - 19|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{|-10|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$.

Como $d(C,s) = r, \left(r = \sqrt{10}\right)$ então a reta s é tangente à circunferência λ.



Iremos agora determinar o ponto $P = (x_0, y_0)$ que é intersecção entre a reta $s: 3x + y - 19 = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Observe que $P \in s$ e $P \in \lambda$ e assim o ponto $P = (x_0, y_0)$ satisfaz as equações $\begin{cases} 3x + y - 19 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \end{cases}$.

Vamos encontrar a solução do sistema acima para determinar o ponto $P(x_0, y_0)$.

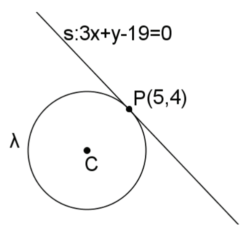
Temos:

$$\begin{cases} 3x + y - 19 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} `y = -3x + 19 \ (I) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \ (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) temos:

$$(x-2)^2 + (-3x + 19 - 3)^2 = 10 \Rightarrow (x-2)^2 + (-3x + 16)^2 = 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 96x + 256 = 10 \Rightarrow 10x^2 - 100x + 250 = 0 \ (\div 10) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2 - 10x + 25 = 0}.$$

E assim $x' = x'' = 5$ (note que encontramos uma única solução, pois a reta s é tangente à λ). Desta forma, como $y = -3x + 19$ encontramos $y = -3.5 + 19 = 4$ e o ponto de tangência entre a reta s e λ é o ponto $P = (5,4)$.



O exercício 4 nos leva a pensar e concluir que em qualquer uma das três possíveis posições relativas entre a reta $s: Ax + By + D = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ o conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema

$$(*)\begin{cases} Ax+By+D=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}.$$

Esse sistema poderá ser classificado como:

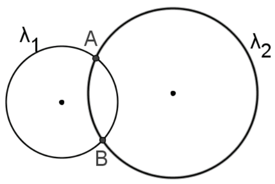
- Impossível se, e somente se, a reta ***s*** é exterior à circunferência λ ;
- Possível com solução única se, e somente se, a reta ***s*** é tangente à circunferência λ ;
- Possível com duas soluções se, e somente se, a reta ***s*** é secante à circunferência λ .

Observação: Note que, do sistema $(*)$ resultará uma equação do 2° grau e assim o valor do discriminante (Δ), dessa equação determinará a posição relativa entre a reta ***s*** e a circunferência **λ**.

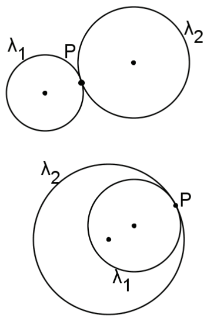
3.1.4- Posições Relativas entre duas Circunferências

Dadas duas circunferências $\lambda_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ e $\lambda_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ distintas, podemos obter dois, um ou nenhum ponto em comum.

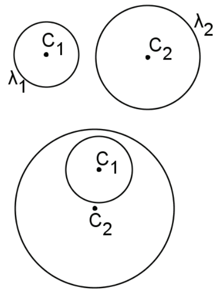
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Resolvendo o sistema $\begin{cases} \lambda_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0 \\ \lambda_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0 \end{cases}$ descobrimos quantos e quais são os pontos comuns entre λ_1 e λ_2 . Além disso, no segundo caso (um ponto comum) e no terceiro caso (nenhum ponto em comum) podemos identificar a posição relativa usando os raios, r_1 e r_2 , e a distância entre os centros $d(C_1,C_2)$.

Vejamos o exercício resolvido a seguir.

Exercício 5: Verificar a posição relativa entre as circunferências dadas.

$(a)\,\lambda: x^2+y^2=30$ e $\alpha:(x\text{-}3)^2+y^2=9$

$(b)\,\lambda:(x+2)^2+(y-2)^2=1$ e $\alpha: x^2+y^2=1$

Solução:

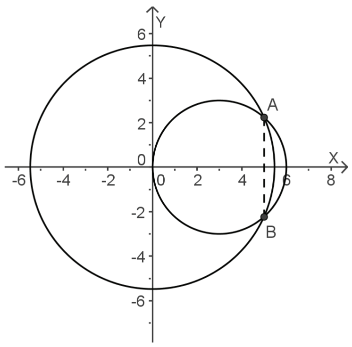
(a) Como já discutimos anteriormente vamos classificar o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=30 \\ (x\text{-}3)^2+y^2=9 \end{cases}$.

