Métodos de Física Teórica I

Osmar de Souza e Silva Júnior

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2009

Métodos de Física Teórica I

Elaboração de Conteúdo
Osmar de Souza e Silva Júnior

Projeto Gráfico e Capa
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S589m Silva Júnior, Osmar de Souza e
Métodos de Física Teórica I/ Osmar de Souza e Silva Júnior -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009.

1. Física teórica. I. Título.

CDU 539

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Funções Analíticas I

META

Revisar operações básicas com números complexos. Introduzir o conceito de função de variável complexa. Conceituar limites e derivadas de funções de variável complexa.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: efetuar as operações básicas com números complexos, além de calcular potências e raízes; determinar se dada região do plano complexo é um domínio ou não; conceituar limites e derivadas de funções de variável complexa.

PRÉ-REQUISITOS

Nenhum.

INTRODUÇÃO

Em Física Teórica, fazemos um uso intenso dos números complexos. Por exemplo, percebeu-se que para descrever oscilações e ondas, a função matemática complexa e^{ikx} tornava mais simples os cálculos, do que as correspondentes funções reais seno e cosseno. Também, na mecânica do mundo microscópico, a Mecânica Quântica, o objeto fundamental é a função de onda, que assume valores complexos.

Nesta aula, relembraremos como operar com números complexos, introduziremos o conceito de função de variável complexa, e apresentaremos uma classificação de regiões no plano complexo, até chegar ao conceito fundamental de domínio.

Estenderemos os conceitos de limite e derivada às funções de variável complexa.

Aula 1

Alô meu caro estudante! É um prazer muito grande ter você como meu aluno. Antes de mais nada, gostaria de conversar um pouco sobre o texto e o curso.

Mesmo estando distantes um do outro, nós manteremos contato através deste texto, que tentei escrever da melhor forma que pude, usando toda a minha experiência. Que não é pouca: são vinte e sete anos de docência na Universidade Federal de Sergipe (UFS). Calculo que já tenha tido entre três mil e quinhentos, ou quatro mil estudantes, entre graduandos principalmente de Física, mas também ensinei licenciandos e bacharelandos de Matemática, Química, Computação, alunos de várias Engenharias, pós-graduandos de Física. Orientei alunos de mestrado, estudantes de curso de Especialização; só de alunos de iniciação científica, foram quinze que trabalharam comigo.

Quanto a cursos de Física Matemática (Métodos de Física Teórica é um nome alternativo), foram muitos sob minha responsabilidade, em várias épocas, com diferentes nomes, desde meu ingresso na UFS (1982), quando preparei uma disciplina de um curso de especialização para alunos e professores do Departamento de Física. Nos últimos anos, venho ensinando as disciplinas Métodos de Física Teórica I e II, juntamente com o Professor Fernando Miguel Chaves. Essas disciplinas surgiram em face da necessidade de reforçar a formação matemática dos nossos estudantes de Física, ao mesmo tempo em que introduzimos já as notações usadas na Física, com muitas aplicações em nossa área.

Muitas vezes os alunos me perguntam se este será um curso fácil. Com minha experiência, posso dizer que um curso será fácil ou difícil dependendo de quanta dedicação, quanto esforço investirmos nele. Não vou iludí-lo, nada cai do céu: o treinamento matemático requer disciplina, no sentido não só da <u>leitura</u> do material, mas de muito <u>trabalho nos exercícios</u>. Não há outra forma de estudar este assunto, senão trabalhando duramente nas atividades que selecionamos. E, se possível, você deve complementar resolvendo mais problemas, encontrados nos livros sugeridos no final dos capítulos.

Gostaria de receber críticas e sugestões, que você julgue que possam vir a ser usadas para melhorar este texto.

Um bom trabalho para você!

1.1 Os Números Complexos

Antes de começar a falar das funções de variável complexa, preferimos fazer uma breve revisão dos números complexos, e de operações básicas envolvendo esses números, de modo que todos possam acompanhar mesmo que não tenham ainda encontrado os números complexos pela frente, ou que tenham aprendido pouco sobre eles.

Os números complexos costumam ser definidos da seguinte maneira.

Um número complexo z tem a forma $z = x + iy$, onde x e y são números reais quaisquer, e o símbolo $i = \sqrt{-1}$ é chamado de unidade imaginária. Dizemos que x é a parte real de z, e y sua parte imaginária.

Se $z = iy$ (isto é, se $x = 0$), dizemos que z é um imaginário puro.

