# Séries Infinitas

## META

Apresentar critérios para verificação da convergência de séries infinitas. Introduzir a técnica de expansão em série de potências, com aplicações a problemas de interesse físico.

## OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: identificar se uma série infinita é convergente ou não, baseado em testes e critérios apresentados; efetuar expansões de funções em séries de potências em torno de dado ponto.

## PRÉ-REQUISITOS

Nenhum.

## INTRODUÇÃO

Para muitos problemas de Física Teórica, não é possível achar uma solução analítica e geral. O melhor a fazer nesses casos é tentar uma solução aproximada, sendo frequente o uso de expansões em série de potências ou outro tipo de série. É importante que o físico tenha noção da validade do emprego de tais séries, o que passa necessariamente pela análise da sua convergência.

## 7.1 Convergência de Séries Infinitas

Uma série infinita é uma soma com uma infinidade de termos, como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Por exemplo, citamos algumas séries infinitas,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \qquad \text{(série harmônica)}\,,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\,,$$

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots\,,$$

e o último exemplo mostra que utilizamos diariamente séries infinitas, sem tomar conhecimento do fato de estarmos lidando com tais séries (você conseguiu visualizar o número $\pi$?).

Esse conceito não deve ser confundido com o de sequência infinita, que não é uma soma, mas algo do tipo

$$b_1,\, b_2,\, b_3, \ldots,\, b_n, \ldots\,.$$

Alguns exemplos de sequência infinita são:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

que é uma PG (progressão geométrica) de razão $1/2$;

$$1,\; 1 + \frac{1}{2},\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots$$

Uma série é convergente quando

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = A < \infty$$

e teremos uma série divergente quando

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \infty$$

(ou $-\infty$).

Existem testes de convergência para verificar se uma série é convergente ou não. Vamos apenas enunciar alguns testes, sem demonstrá-los. Mas vamos apresentar alguns exemplos para mostrar como aplicá-los.

**Teste do Termo Geral** Este é um teste que pode determinar se há divergência. Simplesmente, calcula-se o limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n\,;$$

se o limite for diferente de zero, há a divergência da série. Se o limite for nulo, este teste é inconclusivo.

**Exemplo** A soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}$$

analisada por este critério, diverge, pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} = \infty$$

(isto é, o limite é diferente de zero).

**Teste da Razão (de Cauchy ou D'Alembert)** Calcula-se o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,;$$

se ele for menor que um, a série converge; se for maior que um, a série diverge; e no caso do limite ser exatamente um, o teste é inconclusivo (quando o teste é inconclusivo, procura-se utilizar um outro teste, mais sensível).

**Exemplo** A soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}$$

converge, pois:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1}+1)(3^n+n)}{(3^{n+1}+n+1)((2^n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2.2^n+1}{2^n+1} \times \frac{3^n+n}{3.3^n+n+1} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1/2}{2^n+1} \times \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n}{3^n+n/3+1/3} = \frac{2}{3} < 1\,.
\end{aligned}$$

**Teste da Raiz (de Cauchy)** Se o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

for menor que um, a série converge; se for maior que um o teste garante que a série diverge, e se o limite for um, o teste é inconclusivo.

**Exemplo** A soma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{n^{2n}}$$

converge, uma vez que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{3n}}{n^{2n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^3}{n^2} = 0 < 1\,.$$

**Testes de Comparação** A soma $\sum_n a_n$ é convergente se $\sum_n u_n$ converge e se $a_n \leq u_n$ para todo $n$. Já a soma $\sum_n a_n$ será divergente se $\sum_n u_n$ divergir e se $a_n \geq u_n$ para todo $n$.

**Exemplo**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge (prove!), e os termos da primeira série são menores ou iguais aos da segunda.

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0,98}$$

diverge, já que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, e os termos da primeira série são maiores ou iguais aos da segunda.

A série harmônica pode ser escrita:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

e cada termo entre parênteses é da forma:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{p+p}$$

que é maior que $p/2p$ ou $1/2$. Para os três parênteses indicados acima, $p = 2$, 4 e 8 (nessa ordem). Como cada um é maior que $1/2$, a soma diverge.