Acompanhe:

$$\begin{cases} x^2+y^2-30=0 \\ (x\text{-}3)^2+y^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-30=0\ .(-1) \\ x^2+y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{x^2}-\cancel{y^2}+30=0 \\ \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x+30=0 \Rightarrow \boxed{x=5}.$$

Logo substituindo $x=5$ em uma das equações, obteremos $y=\pm\sqrt{5}$. Portanto os pontos $A=\left(5,\sqrt{5}\right)$ e $B=\left(5,-\sqrt{5}\right)$ são soluções do sistema e assim as duas circunferência são secantes cujos pontos em comum são *A* e *B*. Observe a representação gráfica gerada pelo software Geogebra:



b) Montando o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^2+y^2+4x-4y+7=0 \end{cases}$$

Agora, vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \ (I) \\ x^2+y^2+4x-4y+7=0 \ (II) \end{cases}.$$

Fazendo $I = II$ e efetuando as devidas operações obtemos:

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-1=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+4x-4y+7 \Rightarrow \quad 4x-4y+7=-1 \Rightarrow$$

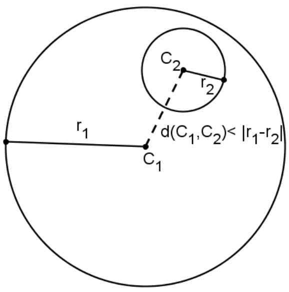
$$\Rightarrow 4x=4y-8 \ \Rightarrow \ \boxed{x=y-2}.$$

Substituindo agora $x=y-2$ na equação (I) teremos:

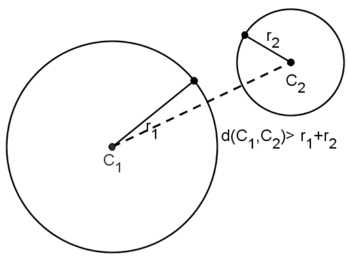
$$(y-2)^2+y^2-1=0 \Rightarrow \quad y^2-4y+4+y^2-1=0 \Rightarrow \quad 2y^2-4y+3=0 \Rightarrow \quad \boxed{\Delta=-8<0}.$$

Como $\Delta<0$, não existe solução para o sistema e assim concluímos que as circunferências não possuem pontos em comum.

Vejamos agora qual das duas situações abaixo se verifica:



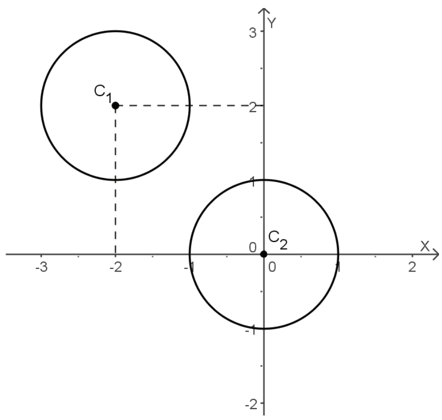
ou



Vamos calcular $d\left(C_1,C_2\right)$. Como $C_1=(-2,2)$ $\left(\lambda:(x-2)^2+(y-2)^2=1\right)$ e $C_2=(0,0)$ $\left(\alpha: x^2+y^2=1\right)$ então

$$d\left(C_1,C_2\right)=\sqrt{\left(0-(-2)\right)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}.$$

Note que $r_1=1,\ r_2=1$ e $r_1+r_2=2$. Como $d\left(C_1,C_2\right)=\sqrt{8}>r_1+r_2=2$ então as circunferências são externas. Veja a representação geométrica dessas circunferências.



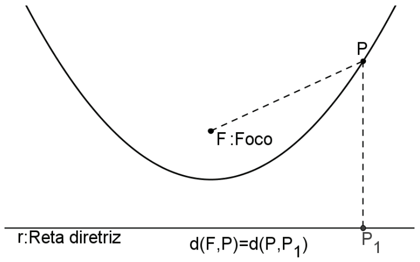
No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo circunferências. Acesse e participe!

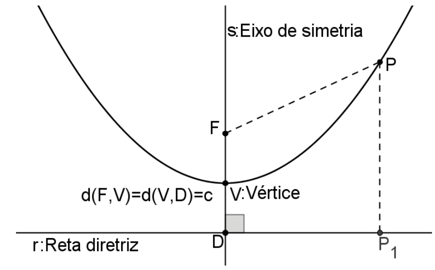
3.2- Parábola

Podemos visualizar concretamente uma parábola, dirigindo um jato d'água de uma mangueira obliquamente para cima e observando a trajetória percorrida pela água. Essa trajetória é parte de uma parábola.

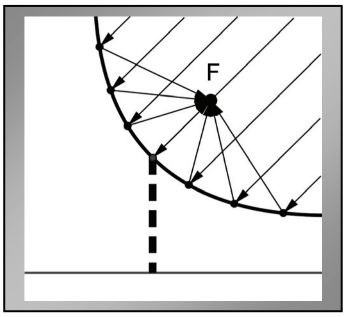
Definição: Dados um ponto F e uma reta r de um plano, com $F \notin r$, chamamos de parábola o conjunto dos pontos desse plano eqüidistantes da reta r e do ponto F.



