Funções Analíticas II

META

Conceituar função analítica, apresentar algumas funções analíticas elementares de uso frequente em Física e suas propriedades. Apresentar técnicas de cálculo de integrais de funções de variável complexa, sobre caminhos simples no plano complexo.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de: determinar se dada função de variável complexa é analítica ou não; trabalhar com funções analíticas elementares; calcular integrais de funções de variável complexa em contornos simples.

PRÉ-REQUISITOS

Assunto visto na aula anterior, "Funções Analíticas I".

INTRODUÇÃO

As funções analíticas, por possuirem propriedades importantes de continuidade e derivabilidade, são de uso frequente em Física Teórica. Para saber se dada função é analítica, fazemos uso das condições de Cauchy-Riemann, agregadas a critérios de continuidade. Veremos alguns exemplos de funções analíticas muito usuais, as chamadas funções elementares. Outra ferramenta de trabalho das mais importantes, com a qual tomaremos contato nesta aula, consiste na técnica de calcular integrais no plano complexo.

2.1 As Condições de Cauchy-Riemann

Teorema Condições necessárias (mas não suficientes!) para a existência da derivada:

Se a derivada $f'(z)$ de uma função $f(z) = u+iv$ existe num ponto z, então estão satisfeitas nesse ponto as condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,;$$

a derivada é dada por:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] +\ i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\,\Delta y} \end{aligned}$$

e como a derivada existe, o limite existe (e não depende da direção). Façamos $\Delta z = \Delta x$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $\Delta z = i\,\Delta y$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{i\,\Delta y\to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{i\,\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\,. \end{aligned}$$

Da igualdade dessas duas "derivadas laterais" seguem as condições de Cauchy-Riemann.

Teorema CS Condições suficientes (mas não necessárias!) para a existência da derivada:

Sejam u e v funções reais e univalentes de x e y as quais, juntamente com as derivadas $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, são todas contínuas. Se essas derivadas parciais satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, então existe a derivada.

Desconhece-se até o momento um conjunto de condições para a existência da derivada que sejam ao mesmo tempo necessárias e suficientes.

Uma **função** é **analítica num ponto** z_0 se for derivável não só em z_0, como em todos os pontos de alguma vizinhança de z_0. Uma **função** é **analítica num domínio** se for derivável em todos os pontos do domínio. Será uma **função inteira** quando for derivável em todos os pontos do plano complexo.

Polinômios são funções inteiras. A função $f(z) = |z|^2$ não é analítica em nenhum ponto, pois só é derivável em $z = 0$ (e em nenhuma vizinhança!).

Soma, produto e divisão de funções analíticas são analíticas, exceto quando o denominador se anular. Função analítica de função analítica é analítica.

Um alerta: no caso de funções de variável real, uma função contínua é derivável exceto nos chamados "pontos angulosos". Aqui, isso não vale. Por exemplo, $f(z) = |z|^2$ é contínua em $\mathbf{C}$, mas só é derivável em $z = 0$. Portanto, cuidado ao estender os resultados do caso real ao caso complexo (consulte, para saber mais detalhes, uma das referências citadas na bibliografia deste curso).

2.2 Funções Elementares

Falaremos agora um pouco sobre algumas funções analíticas usuais: são as "funções elementares".

2.2.1 A Função Exponencial

A função exponencial complexa é definida através da relação

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\,(cos\, y + i\, sen\, y)\,.$$

Note que $u(x,y) = e^x\, cos\, y$, $v(x,y) = -e^x\, sen\, y$, e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\, cos\, y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\, sen\, y = -\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

portanto u, v, $\partial u/\partial x$, $\ldots$, $\partial v/\partial x$ são contínuas em $\mathbf{C}$ e valem as condições de Cauchy-Riemann.

Pelo Teorema CS, existe a derivada (em todos os pontos de $\mathbf{C}$).

Também, como $e^z \neq 0$, para qualquer z, segue que e^{-z} também é analítica em todo $\mathbf{C}$, isto é, e^{-z} é uma função inteira.

