Aula

3

Funções Analíticas III

META

Apresentar a técnica de desenvolvimento de funções a valores complexos em série de Laurent, calcular resíduos e, através destes, efetuar o cálculo de integrais de vários tipos.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: efetuar expansões em séries de potências positivas e negativas; calcular resíduos de funções complexas; calcular integrais em caminhos fechados no plano complexo, e integrais reais com o auxílio dos resíduos.

PRÉ-REQUISITOS

Assunto visto nas aulas anteriores, Funções Analíticas I e II.

INTRODUÇÃO

Um dos tipos de aplicações mais relevantes das funções de variável complexa em Física é o cálculo de integrais através de resíduos. Nesta aula mostraremos como podemos, a partir de uma função de variável complexa, obter uma expansão em série de Laurent e, desta, conseguir o resíduo ao redor de uma singularidade. Tal técnica é aplicada para o cálculo de integrais no plano complexo, e também de algumas integrais reais.

3.1 Séries de Laurent

Muito embora tenhamos reservado um outro capítulo (posterior) deste curso para séries infinitas, precisaremos antecipar alguns resultados, que serão melhor discutidos adiante.

Teorema Seja $f(z)$ uma função analítica em todos os pontos interiores a um círculo $\mathcal{C}_0$ com centro em z_0 e raio r_0. Então, em cada ponto z interior a $\mathcal{C}_0$, a série de Taylor para f converge,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots$$

Observe que a série de Taylor acima para $f(z)$, tomada em torno de $z = z_0$, é uma série de potências <u>positivas</u> de $(z - z_0)$.

Exemplo Represente a função

$$f(z) = \frac{3z}{z^2 - 9}$$

em série de potências positivas e negativas de $(z - 3)$, que convirja para $0 < |z - 3| < 6$ (isto corresponde ao interior de um círculo de raio 6 com centro em $z = 3$, excluído o próprio ponto $z = 3$).

Neste caso, $z_0 = +3$, e queremos representar $f(z)$ em série de potências de $(z - 3)$. Escrevemos, antes de mais nada:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3z}{z^2 - 9} = \frac{1}{z - 3}\,\frac{3z}{z + 3}\,; \\ \frac{3z}{z + 3} &= 3\left[\frac{z + 3}{z + 3} - \frac{3}{z + 3}\right]\,; \end{aligned}$$

e agora vamos expandir $g(z) = 1/(z + 3)$, de acordo com a série de Taylor. Precisaremos das derivadas de g,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z + 3}\,;\; g'(z) = \frac{-1}{(z + 3)^2}\,;\; g''(z) = \frac{(-1)(-2)}{(z + 3)^3}\,; \\ g'''(z) &= \frac{(-1)(-2)(-3)}{(z + 3)^4}\,; \ldots \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z+3} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{1!}\frac{(-1!)}{6^2}(z-3) + \frac{1}{2!}\frac{+2!}{6^3}(z-3)^2 + \\ &+\frac{1}{3!}\frac{(-3!)}{6^4}(z-3)^3 + \ldots \end{aligned}$$

A função $f(z)$ fica, finalmente:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3}\,3\left\{1-\frac{3}{z+3}\right\} \\ &= \frac{3}{z+3} - \frac{9}{z+3}\left\{\frac{1}{6} - \frac{(z-3)}{6^2} + \frac{(z-3)^2}{6^3} - \frac{(z-3)^3}{6^4} + \ldots\right\} \\ &= \frac{1}{2(z-3)} + \frac{1}{4} - \frac{(z-3)}{24} + \frac{(z-3)^2}{144} - \ldots \end{aligned}$$

Teorema Se $f(z)$ é analítica entre as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e sobre elas, então para todo z entre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots\right] + \\ &+ \left[\frac{A_{-1}}{z-z_0} + \frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\,(z-z_0)^n\,, \end{aligned}$$

sendo z restrito à região $r_1 < |z-z_0| < r_2$ (que é a coroa circular mostrada na figura 3.1), e os coeficientes A valem:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,, \quad (n = 0, 1, 2, ...)\,; \\ A_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,, \quad (n = 1, 2, ...)\,. \end{aligned}$$

Uma série como a apresentada acima é chamada <u>série</u> <u>de</u> <u>Laurent</u>.