O ponto F é denominado foco da parábola e a reta r é denominada diretriz da parábola. O eixo de simetria da parábola é a reta s, que passa por F e é perpendicular à diretriz r.



Observe que $d(F,V) = d(V,D) = c$ e assim o ponto V nada mais é que o ponto médio do segmento $\overline{FD}$, e é denominado vértice da parábola.

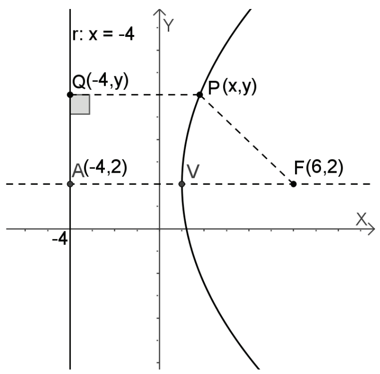


Ampliando o seu conhecimento...

Se um satélite emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominado o foco da parábola, onde estará um aparelho receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a sua TV poderá transformar em ondas, que por sua vez, significarão filmes, telejornais e outros programas que você assiste normalmente com maior qualidade.

Nosso objetivo é determinar uma equação que represente uma parábola. Desta forma, a partir do foco F e da reta diretriz r, podemos chegar à equação da parábola que é formada por todos os pontos $P = (x, y)$ do plano tal que $d(P,F) = d(P,r)$.

Como ilustração, vamos determinar a equação da parábola que tem como diretriz a reta $r: x = -4$ e como foco o ponto $F = (6,2)$ conforme figura abaixo:



Os pontos $P = (x, y)$ que pertencem à parábola são tais que $d(P,F) = d(P,Q)$, onde $Q = (-4, y)$.

Assim :

$$d(P,F) = d(P,Q) \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow \ (y-2)^2 = (x+4)^2 - (x-6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 + 12x - 36 \Rightarrow \boxed{(y-2)^2 = 20(x-1)}.$$

Portanto a equação $(y-2)^2 = 20(x-1)$ é a equação da parábola que possui foco $F = (6,2)$ e reta diretriz $r: x = -4$.

Sabemos que o vértice V da parábola é o ponto médio do segmento $\overline{FA}$, onde $F = (6,2)$ e $A = (-4,2)$ e assim $V = \left(\frac{6-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{V = (1,2)}$.

Pela distância de V até F encontramos um valor c dado por:

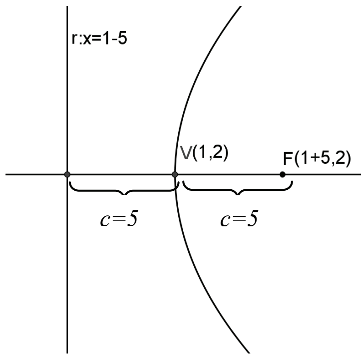
$$c = d(V,F) = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = 5.$$

Observe agora que na equação $(y-2)^2 = 20(x-1)$, obtida anteriormente, aparecem as coordenadas do vértice $x_v = 1$ e $y_v = 2$ e também o valor $c = 5$:

$$\left(y - \underbrace{2}_{y_v}\right)^2 = \underbrace{20}_{4.c}\left(x - \underbrace{1}_{x_v}\right)$$

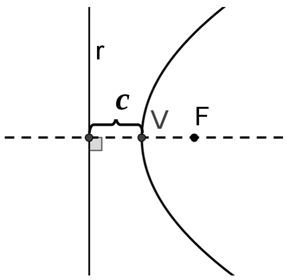
Reciprocamente, a partir da equação da parábola, $(y-2)^2 = 20(x-1)$, podemos chegar ao vértice *V* e o valor de c, e daí, teremos o foco *F* e a diretriz *r*.

Dada a equação $(y-2)^2 = 20(x-1)$. Obtemos $V = (1,2)$ e $c = 5$.



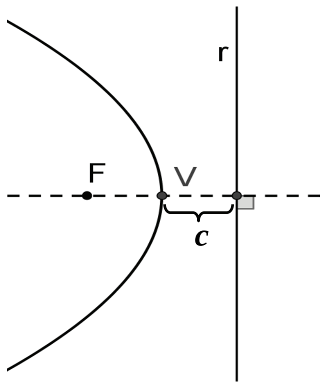
Generalizando, podemos, a partir do foco e da reta diretriz, determinar o vértice $V = (x_v, y_v)$ e o valor de $c = d(V,F)$ como também a equação reduzida da parábola.

