Espaços Lineares

META

Apresentar a estrutura linear, que permeia os espaços de vetores da mecânica Newtoniana, bem como os espaços das funções de onda quânticas. O trabalho com essas entidades fundamentais da Física seguem as regras e operações dos espaços lineares, que devem ser trabalhadas e fixadas.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: determinar se dado espaço satisfaz os requisitos para ser um espaço vetorial; identificar conjuntos de vetores com propriedades de dependência ou independência lineares, e bases; compreender o conceito de dimensão de um espaço, e relacioná-lo ao conceito de base.

PRÉ-REQUISITOS

Nenhum.

INTRODUÇÃO

Na Física Teórica, costumamos elaborar teorias que são a representação matemática de classes de fenômenos físicos. O substrato matemático na qual o físico trabalha, diariamente, possui propriedades importantes, relacionadas com a estrutura linear das operações nesses espaços, que definiremos e exploraremos nesta aula.

Aula 4

Consideremos inicialmente um conjunto de elementos, sem nenhuma estrutura adicional. Os elementos desse conjunto podem ser chamados, por exemplo, de vetores, ou pontos, e o conjunto desses vetores será chamado espaço. Note que se trata de um conceito abstrato, geral, e os elementos do espaço podem ser qualquer coisa: números reais, funções de onda, etc, muito embora nós os chamemos de "vetores" (isso é apenas um "rótulo" que colocamos sobre esses elementos. Poderíamos chamá-los de qualquer outro nome).

Vamos agora dirigir nossa atenção sobre uma classe particular (importantíssima!) de espaços: os espaços lineares, também chamados espaços vetoriais. Estes têm uma estrutura algébrica adicional, que é totalmente especificada pelas condições da definição adiante. Em resumo, um espaço linear é um espaço dotado de duas operações (uma "soma" ou "adição", e um "produto por escalar"), sendo que algumas propriedades devem ser satisfeitas.

Antes de enunciarmos a definição, comentemos rapidamente a noção de corpo (em inglês, *field*). Um corpo K é um espaço de números (chamados escalares), dotado de operações de soma (+) e multiplicação (.) usuais, com certas propriedades que não mencionaremos agora. Em Física, utiliza-se comumente dois corpos, o corpo **R** dos números reais (que poderíamos indicar $R, +, .$) e o corpo dos complexos, **C** (ou $C, +, .$). Quando falarmos em corpo, para fixar idéias pense-se em **R** ou **C**.

Definição de Espaço Vetorial Um espaço V de vetores é um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre o corpo K se em V estão definidas duas operações, soma (indicada por $\oplus$) e multiplicação por escalar ($\odot$), e se forem verificadas as propriedades:

(S1) $\forall v_1, v_2 \in V,\ v_1 \oplus v_2 \in V$ (fechamento ou fecho)
(lê-se: "para quaisquer v_1 e v_2 pertencentes a V, teremos a soma $v_1 \oplus v_2$ pertencente a V");

(S2) $\forall v_1, v_2 \in V,\ v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$ (comutativa)

(S3) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V,\ v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3$ (associativa)

(S4) $\exists\, 0 \in V,\ \forall v \in V,\ 0 \oplus v = v$ (elemento neutro aditivo)
("existe um zero pertencente a V, de modo que para todo v pertencente a V, 0 mais v é igual a v")

(S5) $\forall v \in V,\ \exists(\ominus v) \in V,\ v \oplus (\ominus v) = 0$ (elemento inverso aditivo)

(M1) $\forall v \in V, \forall k \in K,\ k \odot v \in V$ (fecho)

(M2) $\forall v \in V, 1 \in K, 1 \odot v \in V$ (elemento neutro multiplicativo)

(M3) $\forall v \in V, \forall k_1, k_2 \in K,\ k_1 \odot (k_2 \odot v) = (k_1.k_2) \odot v$ (associativa)

(M4) $\forall v \in V, \forall k_1, k_2 \in K,\ (k_1 + k_2) \odot v = k_1 \odot v \oplus k_2 \odot v$ (distributiva)

(M5) $\forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in K,\ k \odot (v_1 \oplus v_2) = k \odot v_1 \oplus k \odot v_2$ (distributiva)

Chamamos sua atenção para a essencial diferença entre a soma de números ($+$) e a soma de vetores ($\oplus$), e entre produto de números ($.$) e produto de um escalar por um vetor ($\odot$).