A função exponencial complexa possui propriedades semelhantes ao caso real, como por exemplo

$$\begin{aligned} e^z &\neq 0\,; \\ (e^z)^n &= e^{nz}\,; \\ e^{z_1}e^{z_2} &= e^{z_1+z_2}\,; \\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1-z_2}\,; \\ \frac{d}{dz}e^z &= e^z\,. \end{aligned}$$

Há uma propriedade nova, bem diferente do caso real:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \;\; \text{(periodicidade)}\,.$$

2.2.2 As Funções Trigonométricas

As funções seno e cosseno, de variável complexa, são introduzidas assim:

$$sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,; \qquad cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,;$$

essas expressões se obtém de uma extensão da fórmula de Euler,

$$e^{iz} = cos\, z + i\, sen\, z\,.$$

As propriedades verificadas pelas funções trigonométricas seno e cosseno complexas são cópias das expressões do caso real,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} sen\, z &= cos\, z\,; \\
\frac{d}{dz} cos\, z &= -sen\, z\,; \\
sen^2 z + cos^2 z &= 1\,; \\
sen\,(z + 2n\pi) &= sen\, z\,; \\
cos\,(z + 2n\pi) &= cos\, z\,;
\end{aligned}$$

dentre outras.

É importante você observar que $sen\, z$ e $cos\, z$ só têm zeros reais.

Atenção: o fato de valerem as mesmas propriedades do caso real não é coincidência. Isso decorre do conceito de continuação analítica e de um teorema sobre zeros de funções analíticas. Na verdade, as funções elementares complexas, quando tomadas sobre o eixo real, correspondem às mesmas funções elementares de variável real, nossas conhecidas, e no restante do plano complexo, as fórmulas clássicas ligando as várias funções reais continuam válidas, como se fossem "estendidas" por todo o **C**. Esta extensão da validade de fórmulas no eixo real a todo o plano complexo revela-se como uma das propriedades surpreendentes, e que confere uma certa beleza e poder à teoria das funções analíticas.

Outras funções trigonométricas complexas podem ser definidas a partir do seno e cosseno,

$$\begin{aligned}
tg\, z &= \frac{sen\, z}{cos\, z}\,; \\
ctg\, z &= \frac{cos\, z}{sen\, z}\,; \\
sec\, z &= \frac{1}{cos\, z}\,; \\
csc\, z &= \frac{1}{sen\, z}\,.
\end{aligned}$$

Seno e cosseno complexos são funções inteiras. Como dissemos acima, os zeros de seno e cosseno complexos são aqueles usuais sobre o eixo real, e daí decorre que a tangente e a secante complexas terão como pontos singulares: $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$, e a cotangente e a cossecante terão singularidades em: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Valem as fórmulas, nossas velhas conhecidas do caso real,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} tg\, z &= sec^2\, z\,; \\ tg^2 z + 1 &= sec^2 z \end{aligned}$$

dentre outras.

2.2.3 As Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas complexas, seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica complexas, são definidas a partir da função exponencial complexa,

$$\begin{aligned} sh\, z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,, \\ ch\, z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,, \\ tgh\, z &= \frac{sh\, z}{ch\, z}\,. \end{aligned}$$

A propriedade nova aqui é a periodicidade: $sh\, z$ e $ch\, z$ têm período $2\pi i$ e $tgh\, z$ é periódica com período πi.

2.2.4 A Função Logarítmica. Ramos

Para definir a função logarítmica complexa, é melhor usar a representação polar de z,

$$\begin{aligned} ln\, z &= ln\, \left[r\, e^{i\theta}\right] = ln\ r + ln\ e^{i\theta} \\ &= ln\ r + i\, \theta \end{aligned}$$

desde que $r > 0$.

Temos aí uma função multivalente, pois o <u>mesmo</u> ponto z pode ser representado por θ, $\theta \pm 2\pi$, $\theta \pm 4\pi$, $\ldots$, e para esses diferentes valores de θ temos <u>distintos</u> valores de $ln\, z$, quais sejam: $ln\, r + i\theta$, $ln\, r + i(\theta \pm 2\pi)$, $ln\, r + i(\theta \pm 4\pi)$, $\ldots$

Escolhe-se portanto um <u>domínio</u> onde $ln\, z$ seja analítica e univalente. Uma possibilidade é o chamado "ramo principal",

$$r > 0\,, \qquad -\pi < \theta < \pi\,.$$

Se escolhessemos a região $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ (isto é, o plano complexo todo menos a origem, na qual $ln\, r$ não está definido) cada ponto $x_0 < 0$ do eixo real negativo seria um ponto de descontinuidade de $ln\, z$, como vamos explicar: o limite "por cima" seria $ln\,|x_0| + i\pi$, e "por baixo" $ln\,|x_0| - i\pi$. Também, nesses pontos do semi-eixo real negativo, a função $ln\, z$ não seria analítica. Veja a figura 2.1 mostrando o ramo principal, no qual se excluiu o semi-eixo negativo para evitar as referidas singularidades.