Entretanto, não é com tais expressões de A_n e A_{-n} envolvendo integrais que, na prática, obtemos os coeficientes da expansão. Em

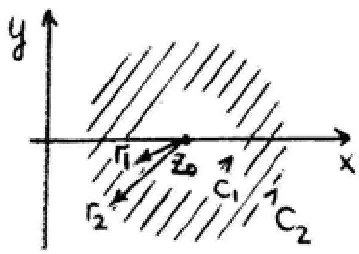

Figura 3.1: A região no plano complexo entre as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em torno de z_0.

vez disso, recorremos a expansões como a do exemplo anterior, ou a expansões usuais para funções de variável real que se estendem sem alteração ao caso complexo, como as séries de McLaurin (ou seja, séries de Taylor em torno de $z = 0$) seguintes:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots ; \\ cos\, z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots ; \\ sen\, z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots ; \\ \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots . \end{aligned}$$

Exemplos Apresentaremos agora dois exemplos de expansões em série tipo Laurent. Considere

$$f(z) = \frac{1}{z+3} ;$$

a função f apresenta apenas um termo da série de Laurent ao redor de $z_0 = -3$, sendo $A_{-1} = 1$ e todos os outros A_n são nulos. Seja a função

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{e^{-z^2}}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left[1 + \frac{-z^2}{1!} + \frac{(-z^2)^2}{2!} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} + \frac{z}{2} - \frac{z^3}{6} + \ldots \end{aligned}$$

e os primeiros coeficientes para $g(z)$ são, claramente, $A_{-3} = 1$, $A_{-1} = -1$, $A_1 = 1/2$, $A_3 = -1/6$. Observe que os A_{2j} são nulos. Essa expansão se fez ao redor de $z_0 = 0$.

3.2 Pontos Singulares. Resíduos

Definição Diremos que z_0 é um ponto singular isolado de $f(z)$ se f for analítica em todos os pontos de alguma vizinhança de z_0, exceto em z_0.

Exemplos Um exemplo clássico de ponto singular isolado é o ponto $z_0 = 0$, para a função $f(z) = 1/z$. Como outro exemplo, considere a função

$$g(z) = \frac{1+2z}{z(z^2+9)}\,,$$

neste caso temos os pontos singulares isolados $z = 0$, $z = +3i$ e $z = -3i$, que anulam o denominador da fração.

Já a função $h(z) = sec\,(\pi/z)$ tem como pontos singulares os zeros do cosseno de π/z, que são obtidos de:

$$\frac{\pi}{z} = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

e assim

$$z = \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{5}, \ldots$$

Todos esses são pontos singulares isolados de $h(z)$. Porém, o ponto $z = 0$ é ponto singular, mas não é isolado, uma vez que toda vizinhança de $z = 0$ contém outra singularidade, da forma $2/(2N+1)$ para algum N suficientemente grande.

Teorema Quando z_0 for um ponto singular isolado de $f(z)$, existe uma expansão em série de Laurent para $f(z)$ ao redor de z_0. O coeficiente A_{-1} que multiplica $1/(z - z_0)$ nessa expansão é chamado resíduo de $f(z)$ no ponto z_0, e vale:

$$Res\,[f(z)]_{z=z_0} = A_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz\,.$$

Temos aí um poderoso método de calcular integrais! Veremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo Calcule a integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^2-9}\, dz$$

onde $\mathcal{C}$ é o círculo $|z-2| < 2$, com centro em $z = 2$ e raio 2, orientado no sentido anti-horário.

Antes de mais nada, observe que a função no integrando é analítica dentro do referido círculo, com excessão do ponto $z_0 = 3$. Portanto, pelo teorema anterior, a integral será proporcional ao resíduo da função no ponto $z_0 = 3$. Tínhamos achado, num exemplo anterior, a expansão:

$$\frac{3z}{z^2-9} = \frac{1}{2(z-3)} + \frac{1}{4} - \frac{(z-3)}{24} + \frac{(z-3)^2}{144} - \dots$$

e vemos que o coeficiente do termo $1/(z-3)$ vale $1/2$, exatamente o resíduo de que necessitamos. Assim,

$$A_{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^2-9}\, dz\,,$$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^2-9}\, dz = \pi i\,.$$

Note que o círculo $\mathcal{C}$ não é centrado na origem, nem em $z = 3$. Na verdade, o caminho não precisa nem ser um círculo! Basta ser fechado e envolver (apenas) a singularidade isolada $z_0 = 3$.