Dado um espaço V de vetores munido das operações $\oplus$ e $\odot$, para sabermos se essa estrutura constitui um espaço linear, é preciso verificar se são sempre satisfeitas as propriedades da soma (S1-S5) e do produto por escalar (M1-M5) acima mencionadas, uma a uma. Um bom modo de memorizar estas dez propriedades é resolver exercícios a respeito, o que faremos em seguida.

Exemplo Mostre que o conjunto de todos os vetores usuais no espaço tridimensional é um espaço linear. Esse espaço é denotado $\mathbf{R}^3$; o corpo envolvido subentende-se que é o próprio corpo $\mathbf{R}$ dos reais, e as operações são também as conhecidas:

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k},$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sendo os versores dos três eixos ortogonais x, y, z,

$$\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 = (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} + (c_1 + c_2)\mathbf{k}\,,$$

$$k \odot \mathbf{v}_1 = ka_1\mathbf{i} + kb_1\mathbf{j} + kc_1\mathbf{k}$$

com $k, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Vamos verificar a propriedade S1 primeiramente.

Tomamos dois vetores genéricos de V,

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}\ , \qquad \mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}.$$

A soma desses vetores é:

$$\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 = (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} + (c_1 + c_2)\mathbf{k}$$

$(a_1, b_1, \ldots, c_2$ reais) onde $(a_1 + a_2) \in \mathbf{R}$, $(b_1 + b_2) \in \mathbf{R}$, $(c_1 + c_2) \in \mathbf{R}$, portanto $\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 \in V$, já que

$$V = \{\mathbf{v}_1 = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}, \forall A, B, C \in \mathbf{R}\}\ .$$

Portanto, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \Rightarrow \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 \in V$.

Verifiquemos (S2). Escolhemos

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}\,,$$

$$\mathbf{v}_3 = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}\,;$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v}_1 \oplus (\mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{v}_3) = \\
= \;& a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} + [(a_2 + a_3)\mathbf{i} + (b_2 + b_3)\mathbf{j} + (c_2 + c_3)\mathbf{k}] \\
= \;& [a_1 + (a_2 + a_3)]\,\mathbf{i} + [b_1 + (b_2 + b_3)]\,\mathbf{j} + [c_1 + (c_2 + c_3)]\,\mathbf{k} \\
= \;& [(a_1 + a_2) + a_3]\,\mathbf{i} + [(b_1 + b_2) + b_3]\,\mathbf{j} + [(c_1 + c_2) + c_3]\,\mathbf{k} \\
= \;& (\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3
\end{aligned}$$

Na penúltima linha, usou-se que a soma de números reais é associativa.

As outras propriedades da soma verificam-se de forma análoga. Em particular, em (S4) o elemento neutro aditivo é:

$$0 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\,,$$

e dado $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}\,, \ominus\mathbf{v} = -a\mathbf{i} - b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$.

Mostremos pelo menos uma das propriedades da multiplicação por escalar, por exemplo (M3). Sejam $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, e $k_1, k_2 \in K$.

$$\begin{aligned}
k_1 \odot (k_2 \odot \mathbf{v}) &= k_1 \odot [k_2 a\mathbf{i} + k_2 b\mathbf{j} k_2 c\mathbf{k}] \\
&= k_1 k_2 a\mathbf{i} + k_1 k_2 b\mathbf{j} + k_1 k_2 c\mathbf{k} \\
&= (k_1.k_2) \odot \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Como todas as propriedades (S1)-(M5) podem ser verificadas, $\mathbf{R}^3$ é um espaço vetorial (sobre o corpo $\mathbf{R}$), em relação à soma (usual) de vetores e multiplicação de vetor por número.

Até agora, "carregamos" a notação com símbolos especiais $\oplus$ e $\odot$, para enfatizar a distinção entre as operações do espaço linear e as do corpo. Daqui por diante abandonaremos, por simplicidade, essa notação denotando igualmente $\oplus$ e $+$ por $+$, bem como $\odot$ e . por . ou por justaposição (por exemplo, $k \odot v$ será indicado simplesmente kv).

Exemplo O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ de números reais forma um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{R}$, com relação às operações de soma de matrizes e multiplicação de matriz por número, usuais:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(note que o sinal $+$ de soma das matrizes corresponde à operação $\oplus$, enquanto que os sinais de soma dentro da matriz correspondem à soma de números, $+$).

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

(a multiplicação de k pela matriz corresponde à operação $\odot$, enquanto que as multiplicações dentro da matriz à direita, indicadas por justaposição, são as multiplicações de números).

A prova, novamente é simples, mas um tanto fastidiosa.