**Teste da Integral** Não é difícil descobrir uma função $f(x)$ tal que

$$f(1) = a_1\,, \quad f(2) = a_2\,, \quad f(3) = a_3\,, \quad \ldots$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{i} a_n = \sum_{n=1}^{i} f(n).1 < a_1 + \int_1^i f(x)dx$$

e também

$$\sum_{n=1}^{i} a_n > \int_1^i f(x)dx\,.$$

Logo, tomando $i \to \infty$,

$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1\,,$$

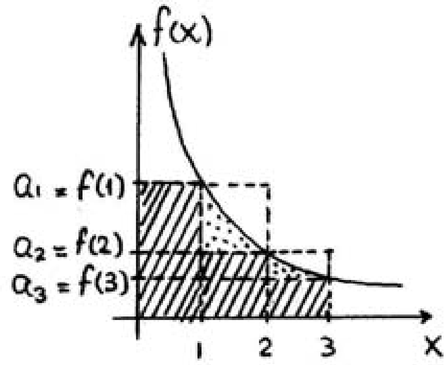


Figura 7.1: O teste da integral.

portanto se a integral nessa última expressão convergir, a série infinita convergirá. No caso contrário, se a integral divergir, então a série divergirá.

**Exemplo** A somatória

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^2 n}$$

converge, pois se adotarmos

$$f(x) = \frac{1}{x\, ln^2 x}$$

teremos:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\, ln^2 x} \underbrace{=}_{x=e^t} \int_{ln\,2}^{\infty} \frac{e^t\, dt}{e^t\, t^2} = \int_{ln\,2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{ln\,2}^{\infty} = \frac{1}{ln\,2} < \infty\,.$$

**Teste de Raabe** Efetuamos o cálculo do limite:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right]\;;$$

se o limite for maior que um, a série é convergente; se for menor que um, teremos a divergência da série, e no caso do limite ser igual a um, o teste é inconclusivo.

**Teste de Gauss** Se $a_n > 0$ e se

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 + \frac{h}{n} + \frac{L(n)}{n^2}$$

sendo $L(n)$ uma função limitada de $n$ (para qualquer $n$), então se $h > 1$ a série converge, e se $h \leq 1$ teremos sua divergência.

**Critério de Leibnitz para Séries Alternantes** A série $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n$, com $a_n$ positivos, converge se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, desde que os $a_n$ formem uma sequência monotonicamente decrescente (isto é, $a_{n+1} < a_n$ para todo $n$).

**Exemplo** Pelo critério acima, a série seguinte converge:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Há outros critérios mais, que não citaremos aqui. Se todos os oito apresentados falharem, você deve procurar livros especializados.

**Definição de Convergência Absoluta** Dizemos que uma série converge absolutamente se $\sum_n |a_n|$ for convergente.

Note que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

converge, mas não converge absolutamente, pois

$$\sum_n |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

é divergente (é a já referida série harmônica).

Há algumas operações simples obedecidas pelas séries. Sejam

$$\sum_m a_m = A\,; \qquad \sum_m b_m = B\,;$$

então,

$$\sum_{m,n} a_m b_n = A\,B\,; \qquad \sum_m (a_m + b_m) = A + B\,; \qquad \sum_m k\,a_m = k\,A\,.$$

Podemos também acrescentar a propriedade das séries absolutamente convergentes: elas independem da forma como se somam seus termos. Logo, rearranjos ou reagrupamentos podem ser feitos livremente com os termos desse tipo de série.

As séries de funções são somas do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

onde cada termo é uma função de $x$. A série pode convergir ou divergir, dependendo do valor de $x$, daí falar-se em "raio de convergência", que determina o intervalo dentro do qual a série converge. Por exemplo, o intervalo de convergência pode ser dado por $|x - x_0| < r$, significando que a série converge ao redor do ponto $x = x_0$, com raio de convergência $r$.

**Exemplo** Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

(essa é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão $x$. Para mostrar que a soma é $1/(1-x)$ basta multiplicar os dois lados da expressão acima por $(1-x)$, e observar os cancelamentos). Esta série converge se $|x| < 1$, mas não converge para $|x| \geq 1$.

**Exemplo** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\, nx}{n^2}$$

converge para qualquer $x$ real: diz-se que o intervalo de convergência é a reta real toda, e que o raio de convergência é infinito, nesse caso. A convergência se deve a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\, nx}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \text{série convergente}$$

para qualquer $x$. Para estabelecer a desigualdade acima, usamos o fato que $cos\, \theta \leq 1$.

**Definição de Convergência Uniforme** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente para $f(x)$ num intervalo $[a, b]$, se para cada número real $\epsilon > 0$ existir um número inteiro $N$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right| < \epsilon$$

para qualquer $x \in [a, b]$.

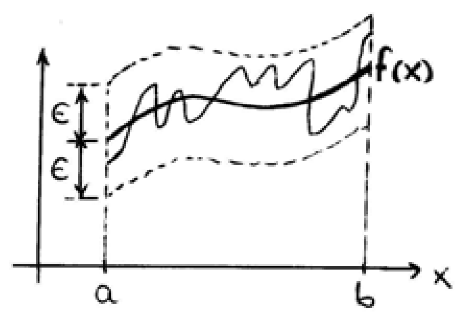


Figura 7.2: A noção de convergência uniforme de uma série de funções: a soma parcial das funções $f_n(x)$ está dentro de uma faixa ao redor de $f(x)$, para qualquer $x \in [a, b]$.