Da Extensão do Teorema de Cauchy-Goursat decorre o seguinte resultado.

Teorema dos Resíduos Suponha que $\mathcal{C}$ seja um caminho fechado, tal que $f(z)$ é analítica sobre $\mathcal{C}$ e em seu interior, exceto num número finito de pontos singulares isolados z_1, z_2, …, z_n interiores a $\mathcal{C}$. Então,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\,[f(z)]_{z_k}\ .$$

Suponha que z_0 é ponto singular isolado de $f(z)$, e que $A_{-n-1} = A_{-n-2} = \ldots = 0$. Nesse caso, a expansão de $f(z)$ ao redor de z_0 é dada por

$$f(z) = \frac{A_{-1}}{z-z_0} + \frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n\,(z-z_0)^n\,.$$

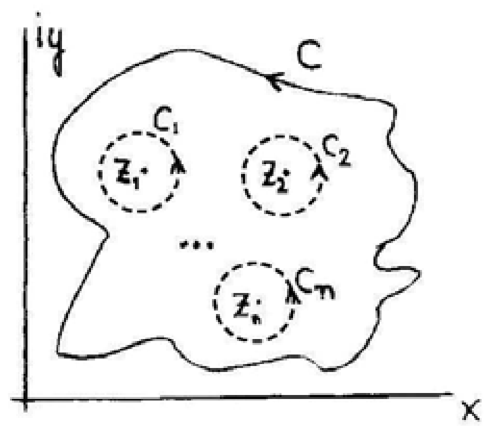

Figura 3.2: Um caminho $\mathcal{C}$ no plano complexo, contendo alguns pontos singulares isolados z_1, z_2, $\ldots$, z_n.

Nessas condições, o ponto singular isolado z_0 é um polo de ordem n de $f(z)$. Se f for analítica, exceto por pontos singulares que são polos, então recebe o nome de função meromorfa. Quando a parte de potências negativas de $(z - z_0)$ tiver uma infinidade de termos, z_0 é um ponto singular essencial de $f(z)$.

Exemplo A função:

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{z - 1}$$

tem um polo simples (isto é, polo de ordem 1) em $z_0 = 1$, pois

$$\begin{aligned} \frac{z^2+2}{z-1} &= \frac{z^2 - 2z + 1}{z-1} + \frac{2z+2}{z-1} + \frac{(-1)}{z-1} \\ &= 1\,.\,(z-1) + 2 + \frac{(-1)}{z-1} \end{aligned}$$

e o resíduo de $f(z)$ nesse polo vale (-1).

A função

$$g(z) = \frac{sen\, z}{z^3}$$

terá um polo de ordem 2 em $z_0 = 0$, já que, usando a expansão em série de Taylor para o seno,

$$\begin{aligned} \frac{sen\, z}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}z^2 + \dots \end{aligned}$$

Neste polo, o resíduo de g será nulo.

O ponto $z_0 = 0$ é também um ponto singular para a função h,

$$\begin{aligned} h(z) &= sh\,\frac{1}{z} = \frac{e^{1/z} - e^{-1/z}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots\right]\right\} \\ &= \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

mas esta singularidade é essencial. O resíduo de h vale 1.

Neste ponto, vamos tentar reunir as idéias a respeito do cálculo de integrais por resíduos.

Se valer a convergência da série de Laurent para dada função analítica numa região delimitada por um contorno $\mathcal{C}$, ao redor de um ponto singular isolado z_0, então

$$2\pi i A_{-1} = \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz\,.$$

Calcularemos indiretamente essa integral, através de série tipo Laurent de onde identificamos o resíduo A_{-1}, que é o coeficiente do termo $1/(z - z_0)$ nessa expansão. Mas há outras formas de se calcular o resíduo.