Veja os casos possíveis.
Caso 1: A reta diretriz *r* é paralela ao eixo *0y*;



Se a concavidade é voltada para a direita, então a equação reduzida da parábola é:

$$(y - y_v)^2 = 4c(x - x_v).$$

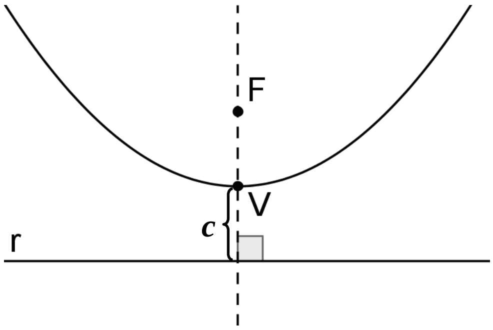


Se a concavidade é voltada para a esquerda, então a equação reduzida da parábola é:

$$(y - y_v)^2 = -4c(x - x_v).$$

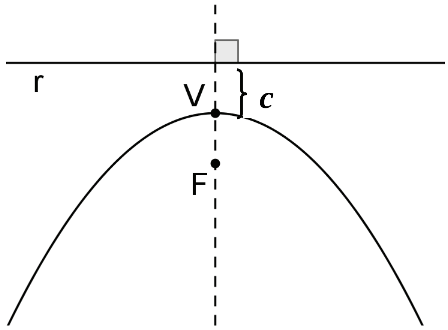
Observações: Note que, quando a reta diretriz é paralela ao eixo *0y*, o fator da equação que contém a variável *y* ficará elevado ao quadrado. Analogamente, se a reta diretriz é paralela ao eixo *0x*, o fator da equação que contém a variável *x* ficará elevado ao quadrado, veja nas ilustrações a seguir.

Caso 2: A reta diretriz r é paralela ao eixo $0x$.



Se a concavidade é voltada para cima, então a equação reduzida da parábola é:

$$\left(x-x_v\right)^2=4c.\left(y-y_v\right).$$



Se a concavidade é voltada para baixo, então a equação reduzida da parábola é:

$$\left(x-x_v\right)^2=-4c.\left(y-y_v\right).$$

Faremos alguns exercícios para que possamos assimilar e trabalhar melhor a equação reduzida de uma parábola.

Exercício 1: Se uma parábola possui equação $x^2-4x-12y-8=0$, determine as coordenadas do vértice, do foco e a equação da reta diretriz.

Solução:

Primeiramente vamos fazer o completamento do quadrado na variável x.

Temos: $x^2-\underbrace{4}_{\substack{2a\\a=2}}x=x^2-4x+\underbrace{4}_{a^2}-4=\left(x-2\right)^2-4$.

Desta forma a equação $x^2-4x-12y-8=0$ pode ser escrita na forma:

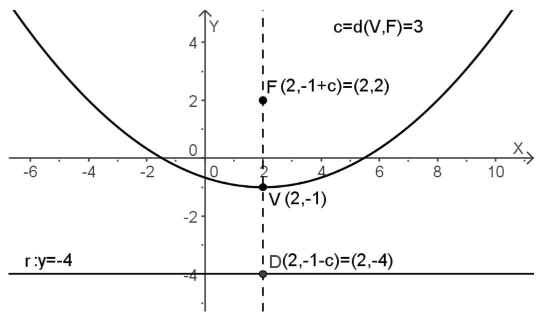
$$\left(x-2\right)^2-4-12y-8=0\ \Rightarrow \left(x-2\right)^2=12y+12\ \Rightarrow \boxed{\left(x-2\right)^2=12\left(y+1\right)}.$$

Portanto, da equação da parábola $\left(x-2\right)^2=12\left(y+1\right)$ obtemos $V=\left(2,-1\right)$ e $4c=12 \Rightarrow\ c=\dfrac{12}{4}=3$.

Como na equação $\left(x-2\right)^2=12\left(y+1\right)$ o termo envolvendo a variável x está elevado ao quadrado, então pelos casos vistos anteriormente, a reta diretriz é paralela ao eixo $0x$.

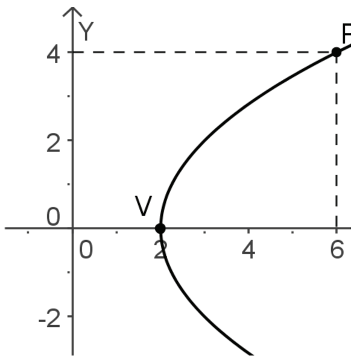
Utilizando o vértice $V=\left(2,-1\right)$ e o valor $c=3=d(V,F)$, encontraremos o foco e a reta diretriz da parábola esboçando um gráfico no plano cartesiano. Observe:

Logo, $V=\left(2,-1\right)$, $F=\left(2,2\right)$ e a reta diretriz é $r:y=-4$.