O conjunto de todos os números complexos, ou mais precisamente, o **corpo** dos números complexos, é denotado **C**.

Um **corpo** é uma estrutura algébrica consistindo em um conjunto munido de operações de soma e multiplicação satisfazendo certas propriedades, como fechamento, comutativa, associativa, distributiva, dentre outras.

Com a introdução dos números complexos, equações algébricas como

$$w^2 + 1 = 0$$

passam a ter solução (no caso, $w = \pm i$). Mais geralmente, as equações algébricas de segundo grau com discriminante Δ negativo, sem solução no campo dos reais, possuirão (sempre) duas raízes complexas.

Os números complexos podem ser somados ou multiplicados, de acordo com as regras:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são iguais se e somente se suas partes reais e suas partes imaginárias forem iguais,

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \qquad e \qquad y_1 = y_2\,.$$

O complexo conjugado z^* (ou $\overline{z}$) do número complexo $z = x + iy$ é dado por $z^* = x - iy$. Note que o produto de z e z^* é um número real,

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2\,.$$

O módulo de um número complexo é exatamente a raiz quadrada deste último resultado,

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

A subtração é introduzida de modo similar à soma,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

e a divisão,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

sendo que na última passagem utilizou-se o procedimento de multiplicar numerador e denominador por $(x_2 - iy_2)$, para termos um número real no denominador.

Exemplo Calcule o produto de números complexos: $(7 + i)(6 - 2i)(1 + i)$.

$$\begin{aligned} \overbrace{(7+i)(6-2i)}(1+i) &= [\overbrace{42+2}^{44} + i(\overbrace{-14+6}^{-8})](1+i) \\ &= 44 + 8 + i(44 - 8) = 52 + 36i \end{aligned}$$

Exemplo Calcule a expressão:

$$\frac{1+2i}{(1-i)(3+4i)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{(1-i)(3+4i)} &= \frac{(1+2i)}{(1-i)(3+4i)}\,\frac{(1+i)(3-4i)}{(1+i)(3-4i)} \\ &= \frac{(1+2i)(1+i)(3-4i)}{(1+1)(9+16)} \\ &= \frac{1}{50}\,[(1-2+3i)(3-4i)] \\ &= \frac{1}{50}[-3+12+13i] = \frac{9}{50} + \frac{13}{50}\,i \end{aligned}$$

Uma maneira alternativa (mas completamente equivalente) de introduzir os números complexos faz uso do conceito de par ordenado: um número complexo z corresponderia ao par ordenado (x, y) de números reais. Com essa notação, a unidade imaginária se escreve $i = (0, 1)$. Essa notação sugere ainda que, se $\mathbf{R}$ é geometricamente visualizada

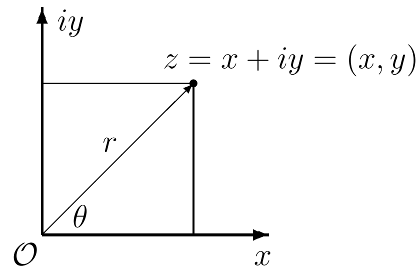

Figura 1.1: Um ponto z no plano complexo.

como uma reta, o conjunto **C** será visualizado como um plano, determinado por dois eixos ortogonais: a reta real, constituída dos pontos na forma (x,0), e a reta dos pontos (0,y). Esta última reta vem a ser chamada eixo imaginário.

O plano formado é chamado de plano de Argand-Gauss, ou mais simplesmente, plano complexo.

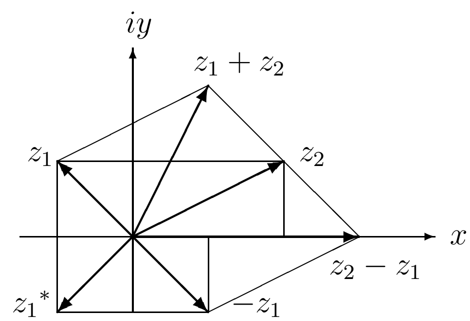

Figura 1.2: Adição e soma de números complexos (modo gráfico).

