Aula

8

Séries de Fourier

META

Discutir as propriedades básicas das séries de Fourier, comentar sua convergência, e apresentar a técnica de expansão de uma função periódica em série de Fourier.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de expandir uma função periódica dada em série de Fourier.

PRÉ-REQUISITOS

Aula anterior, sobre séries infinitas.

INTRODUÇÃO

Oscilações e ondas fazem parte de situações físicas em vários ramos das Físicas Clássica e Quântica. Esta última também recebe o nome de Física Ondulatória, pelo comportamento dos componentes subatômicos da matéria. A descrição matemática das oscilações e ondas é feita através das funções periódicas, sendo muitas vezes conveniente expandir essas funções em termos das funções mais simples seno e cosseno: esse é o palco da chamada análise harmônica, ou análise de Fourier.

Aula 8

No capítulo precedente aprendemos como expandir funções (complicadas ou não!) em séries de potências,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

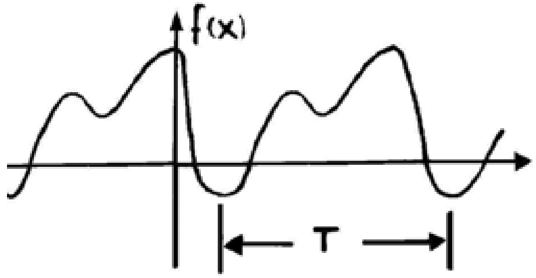

Figura 8.1: Uma função periódica, de período T.

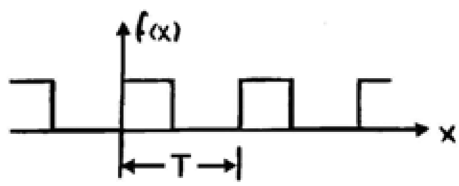

Figura 8.2: A função periódica onda quadrada, muito comum em estudos de correntes elétricas.

Agora, estaremos interessados em expandir funções periódicas. Para essa classe de funções, tem-se:

$$f(x + T) = f(x)\,, \quad \forall x,$$

onde T é o período da função. Nesse caso, parece natural que façamos a expansão não em termos de potências de x, mas em termos de funções periódicas. As funções periódicas talvez mais comuns são o seno e o cosseno; assim, buscamos expansões do tipo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n\, cos\, nx + b_n\, sen\, nx)\,.$$

É bom lembrar que grande classe de fenômenos físicos é oscilatória. O pêndulo simples, a massa presa numa mola, ondas na superfície de um lago, som (que é uma onda de pressão propagando-se no ar), correntes elétricas alternadas disponíveis em nossas residências, campos eletromagnéticos (como as ondas de rádio, TV, celular), todos são exemplos de sistemas físicos envolvendo oscilações, que por sua vez são descritas em termos de funções periódicas do tempo.

Vamos tentar entender em que consistiria aquela expansão em série, fisicamente falando. Usaremos para isso o exemplo de uma lâmina vibrando, como um diapasão. Na figura 8.3 é mostrada uma lâmina vibrando; essa vibração produz uma sucessão de ondas de alta pressão (quando a lâmina oscila para a direita, comprime as moléculas de ar que se encontram à direita. Essa "onda de alta pressão" move-se para a direita) e de baixa pressão (correspondendo à volta da lâmina para a esquerda, o que gera a rarefação no ar à direita da lâmina). Na verdade, tais ondas de pressão propagam-se em todas as direções, no ar, a partir do diapasão. Aqui estamos fazendo uma simplificação do processo, mostrando esquematicamente o que ocorre apenas em uma direção (horizontal, para a direita).

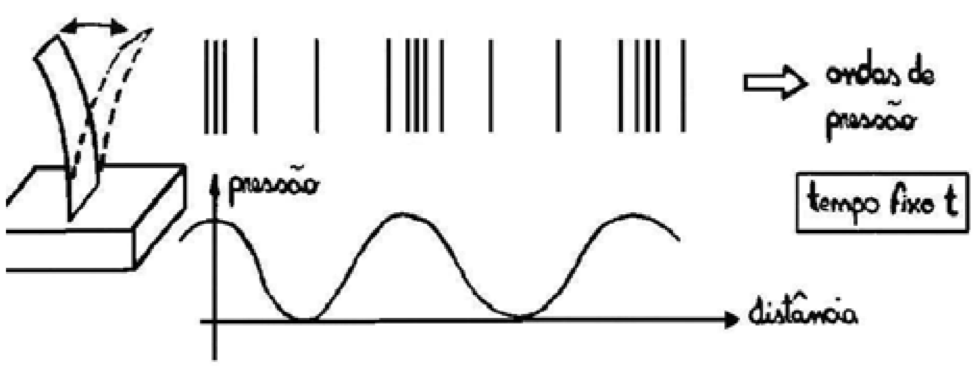

Figura 8.3: Esquema de ondas de pressão no ar (sons) produzidos por um diapasão.