O resíduo num polo simples pode ser obtido, em muitos casos mais facilmente, através do limite:

$$Res\,[f(z)]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}[(z - z_0)\, f(z)]\,.$$

Mais geralmente, calcula-se o resíduo num polo de ordem n com a seguinte expressão:

$$Res\,[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z - z_0)^n\, f(z)\right]\right\}\,.$$

Em particular, se $f(z)$ for uma razão de duas funções,

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\,,$$

então o resíduo de f no ponto singular z_0 pode ser obtido de:

$$Res\,[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

sendo z_0 um zero simples de f (ou seja, $f(z_0) = 0$) e desde que $\varphi(z_0)$ não seja nulo.

Exemplo Retomemos o exemplo anterior que envolvia o cálculo do resíduo da função

$$f(z) = \frac{3z}{z^2 - 9} = \frac{3z}{(z+3)(z-3)}$$

no ponto singular $z_0 = 3$. Usaremos, desta vez, a fórmula acima para polo simples,

$$Res\,[f(z)]_{z=3} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \frac{\left[\frac{3z}{z+3}\right]_{z=3}}{\left[\frac{d(z-3)}{dz}\right]_{z=3}} = \frac{3}{2}\,.$$

Da mesma forma, poderíamos calcular rapidamente o resíduo dessa função no ponto $z = -3$,

$$Res\,[f(z)]_{z=-3} = \frac{\left[\frac{3z}{z-3}\right]_{z=-3}}{\left[\frac{d(z+3)}{dz}\right]_{z=-3}} = \frac{3}{2}\,.$$

Exemplo Calcule a integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^2 - 9}\,dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a circunferência $|z| = 4$, orientada no sentido anti-horário.

A função no integrando é a mesma de um exemplo anterior, mas agora o caminho $\mathcal{C}$ envolve dois polos simples, $z = -3$ e $z = +3$. Com os resíduos calculados no Exemplo anterior, 1.15, vem:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{3z}{z^2-9}\,dz &= 2\pi i\left\{Res\left[\frac{3z}{z^2-9}\right]_{z=+3} + Res\left[\frac{3z}{z^2-9}\right]_{z=-3}\right\}\\ &= 2\pi i\left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right\} = 6\pi i\,.\end{aligned}$$

Exemplo Calcule a integral

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{z^4}{(z^2+4)(z+4)}\,dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a circunferência $|z| = 3$, orientada no sentido positivo.

Vemos que a função $f(z)$ no integrando tem singularidades em $z_1 = +2i$, $z_2 = -2i$ e $z_3 = -4$, todas correspondendo a polos simples, mas z_3 está fora do caminho fechado $\mathcal{C}$. Pelo Teorema dos Resíduos,

$$I = 2\pi i\,\{Res[f(z)]_{z=+2i} + Res[f(z)]_{z=-2i}\}$$

No polo simples $z = +2i$, o resíduo vale:

$$Res = \lim_{z\to+2i} \frac{z^4}{(z+2i)(z+4)} = \frac{16}{4i(2i+4)} = \frac{-2-4i}{5}$$

e em $z = -2i$,

$$Res = \lim_{z\to-2i} \frac{z^4}{(z-2i)(z+4)} = \frac{16}{(-4i)(-2i+4)} = \frac{2+4i}{5}\,.$$

Assim, $I = 0$.

Exemplo Calcule a integral

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a circunferência $|z| = 4$, orientada positivamente, e

$$f(z) = \frac{3+z^3}{(z+1)^2(z-3)}\,dz\,.$$

Dentro do caminho fechado $\mathcal{C}$ temos um polo simples em $z = 3$ e um polo duplo em $z = -1$. Os resíduos valem:

$$Res[f(z)]_{z=3} = \lim_{z\to 3} \frac{3+z^3}{(z+1)^2} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$$

$$\begin{aligned} Res[f(z)]_{z=-1} &= \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{d}{dz} \frac{3+z^3}{z-3} \right\} = \lim_{z\to -1} \frac{3z^2.(z-3) - (3+z^3).1}{(z-3)^2} \\ &= \frac{3.(-4) - (3-1).1}{(-4)^2} = -\frac{7}{8}\,. \end{aligned}$$

A integral vale, então,

$$I = 2\pi i \left(-\frac{7}{8} + \frac{15}{8} \right) = 2\pi i\,.$$

O método também pode ser usado para calcular integrais reais, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo Calcule a integral por resíduos,

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx\,.$$

Antes de mais nada, vê-se que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

devido ao fato do integrando ser uma função par.