Na figura 1.2 mostramos os números complexos z_1, seu oposto $-z_1$ (que está colocado simetricamente em relação à origem $z = 0$), e seu complexo conjugado ${z_1}^*$ (este colocado simetricamente em relação ao eixo x). Note que identificamos z_1 com um vetor que vai da origem $z = 0$ ao ponto z_1 do plano complexo; um segundo número, z_2, com um vetor saindo da origem ao ponto z_2; a soma $z_1 + z_2$ é dada então pelo vetor colocado na diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores representando z_1 e z_2. Portanto, a soma de complexos pode ser encontrada, graficamente, usando a mesma regra do paralelogramo para soma de vetores no plano. A diferença $z_2 - z_1$ é encontrada de modo similar, agora tomando o vetor na outra diagonal, que vai do ponto z_1 ao ponto z_2. Ou, o que é equivalente, o que vai da origem ao ponto $z_2 - z_1$ (note que um vetor é caracterizado por três propriedades, o módulo, a direção e o sentido, e não depende do ponto de aplicação). Ou, ainda, $z_2 - z_1$ pode ser visto como a soma dos vetores z_2 com $-z_1$ (veja o paralelogramo formado por esses dois vetores, sua diagonal maior corresponde à essa soma, pela regra do paralelogramo).

A identificação entre $\mathbf{C}$ e $\mathbf{R}^2$ (espaço dos vetores no plano) não deve, entretanto, ser levada muito longe já que, se a adição de números complexos e a adição de vetores de $\mathbf{R}^2$ são semelhantes, o mesmo não se pode dizer com relação à multiplicação.

Cada ponto $z = x + iy$ do plano complexo pode ser caracterizado, como vimos, pelas "coordenadas" x, y. Existe, no entanto, outra forma de caracterizar números complexos: através da representação polar, que faz uso de dois outros números reais, r, θ:

$$
\begin{aligned}
r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} \\
\theta = arc\ tg\ \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)
\end{aligned}
$$

onde r é o módulo de z, e θ é chamado argumento do número complexo z (reveja a figura 1.1).

Nessa representação polar, z é escrito

$$
\begin{aligned}
z = x + iy &= r\ cos\ \theta + i\ r\ sen\ \theta \\
&= r\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta) \\
&= r\ e^{i\theta}
\end{aligned}
$$

onde foi utilizada a fórmula de Euler,

$$e^{i\alpha} = cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha$$

sendo que α é real. Voltaremos a encontrar esta expressão mais adiante, quando tratarmos séries infinitas.

Uma vantagem da representação polar aparece na multiplicação de complexos,

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}\ , z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

e na divisão,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

(nesta última equação, $r_2 \neq 0$), nas quais expressões simples são obtidas.

Uma extensão do resultado acima para o produto de dois números complexos z_1, z_2 é o Teorema de Moivre:

$$z^n = r^n(cos\, n\theta + i\, sen\, n\theta)\ ,$$

para n inteiro, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tal expressão vale também para expoentes negativos,

$$\begin{aligned} z^{-n} = \frac{1}{z^n} &= r^{-n}[cos\,(-n\theta) + isen\,(-n\theta)] \\ &= r^{-n}[cos\, n\theta - isen\, n\theta] \end{aligned}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Um problema de resolução menos direta é extrair raízes de números complexos. Trata-se de obter todos os valores possíveis de z na expressão

$$z = {z_0}^{1/n}$$

onde z_0 é um número complexo conhecido, e n é um número inteiro.

Vamos, então, achar todas as raízes enésimas de z_0. Elevamos à enésima potência os dois lados da última equação acima, e fazemos uso da representação polar,

$$z^n = z_0\ \Rightarrow r^n(cos\, n\theta + isen\, n\theta) = r_0(cos\,\theta_0 + isen\,\theta_0)$$

portanto, os módulos do lado esquerdo e direito devem ser iguais,

$$r^n = r_0$$

o mesmo valendo para os argumentos,

$$cos\, n\theta = cos\,\theta_0\ , \quad \text{e} \quad sen\, n\theta = sen\,\theta_0$$

de onde concluimos que $n\,\theta = \theta_0 \pm 2k\pi$, com $k = 0, 1, 2, \ldots$, ou seja,

$$\theta = \frac{\theta_0 \pm 2k\pi}{n}\ .$$

Mas é preciso observar que, muito embora k possa assumir qualquer valor inteiro, há apenas n valores que implicam em raízes distintas. Vejamos: para $k = 0$, temos uma raiz z com argumento θ_0/n; com $k = 1$, $(\theta_0 + 2\pi)/n$; e assim por diante até $k = n - 1$, quando a raiz possui argumento

$$\frac{\theta_0 + 2(n-1)\pi}{n} \,.$$

Porém, para $k = n$, temos uma raiz com argumento

$$\frac{\theta_0 + 2n\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} + 2\pi$$