Para sabermos se uma série converge uniformemente ou não, recorremos aos critérios seguintes.

**Critério M de Weierstrass** A soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge absoluta e uniformemente em $[a, b]$, se existir uma série convergente de constantes $M_n$ tais que

$$|f_n(x)| \leq M_n\,, \quad \forall x \in [a, b]\,.$$

**Exemplos** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

é uniformemente convergente em $[-1, +1]$, pois

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n\,,$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Também, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\, nx}{2^n}$$

é uniformemente convergente em $(-\infty, +\infty)$, já que

$$\left|\frac{cos\, nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} = M_n\,,$$

para qualquer $x \in (-\infty, +\infty)$, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty\,.$$

**Teste de Abel para Convergência Uniforme** Se $f_n(x) = a_n\,\phi_n(x)$, com $\sum_n a_n$ convergente, e se os $\phi_n$ forem monotonicamente decrescentes (isto quer dizer, $\phi_n(x) \leq \phi_{n-1}(x)\,, \forall x \in I = [a, b]$) e limitadas ($0 \leq \phi_n(x) \leq M\,, \forall x \in I, \forall n$), então $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente no intervalo $[a, b]$.

Você verificará sem dificuldade que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

é uniformemente convergente em $(-\infty, +\infty)$, pelo teste de Abel (note que cada termo dessa série é menor ou igual a $(-1)^n/n$), mas não é absolutamente convergente, logo não satisfaz o Critério M de Weierstrass; o teste de Abel é mais sensível.

É interessante saber se uma série de funções é ou não uniformemente convergente, porque aquelas possuem três propriedades notáveis:

(i) Se a série $\sum_n f_n(x)$ é uniformemente convergente, e se as $f_n(x)$ são funções contínuas em $I$, então a soma da série, $f(x)$, também é contínua;

(ii) Se a série $\sum_n f_n(x)$ é uniformemente convergente e as $f_n(x)$ são contínuas, então a série pode ser integrada termo a termo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n(x) = \int_I f(x)\,;$$

(iii) Se a série $\sum_n f_n(x)$ é uniformemente convergente, as $f_n(x)$ são contínuas, juntamente com $df_n(x)/dx$, e se $\sum_n df_n(x)/dx$ é uniformemente convergente, então a série pode ser derivada termo a termo,

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(x)}{dx}\,.$$

É preciso fazer aqui uma observação: pode ser que uma série que não seja uniformemente convergente satisfaça uma ou mais dessas propriedades!

**Exemplo** Eis um exemplo de uma série que não é uniformemente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,, \qquad -1 < x < +1\,.$$

## ATIVIDADES

1. Teste a convergência da série $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. Diga qual o critério utilizado na análise.

2. Ídem, para $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$.

3. Ídem, para $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

4. Determine o intervalo de convergência da série hipergeométrica de Gauss,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

   Uma dica: Gauss desenvolveu o "teste de Gauss" exatamente com vistas à análise dessa série!
   (Resposta: convergente para $(-1, +1)$, e nos pontos $x = \pm 1$ se $\gamma > \alpha + \beta$).

5. Suponha que as séries $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sejam absolutamente convergentes. Mostre que a série de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, sen\, x + b_n\, cos\, x)$$

   é uniformemente convergente em $(-\infty, +\infty)$.

## COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Você deve experimentar usar os vários critérios apresentados no texto, para verificar a convergência dessas séries. Em alguns dos problemas, fica evidente qual o critério a ser testado.

## 7.2 Séries de Potências

Uma série de potências positivas de $x$ é do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

Uma série de potências positivas de $(x - a)$ tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, (x-a)^n\,.$$

A série de potências negativas de $x$ é algo como:

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}\,.$$

As séries de potências convergem uniformemente e absolutamente no interior de seu intervalo de convergência, podendo portanto ser integradas e derivadas termo a termo, nessa região.

A série de Taylor é uma expansão, num ponto $x_0$, de uma função $f(x)$ infinitamente derivável,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Em particular, se $x_0 = 0$ chamamos a série de "série de MacLaurin".