Considere, por um momento, um contorno fechado na forma de semi-círculo de raio R, como o mostrado na figura 3.3. Podemos escrever:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2+4} = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^2+4} + \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{R}}} \frac{dz}{z^2+4}\,,$$

mas a integral à esquerda, no semi-círculo fechado $\mathcal{C}$, pode ser calculada por resíduos,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2+4} = 2\pi i\, Res\left[\frac{1}{z^2+4}\right]_{z=+2i} = 2\pi i \lim_{z\to +2i} \frac{1}{z+2i} = 2\pi i\,\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}\,.$$

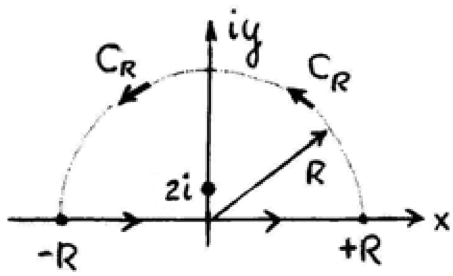

Figura 3.3: Um caminho para o cálculo de integral real.

Quanto à integral sobre o semi-círculo $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, vemos que:

$$\left|\frac{1}{z^2+4}\right| \leq \frac{1}{|z|^2-4} = \frac{1}{R^2-4}$$

uma vez que, sobre o círculo, z vale $R\,e^{i\theta}$. Integrando, obtemos:

$$\left|\int_{\mathcal{C}_\mathcal{R}} \frac{dz}{z^2+4}\right| \leq \int_{\mathcal{C}_\mathcal{R}} \frac{|dz|}{|z^2+4|} \leq \frac{1}{R^2-4}\int_0^\pi R\,d\theta = \frac{\pi R}{R^2-4}$$

que tende para zero à medida que R tende para infinito. Nesse limite,

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}\,.$$

Por fim,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Exemplo Calcule a integral por resíduos,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\,cos\,\theta}\,.$$

Note que o denominador do integrando não se anula. O truque aqui usado é efetuar uma mudança de variável,

$$z = e^{i\theta}\,; \qquad dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta\,.$$

$$cos\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\,;$$

Com isso, o denominador do integrando de I se escreve:

$$\begin{aligned} 5 + 3\,cos\,\theta &= 5 + 3\,\frac{z^2+1}{2z} = \frac{3z^2 + 10z + 3}{2z} \\ &= \frac{3(z+1/3)(z+3)}{2z} \end{aligned}$$

e podemos agora calcular I por resíduos,

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{2z}{3(z+1/3)(z+3)}\,\frac{dz}{iz} = 2\pi i\,Res[f(z)]_{z=-1/3} \\ &= 2\pi i\frac{-2i}{3(-1/3+3)} = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

ATIVIDADES

1. Classifique as singularidades de $(z-4)/(z^4-4z^2)$ (diga se se trata de polo, de que ordem, ou se é singularidade essencial). Ache os respectivos resíduos.

2. Calcule as integrais reais seguintes, usando resíduos:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon\,cos\,x}$$

sendo $|\epsilon| < 1$;

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}\,.$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Tanto para fazer a classificação das singularidades, quanto para calcular as integrais I_1 e I_2, você deve seguir um procedimento semelhante aos exemplos resolvidos no texto.

CONCLUSÃO

Uma das aplicações importantes da teoria das funções analíticas em Física é o emprego do Teorema dos Resíduos para o cálculo de certas integrais, que geralmente envolvem singularidades no caminho de integração ou no seu interior.

RESUMO

Nesta aula aprendemos a calcular integrais reais e integrais em caminhos fechados no plano complexo, com o auxílio dos resíduos, que podem ser obtidos, por exemplo, a partir de expansões em série de Laurent.

PRÓXIMA AULA

Iniciaremos o estudo da estrutura linear, que está por trás dos espaços de vetores e de funções de uso comum nas mecânicas clássica e quântica.

REFERÊNCIAS

CHURCHILL, Ruel. Variáveis complexas e suas aplicações. São Paulo: McGraw Hill, 1975.
LAVRENTIEV, M., CHABAT, B. Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe. Moscou: MIR, 1977.
BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.