Exemplo O conjunto de todas as funções de variável real a valores reais,

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{R}$ com relação às operações:

$$(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x)$$

($\equiv$ lê-se "é definido como". O primeiro $+$, lado esquerdo da equação, é na realidade o $\oplus$, e o segundo, lado direito, é $+$, soma de reais)

$$(kf)(x) \equiv kf(x)$$

(o produto entre k e f em (kf) é $\odot$, no lado direito aparece a multiplicação de reais).

Exemplo Seja V o conjunto dos pares ordenados (a,b) de números reais; estão definidas em V as operações:

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &\equiv (a+d,b+c)\\ k(a,b) &\equiv (ka,kb)\,.\end{aligned}$$

Mostre que V não é espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Para mostrar que V não é espaço vetorial, basta apresentar *um exemplo* mostrando que uma daquelas dez propriedades não é verificada. Tomemos $v_1=(0,1)$, $v_2=(1,2)$, $v_3=(2,1)$; então,

$$\begin{aligned}(0,1)+[(1,2)+(2,1)] &= (0,1)+(2,4)=(4,3)\\ [(0,1)+(1,2)]+(2,1) &= (2,2)+(2,1)=(3,4)\end{aligned}$$

e assim vemos que a propriedade associativa da soma *não* vale.

Vamos agora definir o conceito de combinação linear.

Definição Considere vetores v_1, v_2, $\ldots$, v_n de um espaço vetorial V sobre o corpo K, e sejam k_1, k_2, $\ldots$, k_n escalares de K. A soma:

$$k_1\,v_1+k_2\,v_2+\ldots+k_n\,v_n$$

é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, $\ldots$, v_n.

Esse conceito pode ser generalizado para uma sequência infinita de vetores de V, v_1, v_2, $\ldots$, a soma:

$$k_1\,v_1+k_2\,v_2+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}k_i\,v_i$$

é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, ...

Exemplo Em $\mathbf{R}^3$ (espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$), qualquer vetor pode ser descrito por uma combinação linear dos versores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

a, b, $c \in \mathbf{R}$. Nós falaremos mais sobre isso adiante.

Exemplo Em Mecânica Quântica, às vezes convém expressar um estado quântico $\psi(x)$ em termos de estados $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... que são auto-estados de determinados operadores. Expressa-se $\psi(x)$ como uma combinação linear daqueles estados,

$$\psi(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\psi_i(x)\,.$$

A rigor, $\psi(x)$ é um ente matemático, a **função de onda**, que representa o estado quântico (que tem sentido físico). Mas, por um abuso de linguagem, nós físicos chamamos muitas vezes $\psi(x)$ de "estado quântico".

Os coeficientes a_0, a_1, a_2, ... em geral são números complexos, $\mathbf{C}$ é o corpo do espaço vetorial das **funções de onda**. Voltaremos a este exemplo mais tarde.

Definição Seja V um espaço vetorial sobre K, e seja $W \subset V$ um subconjunto de V. W é dito um subespaço vetorial de V se W for, ele mesmo, um espaço vetorial (sobre o mesmo corpo K).

Teorema Um subconjunto não-vazio W de um espaço vetorial V (sobre o corpo K) é subespaço de V se e somente se:

1. $0 \in W$;
2. $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ (W é fechado em relação à soma);
3. $k \in K, w \in W \Rightarrow kw \in W$ (W é fechado em relação ao produto por escalar).

Este teorema nos permite verificar mais facilmente se dado subconjunto de V é ou não seu subespaço.

Exemplo Se V é o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre o corpo $\mathbf{R}$, então o conjunto W de todas as matrizes 2×2 com a primeira linha nula é um subespaço de V:

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}, \\ W &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l & m \end{pmatrix}, \forall l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Definição Os vetores v_1, v_2, $\ldots$, v_n do espaço vetorial V sobre K são linearmente dependentes (abreviaremos l.d.) se existirem escalares k_1, k_2, $\ldots$, k_n do mesmo corpo K, não todos nulos, tais que

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0\,.$$

Definição Os vetores v_1, v_2, $\ldots$, v_n do espaço vetorial V sobre K são linearmente independentes (abreviaremos l.i.) se não forem l.d..

Nesse caso, não existem escalares k_1, k_2,$\ldots$, k_n não todos nulos tais que

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0\,.$$

Ou seja,

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0\,.$$

Exemplo Considere, em $\mathbf{R}^3$, os vetores $(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ e $(5\mathbf{i}+5\mathbf{j})$. Eles são l.d., já que existem escalares reais não todos nulos $(+5)$ e (-1) tais que:

$$(+5).((\mathbf{i}+\mathbf{j}) + (-1).(5\mathbf{i}+5\mathbf{j}) = 0\,.$$

Exemplo Os vetores $(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ e $(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ são l.i., porque

$$a.((\mathbf{i}+\mathbf{j}) + b.(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = (a+b)\mathbf{i} + (a-b)\mathbf{j} = 0$$

o que implica em $a+b=0$ e $a-b=0$, ou seja, $a=b=0$.