que descreve portanto a mesma raiz com $k = 0$. Para $k = n + 1$ obteremos novamente a mesma raiz com $k = 1$, etc. Para os valores negativos, -2π, -4π etc, teremos outras repetições. Desse modo, excluindo repetições, há n raizes de z_0,

$$z = {z_0}^{1/n} = {r_0}^{1/n}\left[cos\,\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\,sen\,\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right]$$

sendo $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Juntando este resultado com o Teorema de Moivre, temos a expressão mais geral,

$${z_0}^{m/n} = {r_0}^{m/n}\left[cos\,\frac{m\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\,sen\,\frac{m\theta_0 + 2k\pi}{n}\right]$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}^+$. Aqui, $\mathbf{Z}$ é o conjunto dos inteiros (negativos, zero e positivos); $\mathbf{N}^+$ inclui apenas os inteiros positivos.

A seguir, listamos algumas propriedades verificadas pelos números complexos:

(i) $z_1 z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$;

(ii) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$;

(iii) $(z_1 + z_2)/z_3 = z_1/z_3 + z_2/z_3$, sendo $z_3 \neq 0$;

(iv) Se $x = Re(z)$ é a parte real de $z = x + iy$, e $y = Im(z)$ a parte imaginária de z, então

$$z + z^* = 2Re(z)\,, \qquad z - z^* = 2Im(z)\,;$$

(v) $|z| \geq Re(z)$; $\quad |z| \geq Im(z)$; $\quad |z| \leq Re(z) + Im(z)$;

(vi) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; $\quad |z_1 - z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$.

Na primeira relação do último ítem, tem-se a chamada desigualdade triangular. Estas desigualdades são facilmente verificáveis, experimente prová-las!

ATIVIDADES

1. Calcule $\frac{1}{2}(4+2i)(1-2i)^2$.
2. Calcule $\frac{10}{(2+i)(1-3i)}$.
3. Calcule $(\sqrt{3}+i)^6$.
4. Obtenha todas as raízes de $(-4)^{1/4}$.
5. Calcule todas as soluções de $(8+8i)^{2/3}$.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Às vezes, há várias formas de se resolver um problema. No primeiro problema, como a potência envolvida é baixa, 2, você pode até multiplicar $4+2i$ por $1-2i$, e o que der, multiplicar por $1-2i$. Ou você pode usar a fórmula de Moivre para elevar $1-2i$ ao quadrado, e o que der, multiplicar por $4+2i$. Mas, quando a potência envolvida for grande, como acontece no terceiro problema, é bem melhor usar mesmo a fórmula de Moivre.

No quarto problema, você pode usar a fórmula para obter as raízes, ou então pode usar o procedimento gráfico: as raízes estarão sobre uma circunferência cujo raio é a raiz quarta de 4; a primeira delas terá um argumento (ângulo com o eixo real) igual a um quarto do ângulo correspondente a -4 (que é 180 graus! Você consegue explicar por que?), e as outras com ângulos que se vai obtendo à medida que se soma repetidamente o ângulo de 360 graus dividido por quatro.

A última questão combina potência e raiz; há uma fórmula geral que você pode usar. Ou então, você pode calcular primeiro o quadrado de $8+8i$, e depois extrair a raiz tripla, com a fórmula correspondente ou o método gráfico.

As respostas dos problemas, para você conferir seu procedimento: (1) $-2-11i$; (2) $1+i$; (3) -64; (4) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$. Confira a solução do quinto problema com seus colegas!

1.2 As Funções Analíticas

Você provavelmente está familiarizado com o conceito usual de função que é, em resumo, uma associação de cada ponto x de um domínio à um único ponto $y = f(x)$ de um contra-domínio. Inclusive, costuma-se identificar uma função com seu gráfico, no caso em que domínio e contra-domínio estão contidos na reta real $\mathbf{R}$.

Veja o gráfico apresentado na figura 1.3: o domínio da função $y = f(x)$ está contido na reta representada pelo eixo x, e o contra-domínio no eixo y.

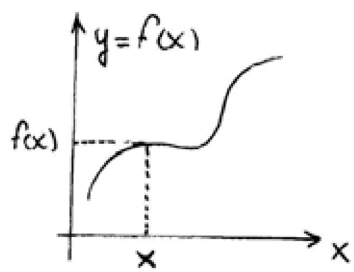

Figura 1.3: Uma função de variável real, a valores reais.