Exercício 2: Determine a equação da parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo $0y$, vértice $V=(2,0)$ e que passa pelo ponto $P=(6,4)$.

Solução: Fazendo um esboço gráfico do vértice $V=(2,0)$, do ponto $P=(6,4)$ e partindo do fato que o eixo de simetria é perpendicular ao eixo $0y$, a nossa parábola tem a seguinte forma:



Logo, pelos casos já mostrados anteriormente, a nossa parábola possui a seguinte equação: $(y-y_v)^2 = 4c(x-x_v) \Rightarrow (y-0)^2 = 4c(x-2) \Rightarrow \boxed{y^2 = 4c(x-2)}$.

Como o ponto $P(6,4)$ pertence à parábola então:

$$4^2 = 4c(6-2) \Rightarrow 16 = 16c \Rightarrow \boxed{c=1}.$$

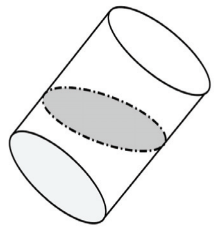
Portanto a equação da parábola é $y^2 = 4(x-2)$.

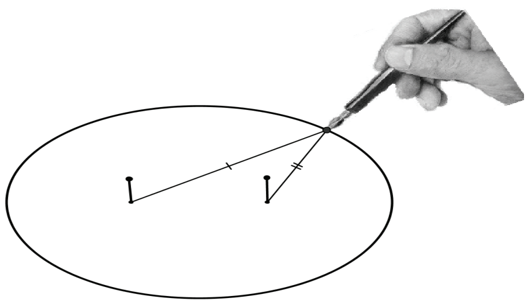
No Moodle...

Vamos nos encontrar na Plataforma Moodle para podermos discutir, através de exercícios, este conteúdo. Espero por você.

3.3- Elipse

Em um copo, no formato cilíndrico circular, despeje até a metade do copo um refrigerante de sua escolha. Depois incline o copo e mantenha-o fixo. A figura formada pelo refrigerante na lateral do copo é uma ilustração concreta de uma elipse.





Existe outra maneira de se obter uma elipse, em uma tábua pregue dois pregos e arame neles as extremidades de um barbante maior que a distância entre os pregos; a seguir desenhe uma linha na tábua com o auxilio de um lápis apoiado no barbante, mantendo-a o mais esticado possível.

Definição: Fixado dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tal que $d(F_1,F_2) = 2c,\ c > 0,$ chama-se elipse o conjunto dos pontos $P = (x,y)$ cuja soma das distâncias $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é uma constante $2a$, com $2a > 2c$.

Na figura ao lado temos:

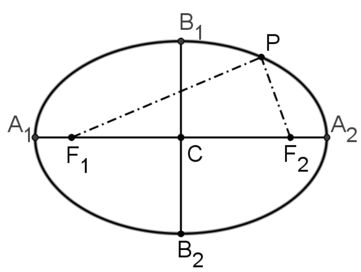
(I) F_1 e F_2 são focos da elipse e a distância focal $d(F_1,F_2) = 2c$;

(II) $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e $d(A_1,A_2) = 2a$;

(III) $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse e $d(B_1,B_2) = 2b$;

(IV) C é o centro da elipse e é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, e mais, $d(C,F_1) = d(C,F_2) = c$.

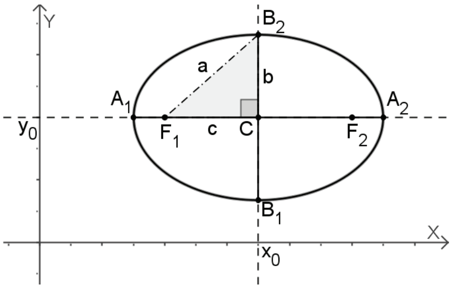
V) O numero $e = \dfrac{c}{a}$ chama-se excentricidade da elipse.



d(P,F1)+d(P,F2)=2a

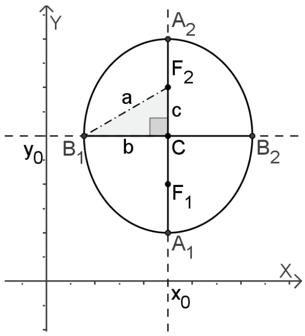
Dada uma elipse de centro $C = (x_0, y_0)$, temos os seguintes casos:

Caso 1: O eixo maior $\left(\overline{A_1A_2}\right)$ paralelo ao eixo $0x$;



Neste caso, mostra-se que a elipse pode ser representada pela equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, com $b^2=a^2-c^2$ (Teorema de Pitágoras).

Caso 2: O eixo maior $\left(\overline{A_1A_2}\right)$ paralelo ao eixo 0y.