Uma onda sonora como a representada na figura **??**, expressa matematicamente por uma função cosseno de frequência bem determinada é chamada um "tom puro" (na linguagem da música) ou fundamental. Na verdade, não exatamente $cos\, x$, mas $cos\, kx$, onde $k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/v$ é o chamado "número de onda", λ é o comprimento de onda (a distância entre dois picos no gráfico da figura), f a frequência e v a velocidade da onda.

Entretanto, os sons que ouvimos em geral não correspondem a tons puros, mas a superposições de vários tons, de forma que a onda resultante não é tão simples como um seno ou um cosseno. Por exemplo, ao emitir uma nota "lá" num instrumento musical, não se obtém um tom único, de frequência f (este por si só seria sim bem representado por uma função $cos\, kx$), mas acompanham-no vários sobretons, chamados "harmônicos", de frequências $2f$ (chamado de primeiro harmônico, e representável por $cos\, 2kx$), $3f$ (matematicamente expresso como $cos\, 3kx$; é o segundo harmônico), ...

Essa superposição específica de certas quantidades do primeiro harmônico, do segundo harmônico, etc., caracteriza o som daquele instrumento, define o seu <u>timbre</u>: a mesma nota lá emitida por um piano ou por um violino parecem diferentes devido a esses sobretons.

O gráfico na figura apresenta os valores da pressão nos diferentes pontos do espaço, como se fosse um "instantâneo fotográfico" da situação. À medida em que o tempo passa, tal curva (como se fosse um "arame" torcido na forma de uma função cosseno) se desloca à direita, com a velocidade da propagação do som no ar (ao redor de trezentos e cinquenta metros por segundo). Assim, as funções correspondentes ao tom fundamental e seus harmônicos, além de ter dependência cossenoidal com a distância x, teriam também uma dependência temporal, do tipo

$$cos\, kx \,.\, cos\, 2\pi f t = cos\, kx \,.\, cos\, \omega t\,.$$

Dada a função $f(x)$ descrevendo uma grandeza física periódica, desejamos expandí-la numa série envolvendo os vários harmônicos. Tal série é chamada <u>série de Fourier</u> e engloba, em geral, uma infinidade de termos.

Como um segundo exemplo físico, podemos citar a luz branca (como a luz do Sol), que é uma mistura de várias cores (isto significa: várias frequências). Neste caso, temos a complicação adicional de termos um conjunto <u>contínuo</u> de frequências possíveis, e em lugar da <u>soma</u> de termos, ficaríamos com uma <u>integral</u> na frequência. Este procedimento, como veremos bem mais adiante, no curso de Métodos de Física Teórica II, relaciona-se com a transformação de Fourier.

Também, na recepção de ondas eletromagnéticas, quando um sinal passa por um circuito elétrico (receptor), alguns harmônicos são perdidos; se os mais importantes não se perdem, diz-se que o circuito tem "alta fidelidade". Os harmônicos "mais importantes" correspondem aos termos da expansão em série de Fourier (por exemplo, $cos\,4kx$) cujos coeficientes (no caso, a_4) são grandes em relação aos outros a_n e b_n da série:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos\,nkx + b_n\,sen\,nkx) \\ &= a_0 + a_1\,cos\,kx + b_1\,sen\,kx + a_2\,cos\,2kx + b_2\,sen\,2kx + \ldots \end{aligned}$$

Uma questão de ordem matemática se coloca: quando uma função $f(x)$ pode ser expandida em série de senos e cossenos, isto é, em série de Fourier? Embora não exista até hoje uma resposta satisfatória a essa pergunta (que é ainda objeto de pesquisas), existe um conjunto de condições, conhecidas como condições de Dirichlet, que são suficientes embora não sejam necessárias para que $f(x)$ possa ser representada em série de Fourier (com tal série convergente).

Condições de Dirichlet (Teorema) Se $f(x)$ é periódica de período 2π, univalente, se tem um número finito de máximos e mínimos, um número finito de descontinuidades de primeira espécie (saltos finitos), e se

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx < \infty$$

(isto é, f é absolutamente integrável no período), então a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f for contínua; nos saltos finitos, a série converge para o ponto médio do salto.

Este teorema se estende ao caso em que o período é um T diferente de 2π, com $T < \infty$.

Exemplo Expandiremos a chamada "onda quadrada" (veja a figura 8.4) em série de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\,cos\,nx + b_n\,sen\,nx)$$

Note que $f(x)$ é periódica, com período 2π. Vamos portanto concentrar nossa atenção no intervalo $[0, 2\pi]$.