Uma função de variável complexa f obedece a mesma idéia básica, sendo uma associação de cada ponto z pertencente a uma região do plano complexo (o domínio), à um ponto $f(z)$ pertencente a outra região do plano complexo (o contra-domínio), e indica-se matematicamente:

$$\begin{aligned} f: \mathcal{D} \subset \mathbf{C} &\longrightarrow \mathcal{CD} \subset \mathbf{C} \\ z &\longrightarrow f(z) \end{aligned}$$

(leia-se: a função f leva o domínio $\mathcal{D}$ contido no plano complexo num contra-domínio $\mathcal{CD}$ de $\mathbf{C}$, associando um ponto z à $f(z)$). A figura 1.4 ilustra uma função de variável complexa z, que assume valores complexos $f(z)$.

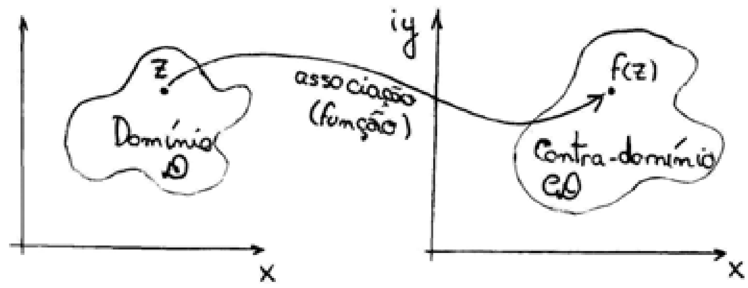

Figura 1.4: Uma função de variável complexa, a valores complexos.

Vamos estudar agora algumas regiões do plano complexo, possuindo propriedades interessantes, e que vão ser úteis quando introduzirmos o conceito de função analítica.

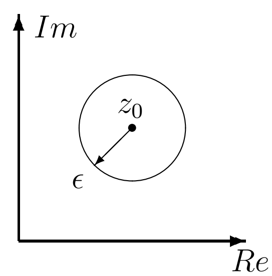

Figura 1.5: Uma vizinhança de z_0 com raio ϵ.

Uma vizinhança de um ponto z_0 é o conjunto de todos os pontos z para os quais

$$|z - z_0| < \epsilon$$

onde ϵ é um número real positivo. Note que $z - z_0$ é um vetor com origem em z_0 e extremidade em z, e $|z - z_0|$ é o comprimento desse vetor. Uma vizinhança consiste portanto dos pontos interiores (em breve vamos formalizar este conceito) ao círculo de raio ϵ, com centro em z_0. Note que, pela definição acima, z_0 pertence à vizinhança.

Dizemos que um ponto z_0 é um ponto de acumulação de um conjunto de pontos do plano complexo se e somente se *cada* vizinhança de z_0 contiver pontos do conjunto, distintos de z_0. Por exemplo, cada ponto z da circunferência de raio ϵ e centro em z_0, $|z - z_0| = \epsilon$, é ponto de acumulação da vizinhança de raio ϵ de z_0. Ainda com relação a esse exemplo, cada ponto z da vizinhança referida (isto é, cada ponto interior àquela circunferência) é um ponto de acumulação da vizinhança. Assim, vemos que um ponto de acumulação de dado conjunto pode pertencer a ele ou não.

Um ponto interior de um conjunto $S \in \mathbf{C}$ é tal que *alguma* de suas vizinhanças não contenha nada senão pontos de S. Como já mencionamos há pouco, os pontos da vizinhança de raio ϵ de z_0 são pontos interiores do conjunto $S = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq \epsilon\}$ consistindo da vizinhança e mais os pontos da circunferência $|z - z_0| = \epsilon$. S é o círculo de raio ϵ ao redor de z_0.

Um ponto de acumulação que não é interior é um ponto de fronteira do conjunto; a fronteira do conjunto S acima referido é constituído dos pontos da circunferência de raio ϵ ao redor de z_0.

Um conjunto aberto é aquele que contém apenas pontos interiores. Um conjunto fechado contém todos os seus pontos de acumulação (essa denominação é usada para conjuntos limitados, que estão sempre contidos dentro de certo disco $|z| = r$, para alguma constante real r).