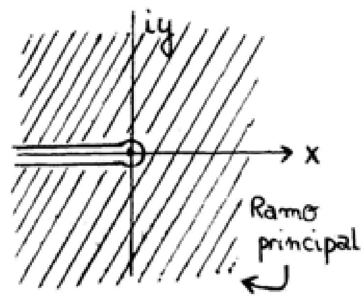

Figura 2.1: O ramo principal da função logarítmica.

O raio $\theta = \pi$ (semi-eixo real negativo) é chamado <u>corte</u> <u>de</u> <u>ramo</u> e $z = 0$ um <u>ponto de ramificação</u>. Exemplos de outros ramos de $ln\, z$:

$$\begin{array}{ll} r > 0, & 0 < \theta < 2\pi \\ r > 0, & \pi < \theta < 3\pi \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Valem as propriedades usuais, como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} ln\, z &= \frac{1}{z} \\ ln\, e^z &= z \\ e^{ln\, z} &= z \\ ln\, z_1 z_2 &= ln\, z_1 + ln\, z_2 \\ ln\, \frac{z_1}{z_2} &= ln\, z_1 - ln\, z_2\,. \end{aligned}$$

ATIVIDADES

1. Mostre que e^z é uma função inteira.

2. Ídem, para $sen\, z$. Mostre que sua derivada é $cos\, z$.
3. Mostre que $sen^2\, z + cos^2\, z = 1$.
4. Calcule: (a) $sen\, 2\pi i$; (b) $ch\, i\pi$ (c) $tg\, i\pi/2$.
5. Demonstre que $ln\,(z_1 + z_2) = ln\, z_1 + ln\, z_2$.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para resolver os dois primeiros exercícios, você terá que fazer uso das condições de Cauchy-Riemann, não apenas calculando a derivada, mas determinando em que pontos essa derivada existe. Do terceiro ao último exercício, terá que partir da definição das funções elementares. Confira com seus colegas o resultado dos exercícios quarto e quinto.

2.3 Integrais

Vamos passar agora ao estudo de integrais de funções de variáveis complexas. Neste texto, vamos nos manter sempre dentro da perspectiva de concentrar em aplicações, abrindo mão da apresentação axiomática e dedutiva da teoria das variáveis complexas, apesar de ser esta reconhecidamente muito bela e poderosa. Apresentaremos, no que segue, alguns exemplos ilustrando o cálculo de integrais seguindo certos caminhos no plano complexo.

Exemplo Calcule:

$$\int_O^B (1 + 2z)\, dz$$

ao longo do segmento de reta unindo a origem O e o ponto $B = 1 + i$ do plano complexo (veja a figura 2.2). Compare com o cálculo pelo caminho OA e AB ($\overline{OA} = 1$, $\overline{AB} = 1$).

O cálculo de integrais de funções complexas lembra um pouco o cálculo de integrais de linha no plano, envolvendo funções de duas variáveis reais.

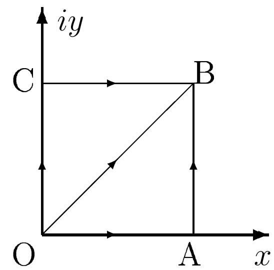

Figura 2.2: Alguns caminhos possíveis no plano complexo, ligando os pontos O (origem) e $B = 1 + i$.

Quando z percorre o caminho reto OB, suas partes real e imaginária podem ser parametrizadas assim:

$$x = t\,, \qquad y = t\,,$$

com t variando de 0 a 1,

$$\begin{aligned}
\int_O^B (1+2z)\,dz &= \int_O^B (1+2x+2iy)(dx+idy) \\
&= \int_0^1 (1+2t+2it)\,(dt+idt) = \\
&= (1+i)\int_0^1 [(1+2(1+i)t]\,dt \\
&= (1+i)\int_0^1 dt + 2(1+i)^2 \int_0^1 t\,dt \\
&= 1+i+2(1+i)^2\,\frac{1}{2} = 1+3i\,.
\end{aligned}$$

Agora, para calcularmos a integral ao longo do segmento OA, parametrizamos $x = t$ e $y = 0$:

$$\int_O^A (1+2z)\,dz = \int_0^1 (1+2t)\,dt = 2$$

e no caminho AB, $x = 1 =$ constante, $y = t$,

$$\int_A^B (1+2z)\,dz = \int_0^1 (1+2+2it)(0+idt) = -1+3i\,.$$

Resumindo, a integral no caminho OA que obtivemos foi 2 e no caminho AB foi $-1+3i$, portanto a soma das integrais nos caminhos OA e AB vale: $2-1+3i=1+3i$ ou seja, igual à integral calculada pelo caminho OB.