Neste caso, a elipse pode ser representada pela equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$, com $b^2=a^2-c^2$.

A demonstração destas equações é conseqüência direta da definição, isto é, se $P=(x,y)$ é um ponto da elipse de centro $C=(x_0,y_0)$ e foco $F_1=(x_0+c,y_0)$ e $F_2=(x_0-c,y_0)$ (eixo maior paralelo ao eixo $0x$), por exemplo, então desenvolvendo $d(F_1,P)+d(F_2,P)=2a$, onde $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)$, obtemos a equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, e mais $b^2=a^2-c^2$.

Teremos a oportunidade em nossas aulas de discutir o desenvolvimento da equação reduzida da elipse pelo desenvolvimento de $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$.

Exercício 1: Determinar a equação da elipse de centro na origem e eixo maior horizontal, sendo $2a=10$ e $2c=6$ (distância focal).

Solução: Temos $2a=10 \Rightarrow \boxed{a=5}$ e $2c=6 \Rightarrow \boxed{c=3}$.

Como $b^2=a^2-c^2$ então $b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$.

Se o eixo maior é horizontal e o centro é na origem, a equação é da forma $\frac{x^2}{\underbrace{a^2}_{\text{eixo maior horizontal}}}+\frac{y^2}{b^2}=1$, assim:

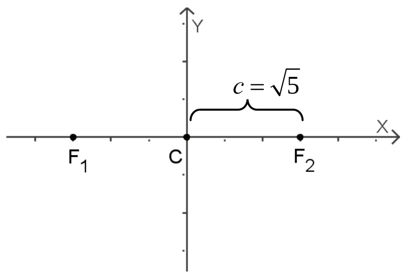
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Exercício 2: Determinar os focos e a excentricidade da elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Solução: Observe que o centro dessa elipse é o ponto $C=(0,0)$, que $a^2=9 \Rightarrow a=3$ e que $b^2=4 \Rightarrow b=2$.

Como $b^2=a^2-c^2$ então $4=9-c^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{5}}$.

Pela equação reduzida observamos que o eixo maior (eixo focal) é paralelo ao eixo $0x$. Como $C=(0,0)$, os focos pertencem ao eixo $0x$.



Logo, os focos são $F_1=(-\sqrt{5},0)$ e $F_2=(\sqrt{5},0)$, a excentricidade é $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercício 3: Uma elipse tem como equação $25x^2 - 50x + 4y^2 + 16y - 59 = 0$. Escrever esta equação na forma reduzida e esboçar o gráfico.

Solução: Primeiramente, iremos agrupar os termos em *x*, e os termos em *y*, e faremos o completamento de quadrado.

(I) $25x^2 - 50x = 25(x^2 - \underbrace{2}_{\substack{2a=2\\ a=1\\ a^2=1}}x) = 25(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 = 25\left[(x-1)^2 - 1\right]$

(II) $4y^2 + 16y = 4(y^2 + \underbrace{4}_{\substack{2a=4\\ a=2\\ a^2=4}}y) = 4(\underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y+2)^2} - 4) = 4\left[(y+2)^2 - 4\right]$.

Logo, a equação $25x^2 - 50x + 4y^2 + 16y - 59 = 0$ pode ser escrita na forma

$$25\left[(x-1)^2 - 1\right] + 4\left[(y+2)^2 - 4\right] - 59 = 0 \Rightarrow 25(x-1)^2 - 25 + 4(y+2)^2 - 16 - 59 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{25(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 100}.$$

Dividindo por 100 ambos os membros desta equação, obtemos a forma reduzida:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

Observe que neste caso o maior denominador $a^2 = 25$, se encontra no termo que envolve a variável *y* e assim o eixo focal (ou eixo maior) é paralelo ao eixo *0y*.

Para esboçar o gráfico da elipse $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$ procedemos da seguinte forma.

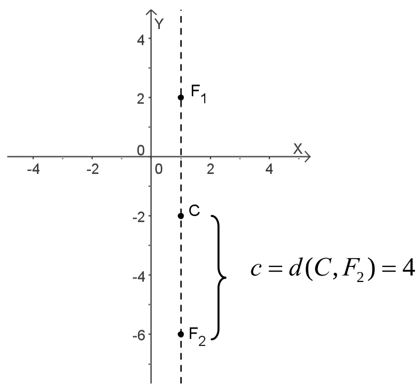
(i) O eixo focal é paralelo ao eixo *0y*;

(ii) $a^2 = 25$ e $b^2 = 4$, assim $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 4 = 25 - c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c = 4}$;