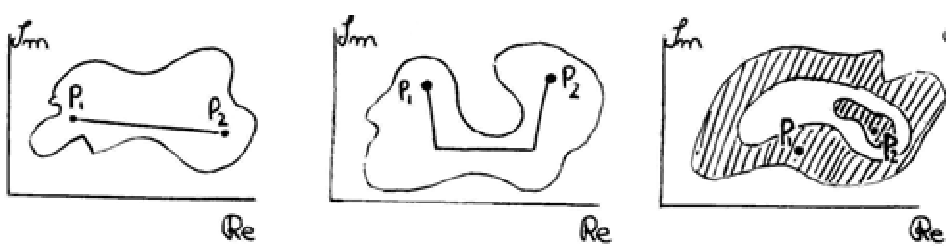

Figura 1.6: Regiões conexas e desconexas.

Uma região conexa possui a propriedade de que quaisquer dois pontos da mesma podem ser ligados por uma cadeia contínua de um número finito de segmentos totalmente contidos na região. Veja a figura 1.6 mostrando exemplos de regiões conexas (na esquerda e no centro), e desconexa (à direita), na qual por exemplo os pontos P_1 e P_2 não podem ser ligados por uma cadeia de segmentos que estejam contidos inteiramente na região hachurada.

Estamos agora preparados para dar uma definição importante, vamos até colocá-la numa caixa para o merecido destaque!

Uma região aberta e conexa é chamada domínio.

Voltando ao conceito de função de variável complexa, como o havíamos definido: uma função $f(z)$ associa pontos $z \in \mathcal{D}$ de um *domínio* $\mathcal{D}$ à pontos $f(z)$ pertencentes a um contra-domínio $\mathcal{CD}$ (que é também um domínio no plano complexo, como definido há pouco). Sempre que usarmos o termo função, estaremos querendo dizer função univalente, isto é, à cada valor da variável independente z se associa *um só* valor da função, $f(z)$. Há até uma regra gráfica, no caso de funções de variável real, para verificar se um objeto é uma função unívalente: traçamos uma reta paralela ao eixo dos $f(x)$ (digamos, uma reta vertical. Veja a figura 1.7) e observamos em quantos pontos ela corta o gráfico da função. Se cortar em um único ponto, ela será função univalente (também se usa o termo "função unívoca"). Quando a reta paralela ao eixo da função corta em mais de um ponto o gráfico de f, dizemos que ela é uma função plurívoca ou multivalente.

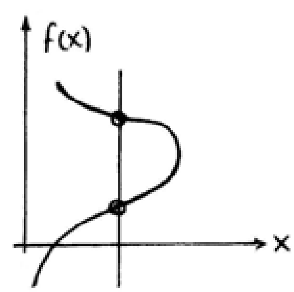

Figura 1.7: Uma função não-unívoca: para um mesmo x, dois valores de $f(x)$.

Por exemplo, a função $f(z) = z^{1/2}$ não é unívoca: à cada valor de z estão associados dois valores de $f(z)$ (as duas raízes), e a função é chamada bivalente.

Cada função de variável complexa tem seu domínio de definição. Funções do tipo

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

estão definidas em todo o plano complexo ($\mathcal{D} = \mathbf{C}$): são os polinômios. Os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes complexas.

Outras não estão definidas em alguns pontos ou regiões. Por exemplo,

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

não está definida em $z = \pm i$, pois nesses pontos o denominador se anula. Dizemos que $z = i$ e $z = -i$ são singularidades de $f(z)$.

Toda função $f(z)$ pode ser escrita na forma

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

onde u e v são funçòes a valores reais, de duas variáveis reais, x e y. Por exemplo,

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy)}_{v(x,y)}\,.$$

Estudemos agora o conceito de limite no contexto da teoria das funções de variável complexa. Suponha que $f(z)$ esteja definida numa vizinhança de um ponto z_0, exceto talvez no próprio ponto z_0. Então,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

se para cada real δ existir um real $\epsilon > 0$ tal que, se $z \neq z_0$,

$$|z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - w_0| < \epsilon\,.$$

À medida em que z se aproximar de z_0, $f(z) = u + iv$ deve se aproximar de w_0. No cálculo diferencial de funções reais vê-se que, para existir o limite, devem existir e coincidir os limites laterais (à esquerda e à direita). Aqui, para haver o limite, $f(z)$ deve tender ao mesmo valor w_0, qualquer que seja a direção segundo a qual z esteja se aproximando de z_0.