Exemplo Os vetores $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$, versores dos eixos x, y, z (respectivamente), são l.i., pois

$$\begin{aligned} a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} &= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \\ &= (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) \\ &= (a,b,c) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0\,. \end{aligned}$$

Exemplo Os vetores no plano ($\mathbf{R}^3$) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}$ são l.i.,

$$\alpha(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + \beta(3\mathbf{i}) = 0$$

o que implica em

$$(\alpha + 3\beta)\mathbf{i} + 2\alpha\mathbf{j} = 0\,,$$

decorrendo daí que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Já os vetores $\mathbf{a} = -5\mathbf{i}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}$ são l.d. pois

$$(+3)(-5\mathbf{i}) + (+5)(3\mathbf{i}) = 0\,,$$

onde existem os escalares $(+3)$, $(+5)$ não todos nulos anulando a combinação linear dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Dois vetores no plano, para serem l.d., precisam ter a mesma direção, ou seja, serem paralelos. Lembre-se que o <u>vetor nulo</u> é paralelo a todos os vetores!

Exemplo Suponha que $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ é um subconjunto de vetores de um espaço vetorial V. Supondo que $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ é l.d., mostre que $\mathcal{V}$ é l.d..

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ é l.d., existem escalares $k_1, k_2, \ldots, k_p$ não todos nulos tais que

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p = 0\ . \tag{4.1}$$

Usando-se os mesmos $k's$ de 4.1, e mais:

$$k_{p+1} = k_{p+2} = \ldots = k_n = 0 \tag{4.2}$$

teremos:

$$(k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p) + (k_{p+1}v_{p+1} + k_{p+2}v_{p+2} + \ldots + k_nv_n) = 0$$

sendo que o primeiro parênteses se anulou devido à (4.1) e o segundo parênteses devido à (4.2). Concluímos que $\mathcal{V}$ é l.d..

Vamos agora estender os conceitos de l.i. e l.d. ao caso de um conjunto infinito de vetores.

Definição Um <u>conjunto infinito</u> S <u>de vetores</u> de um espaço vetorial V é <u>l.d.</u> se existir em S algum conjunto finito de vetores que seja l.d..

Definição Um conjunto infinito S de vetores de um espaço vetorial V é l.i. se todos os subconjuntos finitos de S forem l.i..

Definição Considere um conjunto $\{v_1, v_2, \ldots\}$ de vetores de um espaço vetorial V. O conjunto de todas as combinações lineares possíveis,

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots \quad (\forall k_1, k_2, \ldots \in K)$$

forma um subespaço de V. Esse subespaço é denotado $\mathcal{L}(\{v_1, v_2, \ldots\})$ e recebe o nome de subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots$

O conceito que segue é um dos mais importantes em álgebra linear.

Definição Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores l.i. que geram o espaço todo V.

Portanto, se tomarmos todas as combinações lineares possíveis dos elementos da base de um espaço vetorial V, obteremos todos os elementos de V. Em outras palavras, cada elemento de V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base.

Note que essa definição também se aplica ao caso de base com um número infinito de elementos.

Segue um resultado que é verdadeiro quando a base de dado espaço tem um número finito de elementos.

Teorema Seja V um espaço vetorial, e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Então, todo conjunto l.i. de vetores de V tem no máximo n elementos.

Isso nos sugere que um espaço vetorial pode ter várias bases distintas, mas sempre com o mesmo número de elementos. O que nos permite introduzir a seguinte definição.

Definição A dimensão de um espaço vetorial com um número finito de elementos de base é o número desses elementos que formam a base.

Assim, um espaço com base de n elementos tem dimensão n. Um espaço em que a base contenha uma infinidade de elementos é chamado de espaço de dimensão infinita. Esses são os espaços mais difíceis de tratar; resultados que valem para espaços lineares de dimensão finita podem não ser válidos para os de dimensão infinita. Nossa "intuição" pode nos levar a resultados errados quando trabalhamos nesses espaços!

Exemplos Apresentaremos agora alguns exemplos de bases. Em $\mathbf{R}^3$ é famosa a base constituída pelos vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. A dimensão de $\mathbf{R}^3$ é portanto três. Mas há outras bases para $\mathbf{R}^3$. Uma delas poderia ser $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Como se verifica isso? Já sabemos que $\dim\{\mathbf{R}^3\} = 3$, portanto qualquer conjunto l.i. com três vetores é uma base, e aqueles vetores de fato são l.i..