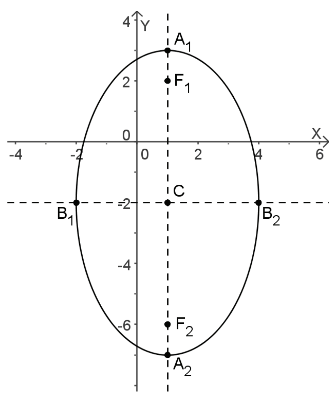
(iii) O ponto $C(1,-2)$ é o centro da elipse. Veja ilustração com essas três etapas;

(iv) determinar F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 através dos valores $a = 5,\ b = 2$ e $c = 4$, ou seja, $F_1 = (1, -2+4)$,
$F_2 = (1, -2-4),\ A_1 = (1, -2+5),\ A_2 = (1, -2-5),\ B_1 = (1-2, -2)$ e $B_2 = (1+2, -2)$.

(v) Esboçar o gráfico com:



$C = (1,-2),\ F_1 = (1,2),\ F_2 = (1,-6),\ A_1 = (1,3),\ A_2 = (1,-7),\ B_1 = (-1,-2)$ *e* $B_2 = (3,-2)$.



No Moodle...

Vamos nos encontrar na Plataforma Moodle para podermos discutir, através de exercícios, este conteúdo. Espero por você.

3.4 – Hipérbole

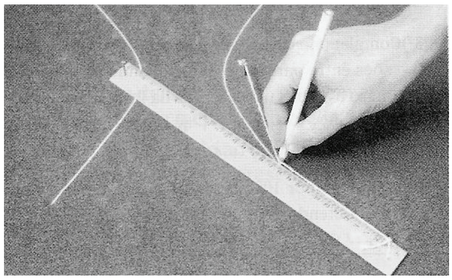
Para que possamos entender bem a definição da hipérbole, iremos primeiramente aprender a desenhá-la. Desta forma realize a seguinte experiência.

(I) em uma extremidade de uma haste (pode ser uma régua), prenda a ponta de um barbante;

(II) fixe as outras extremidades da haste e do barbante em dois pontos distintos, F_1 e F_2, de uma tábua (a diferença entre o comprimento d da régua e o comprimento l do barbante deve ser menor do que a distancias $d(F_1, F_2)$, ou seja, $d - l < F_1F_2$);

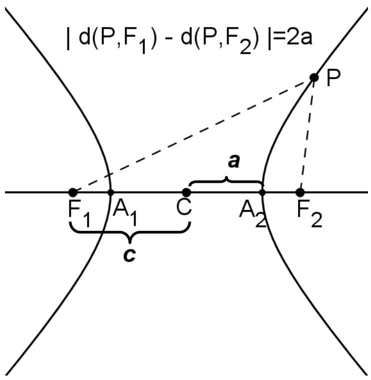
(III) com a ponta de um lápis, pressione o barbante contra a régua, deslizando o grafite sobre a tábua, deixando o barbante esticado e sempre junto da régua;

(IV) repita a operação, invertendo os pontos de fixação na tábua, isto é, fixe a haste em F_2 e o barbante em F_1. Conforme a figura.



A figura ao lado construída é denominada hipérbole.

Definição: Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tais que $d\left(F_1, F_2\right) = 2c, c > 0$, chama-se hipérbole o conjunto dos pontos $P = \left(x, y\right)$ de um plano tais que a diferença, em módulo, das distâncias $d\left(F_1, P\right)$ e $d\left(F_2, P\right)$ é constante *2a*, com $0 < 2a < 2c$, ou seja, $\left|d\left(F_1, P\right) - d\left(F_2, P\right)\right| = 2a$.



Na figura ao lado temos:

(I) F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, sendo $d\left(F_1, F_2\right) = 2c$ a distância focal;

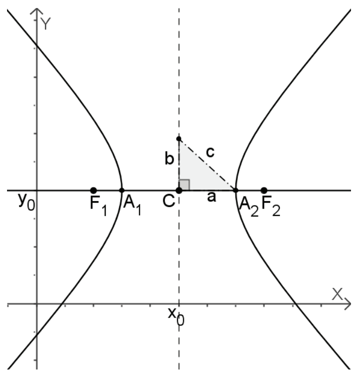
(II) A_1 e A_2 são os dois vértices da hipérbole, sendo $d\left(A_1, A_2\right) = d\left(F_2, A_1\right) - d\left(F_1, A_1\right) = 2a$

(III) C é o centro da hipérbole, sendo C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ ou do segmento $\overline{A_1A_2}$, ou seja $d\left(F_1, C\right) = d\left(F_2, C\right) = c$ e $d\left(A_1, C\right) = d\left(A_2, C\right) = a$;