Exemplo Mostre, usando a definição, que

$$\lim_{z\to -2} \frac{z^3+8}{z+2} = 16\,.$$

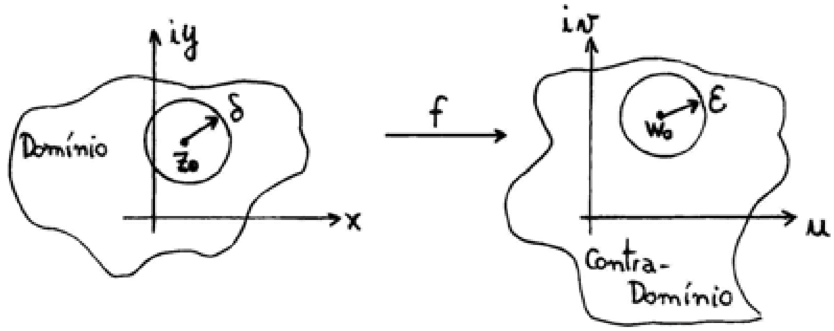

Figura 1.8: O conceito de limite para funções de variável complexa.

Antes de mais nada, note que a fração não está definida no ponto $z_0 = -2$ (numerador e denominador se anulam aí).

Formalmente, devemos mostrar que para cada $\delta > 0$ existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$|z - (-2)| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{z^3+8}{z+2} - 16 \right| < \epsilon \, .$$

Para cada $\delta > 0$, tomamos $\epsilon = \delta^2 + 8\delta$. Sempre que $|z+2| < \delta$ (com $z \neq -2$), teremos:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z^3+8}{z+2} - 16 \right| &= \left| \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{(z+2)} - 16 \right| = |(z^2-2z+4) - 16| \\
&= |(z-2)^2 - 16| = |[(z+2)-4]^2 - 16| \\
&= |(z+2)^2 - 8(z+2)| \leq |z+2|^2 + 8|z+2| \\
&< \delta^2 + 8\delta = \epsilon
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

É claro que, se a cada vez que calcularmos um limite simples desse tipo tivéssemos que nos preocupar com as "ϵ-caixas" e "δ-caixas", seria difícil avançar. Vêm em nosso auxílio regras práticas de cálculo de limites para funções de variáveis complexas. Na verdade, as mesmas regras válidas para o caso real geralmente continuam válidas para o caso complexo.

Enunciaremos a seguir, na forma de teoremas, algumas propriedades cujo uso simplifica o cálculo de limites de funções de variável complexa. Geralmente neste curso não demonstraremos teoremas, já que nosso interesse principal são as aplicações. Precisamos, sim, conhecer esses resultados; em alguns poucos casos as provas são instrutivas, ou então bastante simples, e nós as apresentaremos aqui.

Teorema Sendo $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = Re(w_0) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = Im(w_0) \end{cases}$$

Teorema Se $\lim_{z \to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim_{z \to z_0} f_2(z) = w_2$, então

(i) $\lim_{z \to z_0} [f_1(z) + f_2(z)] = w_1 + w_2$;

(ii) $\lim_{z \to z_0} [f_1(z).f_2(z)] = w_1.w_2$;

(iii) $\lim_{z \to z_0} [f_1(z)/f_2(z)] = w_1/w_2$ (se $w_2 \neq 0$).

Dizemos que uma função $f(z)$ é <u>contínua</u> em $z = z_0$ se e somente se:

(i) existe $f(z_0)$;

(ii) existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$;

(iii) $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

Os polinômios são funções contínuas em todo o plano complexo: para qualquer $z \in \mathbf{C}$,

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)\,.$$

Se duas funções são contínuas, sua soma, seu produto e seu quociente (exceto quando o denominador se anula) são também funções contínuas. Função contínua de função contínua é continua.

Vamos introduzir agora a derivada. Seja a função $f(z)$ definida nas vizinhanças de dado ponto z_0. Então a derivada de f no ponto z_0, se o limite existir, é:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Em certo sentido (recordando a observação sobre limites) a derivada no ponto z_0 existe se existir (e for única) a derivada em todas as direções, e não apenas em duas direções como no caso real. Por isso a condição de existência da derivada é bastante restritiva.

Exemplo Calculemos a derivada de $f(z) = z^3 - 2z$ num ponto qualquer z_0. Se $z \neq z_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z^3 - {x_0}^3 - 2z + 2z_0}{z - z_0} \\
&= \frac{(z - z_0)(z^2 + zz_0 + {z_0}^2) - 2(z - z_0)}{z - z_0} \\
&= z^2 + zz_0 + {z_0}^2 - 2\,,
\end{aligned}$$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^2 + zz_0 + {z_0}^2 - 2) = 3{z_0}^2 - 2\,.$$

Polinômios possuem derivada em qualquer parte do plano complexo; valem as relações usuais, como:

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}\,.$$

Exemplo Vamos tentar derivar $f(z) = |z|^2$. Note que, pela definição de módulo, $f(z)$ também pode ser escrita na forma $f(z) = z.z^*$, que facilita o cálculo a seguir. Aqui, $\delta z = z - z_0$.