No espaço das matrizes 2×2 de números reais, uma base possível é:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Assim, a dimensão desse espaço é quatro.

Outro resultado interessante: suponha que a dimensão de um espaço vetorial V seja n. Então, todo conjunto de mais de n vetores de V é l.d.. O número máximo de vetores l.i. nesse espaço é n.

Também, se W for um subespaço de V, $\dim W \leq \dim V$. E se W_1 e W_2 são subespaços de V,

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 \cup W_2) + \dim (W_1 \cap W_2),$$

onde $W_1 \cup W_2$ denota a união dos elementos de W_1 e W_2, e $W_1 \cap W_2$ a interseção.

A expansão de um vetor v em termos dos elementos de uma base,

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots$$

permite que se defina as <u>coordenadas</u> a_1, a_2, ... (números que pertencem ao corpo K) de v em relação à base $\{v_1, v_2, \ldots\}$. Um vetor poderá ter diferentes coordenadas, relativamente a diferentes bases.

ATIVIDADES

1. Sendo V o conjunto dos pares ordenados (a, b) de números reais, (i) mostre que a propriedade (M3) é satisfeita e (ii) mostre que

(S2) não é satisfeita.

2. Considere o espaço das matrizes 2×2 de números reais, com soma e multiplicação por escalar usuais. Mostre que esse é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

3. Verifique se o conjunto de números complexos $\mathbf{C}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{R}$, com relação às operações usuais,

$$c_1+c_2 = (a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)rc = r(a+ib) = ra+irb$$

com a_1, a_2, b_1, b_2, r, a, b todos reais.

4. Verificar se $\mathbf{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbf{C}$, com relação às operações usuais.

5. Indiquemos os elementos de $\mathbf{R}^3$ (que pode ser identificado com o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional) por tripletos de números reais, $\mathbf{v} = (a, b, c)$ (onde o vetor $\mathbf{v}$ é dado por $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$). Mostre que $W = (a, b, 0); \forall a, b \in \mathbf{R}$ é um subespaço de $\mathbf{R}^3$. Esse conjunto de vetores (ou pontos do espaço tridimensional) com componente z nula constitui um plano (o plano xy.

6. Chamemos de F o espaço vetorial das funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$. Mostre que: (i) o conjunto P das funções pares é um subespaço de F (função par é aquela para a qual $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$); (ii) o conjunto I das funções ímpares (para as quais $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}$) é um subespaço de F.

7. Mostre que o conjunto de (i) um vetor não-nulo é l.i.; (ii) um vetor nulo é l.d.; (iii) dois vetores (no plano) não-nulos é l.d. se forem paralelos, e l.i. se não forem paralelos; (iv) dois vetores, um deles sendo o vetor nulo, é l.d.; (v) três vetores não-nulos (em $\mathbf{R}^3$) formam um conjunto l.d. se forem coplanares (isto é, se pertencerem a um mesmo plano) e l.i. se não forem coplanares; (vi) três vetores, em que um deles é o vetor nulo, é l.d..

8. Mostre que todo subconjunto de um conjunto l.i. é também l.i. (sugestão: suponha $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$ l.i. e mostre que $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ é também l.i.).

9. Mostre que o subespaço gerado $\mathcal{L}(\{v_1, v_2, \ldots\})$ é subespaço do espaço vetorial V.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Estes são, na realidade, exercícios de fixação das propriedades, você terá que ver e rever propriedades e definições, inclusive durante a resolução dos exercícios. Confronte suas respostas com a de seus colegas!

CONCLUSÃO

Foram apresentados, nesta aula, conceitos fundamentais como espaço vetorial, dependência e independência linear, bases. Estes conceitos serão usados intensivamente no restante deste curso, bem como em Métodos de Física Teórica II.

RESUMO

Nesta aula apresenta-se, de forma sintética, as propriedades satisfeitas pelos espaços vetoriais, em paralelo com a exposição de vários exemplos simples de interesse.

PRÓXIMA AULA

A maioria dos espaços usados em Física, além de serem espaços lineares, possuem também uma estrutura métrica, o que será explorado na próxima aula.

REFERÊNCIAS

CALLIOLI, Carlos; COSTA, R.; DOMINGUES, Hygino. Álgebra Linear e Aplicações. Rio de Janeiro: Editora Atual, 1990.
LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear. São Paulo: Makron, 1994.