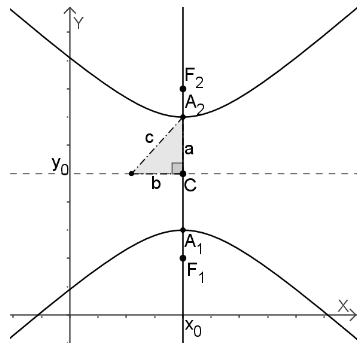
(IV) O número $e = \dfrac{c}{a}$, é a excentricidade da hipérbole (note que $e > 1$, pois $c > a$)

Dada uma hipérbole de centro $C = \left(x_0, y_0\right)$ temos os seguintes casos:

Caso 1: Se o eixo focal é paralelo ao eixo *0x*, então a hipérbole pode ser representada pela equação reduzida $\dfrac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} - \dfrac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1$, como $b^2 = c^2 - a^2$ (Teorema Pitágoras).

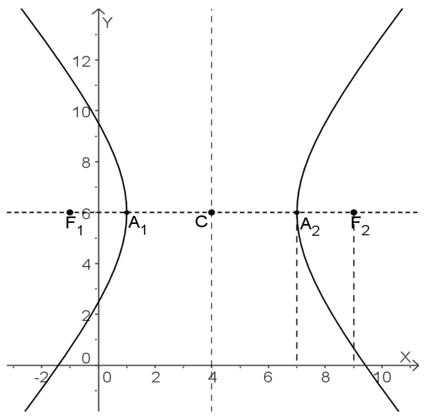


Caso 2: Se o eixo focal é paralelo ao eixo *0y*, então a hipérbole pode ser representada pela equação $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$ com $b^2=c^2-a^2$.



Assim como na elipse, a demonstração dessas equações é conseqüência direta da definição, isto é, se $P=(x,y)$ é um ponto da hipérbole de centro $C=(x_0,y_0)$ e foco $F_1=(x_0+c,y_0)$ e $F_2=(x_0-c,y_0)$ (eixo focal paralelo ao eixo *0x*), por exemplo, então desenvolvendo $\left|d(F_1,P)-d(F_2,P)\right|=2a$, onde $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)$, obtemos a equação $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, com $b^2=c^2-a^2$.

Exercício 1: Obtenha a equação reduzida da hipérbole representada abaixo.



Solução:

Pelo gráfico vemos que:

i) $C=(4,6)$, $A_2=(7,6)$ e $F_2=(9,6)$;

ii) Como $d(A_2,C)=a$, então $d(A_2,C)=3=a$;

iii) Como $d(F_2,C)=c$, então $d(F_2,C)=5=c$;

iv) O eixo focal é paralelo ao eixo *0x* e assim a equação da hipérbole é da forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Como $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b=4$, então a equação reduzida da hipérbole acima é: $\dfrac{(x-4)^2}{9}-\dfrac{(y-6)^2}{16}=1$.

Exercício 2: Uma hipérbole tem como equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$. Escreva-a na forma reduzida.

Solução: Vamos fazer o completamento de quadrados:

(I) $x^2-\underbrace{6}_{\substack{2a=6\\ a=3\\ a^2=9}}x=\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-9=(x-3)^2-9$

(II) $-9y^2-18y=-9(y^2+2y)=-9(y^2+2y+1-1)=-9\left[(y+1)^2-1\right]$.

Logo a equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$ se transforma na equação

$$x^2-9y^2-6x-18y-9=0 \Rightarrow (x-3)^2-9-9\left[(y+1)^2-1\right]-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2-9-9(y+1)^2\cancel{+9}\cancel{-9}=0 \Rightarrow \boxed{(x-3)^2-9(y+1)^2=9}.$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por 9 teremos: $\dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$.

No Moodle...

Vamos nos encontrar na Plataforma Moodle para podermos discutir, através de exercícios, este conteúdo. Espero por você.

4- Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade, trabalhamos com as equações reduzidas das cônicas (Circunferência, Parábola, Elipse e Hipérbole). Tudo que conhecemos hoje sobre a astronomia deve-se, em grande parte, ao estudo das cônicas. Por exemplo, a órbita que os planetas fazem em torno do Sol é descrita por elipses. Isto mostra quão importante é o estudo das Cônicas.

Agora é com você! Procure participar das discussões desenvolvidas no ambiente virtual e sempre que houver dúvidas procure seu professor tutor. Lembre-se que o conhecimento matemático é construído gradual e sistematicamente. Procure formar grupo de estudo e esteja constantemente em contato com a disciplina, seja revisando, exercitando ou discutindo no Moodle.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª** ed. São Paulo: Ática. Vol. 3. 2000.

2. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: 1Moderna. Vol. 3. 2002.

3. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

4. GENTIL, Nelson S. **Matemática para o 2º grau**. Vol. 3. Ática, 7ª ed. São Paulo: 1998.