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)({z_0}^* + \Delta z^*) - z_0{z_0}^*}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0{z_0}^* + z_0\Delta z^* + {z_0}^*\Delta z^* + \Delta z\Delta z^* - z_0{z_0}^*}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \left({z_0}^* + \Delta z^* + z_0 \frac{\Delta z^*}{\Delta z} \right)\,.
\end{aligned}$$

Em particular, no ponto $z_0 = 0$, $f'(z_0) = 0$ (por que?). Considere agora o caso $z_0 \neq 0$. Se fizermos o limite na direção do eixo real, isto é, $\Delta z = \Delta x \to 0$,

$$\text{limite lateral}_{\Delta x \to 0} \left[{z_0}^* + \Delta x + z_0 \frac{\Delta x}{\Delta x} \right] = {z_0}^* + z_0\,;$$

e fazendo o limite pelo eixo imaginário, $\Delta z = i\Delta y \to 0$,

$$\text{limite lateral}_{\Delta y \to 0} \left[{z_0}^* + (-i\Delta y) + z_0 \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} \right] = {z_0}^* - z_0\,;$$

assim, os dois limites laterais particulares não coincidem, logo não existe o limite, e consequentemente não há a derivada em $z_0 \neq 0$. A função $f(z) = |z|^2$ só é derivável em $z = 0$.

De novo, para calcular derivadas, na prática, não é necessário fazer tudo isso, existem regras que podem ser usadas, como as que seguem.

Teorema

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\text{constante}) &= 0 \\
\frac{d}{dz} z &= 1 \\
\frac{d}{dz}(f_1 + f_2) &= \frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} \\
\frac{d}{dz}(f.g) &= \frac{df}{dz}.g + f.\frac{dg}{dz} \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\,df/dz - f\,dg/dz}{g^2} \\
\frac{d}{dz} f[g(z)] &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz}
\end{aligned}$$

ATIVIDADES

1. Responda e explique: a região $|z - 2| \geq 2$ é um domínio? É limitada?

2. Responda e explique: a região $|z - 1| < 2$ é aberta ou fechada? É limitada ou não? É conexa ou não? Pode ser um domínio?

3. Responda e explique: a região $Im(z^2) > 1$ é aberta ou fechada? É limitada ou não? É conexa ou não? Pode ser um domínio?

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para resolver estas três questões, em primeiro lugar você terá que tentar visualizar essas regiões (se conseguir fazer um gráfico, ótimo), e observar se se trata de uma região aberta e conexa. Se essas duas condições se verificarem, a região é um domínio. Quanto a ser limitada, isso significa que ela está contida num círculo com um raio suficientemente grande (mas finito). Você encontra exemplos de regiões satisfazendo a todos esses critérios no texto.
Respostas às questões: (1) Não; não. (2) Aberta. Limitada. Conexa. É um domínio. (3) Aberta. Não é limitada. Não é conexa. Não é domínio.

CONCLUSÃO

Em função da grande utilização dos complexos em Física, é necessário fixar alguns conceitos sobre as funções de variável complexa. Um dos mais importantes é o de domínio de uma função complexa. Estendendo os conceitos de limite e derivada ao caso das funções de variável complexa, preparamos o terreno para a introdução das funções analíticas, que por possuírem notáveis propriedades, são as mais usadas em aplicações físicas.

RESUMO

Nesta aula você relembrou operações básicas com os números complexos, e tomou contato com as funções de variável complexa, que além de uma lei de associação de pontos, pressupõem um domínio de definição (e um contra-domínio). Você também acompanhou a formalização dos conceitos de limite e derivada para as funções de variável complexa.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você aprenderá como reconhecer se dada função é analítica ou não, conhecerá funções analíticas simples e usuais, e aprenderá a calcular integrais de funções de variável complexa.

REFERÊNCIAS

CHURCHILL, Ruel. Variáveis complexas e suas aplicações. São Paulo: McGraw Hill, 1975.
LAVRENTIEV, M., CHABAT, B. Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe. Moscou: MIR, 1977.
BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.