Você pode (e deve!) fazer também cálculo semelhante pelo caminho OC e depois CB, o resultado também deve dar $1+3i$.

Ou, fazendo a integral no caminho fechado $OABCO$ (percorrendo o quadrado em sentido anti-horário), obtemos o valor:

$$\int_{OABCO}(1+2z)\,dz = 2+(-1+3i)+(-2-2i)+(1-i)=0,$$

onde tivemos que inverter o sinal das integrais obtidas para BC e CO, já que por exemplo

$$\int_B^C (1+2z)\,dz = -\int_C^B (1+2z)\,dz\,.$$

Você pode verificar também que as integrais nos triângulos $OABO$ ou $OBCO$ também se anulam. Tais resultados nulos quando se calcula uma integral em um percurso fechado não é uma coincidência, como veremos!

Exemplo Calcule:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1+2z}{z^2}\,dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a circunferência $|z|=1$ orientada no sentido anti-horário (veja a figura 2.3).

Usamos, neste caso, a representação polar, $z=r\,e^{i\theta}=e^{i\theta}$ (pois $r=1$),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{1+2z}{z^2}\,dz &= \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2} + 2\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{2i\theta}} + 2\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{i\theta}} \\
&= i\left[\frac{e^{-i\theta}}{-i}\right]_0^{2\pi} + 4\pi i = 4\pi i\,.
\end{aligned}$$

No exemplo anterior, a integral de $(1+2z)$ ao longo do caminho fechado (um quadrado) se anulou; aqui, a integral de $(1+2z)/z^2$ na

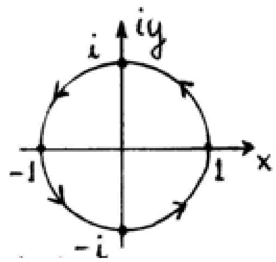

Figura 2.3: Uma circunferência orientada, de raio 1, no plano complexo.

circunferência não é nula. Há uma explicação para isso: veja o teorema de Cauchy-Goursat, que enunciaremos a seguir.

Teorema de Cauchy-Goursat Seja $f(z)$ analítica sobre um caminho fechado $\mathcal{C}$ e em seu interior. Então,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0\,.$$

No último exemplo visto, $f(z) = 1/z$ não é analítica no ponto $z = 0$, que está no interior do caminho $\mathcal{C}$, daí a integral não ser nula.

O teorema de Cauchy-Goursat pode ser colocado numa forma mais geral.

Extensão do Teorema de Cauchy-Goursat Seja $f(z)$ analítica sobre um caminho fechado $\mathcal{C}$ e em seu interior, exceto num conjunto de pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ que podem ser isolados dentro de círculos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\ldots$, $\mathcal{C}_n$. Chamaremos de $\mathcal{B}$ a fronteira constituída por $\mathcal{C}$ (tomada no sentido anti-horário) e por $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\ldots$, $\mathcal{C}_n$ (sentidos horários). Ou seja, $\mathcal{B}$ é a fronteira da região hachurada da figura 2.4, orientada de forma tal que a região esteja sempre à esquerda da fronteira quando ela é percorrida no sentido da orientação (esse é o tipo de orientação que se convenciona chamar de positiva). Então,

$$\int_{\mathcal{B}} f(z)\, dz = 0\,.$$

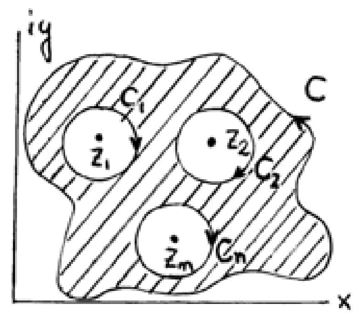

Figura 2.4: Uma região e sua fronteira orientada $\mathcal{B}$.

Exemplo Calcule:

$$\int_{\mathcal{B}} f(z)\, dz$$

onde

$$f(z) = \frac{1 + 2z}{sen\, z/2}$$

e $\mathcal{B}$ é a fronteira da região entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado sobre as retas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, orientada positivamente (figura 2.5).