**Exemplo** Na teoria da relatividade restrita, a energia total de um corpo de massa de repouso $m_0$ é dada por:

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,c^2 = m_0 c^2 \,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Vamos expandir o termo da raiz, mais à direita, em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$, com $x = v^2/c^2$,

$$x = v^2/c^2\,, \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots \\ &= 1 + \frac{(-1/2)}{1!}\,x + \frac{(+3/4)}{2!}\,x^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\,\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

com o que obtemos:

$$E = m_o c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \ldots \right]$$

onde o primeiro termo corresponde à chamada "energia de repouso", e o segundo à energia cinética relativística. Observe neste segundo termo que a energia cinética clássica, $mv^2/2$, aparece multiplicando a série de potências de $v^2/c^2$, de modo que o segundo termo dentro dos colchetes pode ser visto como uma primeira correção à expressão da energia cinética clássica.

**Exemplo** Vamos neste exemplo calcular o campo elétrico no ponto $P$, que se encontra a uma distância $x \gg a$ (lê-se "$x$ muito maior que $a$") de dois dipolos elétricos, como indicado na figura 7.3.

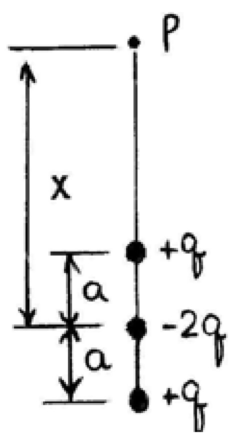


Figura 7.3: O campo elétrico de um quadrupolo constituído por dois dipolos justapostos, a uma distância grande das cargas.

O campo elétrico produzido pelo conjunto das três cargas é:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+q}{(x-a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+q}{(x+a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2q}{(x)^2} \, .$$

Escrevemos os denominadores na forma:

$$\frac{1}{(x \pm a)^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^2}$$

e, chamando $y = a/x$ ($\ll 1$),

$$f(y) = \frac{1}{(1+y)^2}\,, \qquad f'(y) = \frac{-2}{(1+y)^3}\,, \qquad f''(y) = \frac{+6}{(1+y)^4}\,, \ldots$$

Estamos então preparados para escrever a série de Taylor para $f(y)$ em torno de $y_0 = 0$,

$$f(y) = 1 - \frac{2}{1!}\,y + \frac{6}{2!}\,y^2 - \ldots$$

e assim,

$$\frac{1}{(x+a)^2} \cong \frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x^3} + \frac{3a^2}{x^4}\,,$$
$$\frac{1}{(x-a)^2} \cong \frac{1}{x^2} + \frac{2a}{x^3} + \frac{3a^2}{x^4}\,.$$

Dentro dessa aproximação, o campo elétrico no ponto $P$ é dado por:

$$\begin{aligned} E_P &\cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2a}{x^3} + \frac{3a^2}{x^4} + \frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x^3} + \frac{3a^2}{x^4} - 2\,\frac{1}{x^2}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{6a^2}{x^4} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3Q}{x^4} \end{aligned}$$

onde $Q = 2a^2 q$ é o momento de quadrupolo dessa distribuição de cargas.

## ATIVIDADES

1. Obtenha as séries de Taylor para o seno e o cosseno de $x$ em torno do ponto $x_0 = 0$ (estas são também chamadas "séries de Mac Laurin" do seno e cosseno).

2. Com base nos resultados do problema anterior, mostre a plausibilidade da fórmula de Euler,

$$e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$$

3. A expressão relativística para a razão entre a energia cinética no sistema do centro de massa e a energia cinética incidente $E_c$, para a colisão frontal entre dois prótons, é:

$$F = \frac{\sqrt{2mc^2(E_c + 2mc^2)} - 2mc^2}{E_c}$$

Mostre que, no limite não-relativístico (isto é, $E_c \ll mc^2$), temos $F \cong 1/2$.

## COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para resolver estas questões, você deverá usar a técnica da expansão em série de Taylor. Para você conferir, a resposta da primeira questão para o cosseno é:

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Para resolver a última questão, proceda como nos exemplos resolvidos no texto.

## CONCLUSÃO

Apresentamos nesta aula vários critérios para verificar a convergência de séries infinitas, e ensinamos a técnica de obtenção da série de Taylor, que é básica para obter aproximações de uso comum nas físicas clássica e moderna.

## RESUMO

Apresentamos vários testes para analisar a convergência de séries infinitas. Mostramos as expansões em séries de potências aplicadas a problemas de Física.

## PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você aprenderá como fazer expansões de funções periódicas, obtendo as chamadas séries de Fourier.

## REFERÊNCIAS

KAPLAN, Wilfred. Cálculo Avançado. São Paulo: Edgard Blücher, 1972.

COURANT, R. Cálculo Diferencial e Integral. Porto Alegre: Editora Globo, 1966.