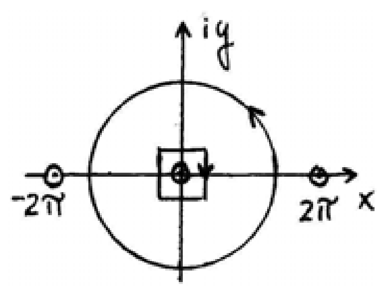

Figura 2.5: Uma região entre uma circunferência e um quadrado, no plano complexo.

Notamos que $(1+2z)/sen\,(z/2)$ é analítica, exceto para $sen\,(z/2) = 0$, o que ocorre para:

$$z = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

Portanto, entre a circunferência e o quadrado, e sobre eles, a função é analítica, logo pela Extensão do Teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_{\mathcal{B}} f(z)\,dz = 0\,.$$

O resultado que apresentaremos a seguir é um dos mais importantes.

Fórmula Integral de Cauchy Seja $f(z)$ analítica sobre um caminho fechado $\mathcal{C}$ e em seu interior. Se z_0 é interior a $\mathcal{C}$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\,.$$

Este resultado é simplesmente espetacular! Conhecendo-se o valor de $f(z)$ sobre o contorno $\mathcal{C}$, conseguimos calcular o valor da função f em <u>cada</u> ponto z_0 interior a $\mathcal{C}$. Em outras palavras, a função está completamente determinada numa região, se conhecemos seus valores no contorno dessa região. Isso mostra também que o conceito de função analítica é bastante restritivo. Outra propriedade forte: se $f(z)$ é analítica numa região, suas derivadas de <u>todas</u> as ordens também serão analíticas nessa região.

Exemplo Calcule a integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz$$

onde $\mathcal{C}$ é o contorno do quadrado entre as retas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$, orientada positivamente (figura 2.6).

Para resolver este problema, note que $f(z) = e^{-z}$ é inteira (analítica em $\mathcal{C}$ e em seu interior); $z_0 = i\pi/2$ é interior a $\mathcal{C}$. Logo, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i\, e^{-\pi i/2} = 2\pi\,.$$

ATIVIDADES

1. Considere os pontos no plano complexo: $O = 0$; $A = 4$; $B = 4 + 2i$, $C = 2i$. Seja $f(z) = f(x+iy) = (3 + x^2 - y^2) + 2xy\,i$. Calcule a integral complexa

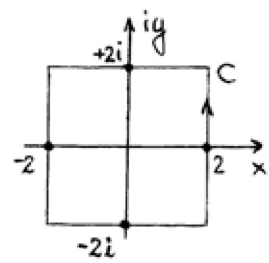

Figura 2.6: Um contorno quadrado no plano complexo, para uso da fórmula integral de Cauchy.

$$\int_O^B f(z)\, dz$$

nos seguintes caminhos ligando O a B: (i) segmento de reta OB; (ii) segmentos de reta OA e AB; (iii) segmentos de reta OC e CB. (iv) Calcule também a integral no caminho fechado percorrendo o retângulo no sentido anti-horário: $OABCO$. Com base nesses resultados, você pode suspeitar que $f(z)$ é analítica no quadrado $OABCO$?

2. Calcule $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$ onde

$$f(z) = \frac{2\, z^3 + 3\, i}{z(z+1)}$$

e $\mathcal{C}$ é a circunferência de raio 2 com centro em $A = 1 + i$, orientada positivamente

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para o cálculo dessas integrais, você terá que seguir os exemplos resolvidos no texto. No primeiro problema, terá que fazer uma parametrização de x e y para cada um dos segmento de reta referidos. Para conferir: os ítens (i), (ii) e (iii) dão a mesma resposta! O ítem (iv) deve fornecer um valor nulo. A resposta do segundo problema é -6π.

CONCLUSÃO

As funções analíticas gozam de propriedades bastante restritivas, como a continuidade e derivabilidade, e por isso mesmo possuem características que as tornam bastante úteis na Física Teórica, como expresso por exemplo na fórmula integral de Cauchy. Isto permite que sejam usadas no cálculo de integrais no plano complexo.

RESUMO

Nesta aula definimos função analítica, tomamos contato com funções analíticas elementares, e introduzimos a técnica de cálculo de integrais em alguns caminhos no plano complexo.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos as expansões em séries de Laurent, e o cálculo de integrais por resíduos.

REFERÊNCIAS

CHURCHILL, Ruel. Variáveis complexas e suas aplicações. São Paulo: McGraw Hill, 1975.

LAVRENTIEV, M., CHABAT, B. Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe. Moscou: MIR, 1977.

BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.