Obter a expansão acima para $f(x)$ é calcular todas as constantes a_n e b_n, o que é feito da seguinte forma. O conjunto

$$\{1, cos\,x, sen\,x, cos\,2x, sen\,2x, \ldots\}$$

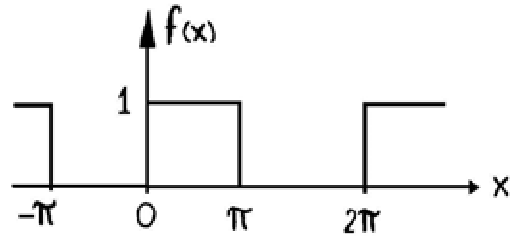

Figura 8.4: A função periódica onda quadrada.

é ortogonal - e completo, o que significa que o produto escalar de qualquer par de funções desse conjunto é nulo. O produto escalar de duas funções, a que nos referimos, é dado por

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Um exemplo familiar de um conjunto ortogonal e completo é $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, onde temos os produtos escalares nulos $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$; essa propriedade é a de que esses três vetores - na realidade, *versores* - são ortogonais. Além disso, o conjunto é completo, portanto forma uma base e assim, qualquer vetor do espaço pode ser escrito como uma combinação linear $\mathbf{v} = v_x\, \mathbf{i} + v_y\, \mathbf{j} + v_z\, \mathbf{k}$.

Os exemplos que seguem ilustram a afirmação que o produto escalar entre pares de funções daquele conjunto ortogonal é nulo:

$$(1, cos\, x) = \int_0^{2\pi} cos\, x\, dx = [sen\, x]_0^{2\pi} = 0\,;$$

$$(1, sen\, x) = \int_0^{2\pi} sen\, x\, dx = [-cos\, x]_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0\,;$$

$$(sen\, x, cos\, x) = \int_0^{2\pi} sen\, x\, cos\, x\, dx = [\frac{1}{2} sen^2\, x]_0^{2\pi} = 0\,;$$

$$(1, cos\, 2x) = \int_0^{2\pi} cos\, 2x\, dx = [\frac{1}{2} sen\, 2x]_0^{2\pi} = 0\,; \text{ etc.}$$

Note que a série de Fourier nada mais é que um modo de escrever uma função $f(x)$ como uma combinação linear dos elementos do conjunto ortogonal completo, de forma totalmente análoga àquela citada para os versores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Vamos então encontrar as fórmulas necessárias ao cálculo dos coeficientes a_n e b_n. Para o cálculo de a_0, integramos a expansão de Fourier de $f(x)$ entre 0 e 2π (isto é, fazemos o produto escalar dos dois lados da expansão com a função 1),

$$(f(x), 1) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\,(cos\,nx, 1) + b_n\,(sen\,nx, 1)]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= a_0\,(1,1) + a_1\,\underbrace{(cos\,x, 1)}_{0} + b_1\,\underbrace{(sen\,x, 1)}_{0} + \\ &\quad + a_2\,\underbrace{(cos\,2x, 1)}_{0} + b_2\,\underbrace{(sen\,2x, 1)}_{0} + \ldots \end{aligned}$$

e, devido à ortogonalidade do conjunto de senos e cossenos, só resta o termo que envolve

$$(1,1) = \int_0^{2\pi} = 2\pi\,.$$

Com isso,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,.$$

Para calcular a_n $(n > 1)$ multiplicamos os dois lados da expansão em série de Fourier para $f(x)$ escalarmente por $cos\,mx$,

$$\begin{aligned} (f, cos\,mx) &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\,(cos\,nx, cos\,mx) + b_n\,(sen\,nx, cos\,mx)] \\ &= a_m\,(cos\,mx, cos\,mx) = a_m \pi \end{aligned}$$

sendo que todos os outros produtos escalares dessa expansão se anulam (devido à ortogonalidade).

Assim,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,cos\,mx\,dx = a_m \pi\,,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,cos\,mx\,dx$$

com $m = 1, 2, \ldots$

De forma análoga, faremos agora o produto escalar com $sen\, mx$ objetivando o cálculo dos b_n:

$$\begin{aligned}(f, sen\, mx) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n \underbrace{(cos\, nx, sen\, mx)}_{0} + b_n\,(sen\, nx, sen\, mx)\right] \\ &= b_m\,(sen\, mx, sen\, mx) = b_m \pi\end{aligned}$$

de onde achamos os b_m,

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, sen\, mx\, dx$$

com $m = 1, 2, \ldots$

Voltando ao exemplo específico da onda quadrada, lembrando que entre 0 e π a função valia 1, e era nula entre π e 2π,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = 1/2\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sen\, nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-cos\, nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left[1 - \overbrace{cos\, n\pi}^{\pm 1}\right] =$$

$$= \begin{cases} 0\,, & \text{n par} \\ \frac{2}{n\pi}\,, & \text{n ímpar}\end{cases}$$

e a expansão fica:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[sen\, x + \frac{sen\, 3x}{3} + \frac{sen\, 5x}{5} + \ldots\right].$$

Nos pontos de saltos finitos (descontinuidades), como $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, os termos entre parênteses se anulam, e $f(x)$ tende ao valor $1/2$, que é exatamente metade da altura do salto.

Pode-se também escrever a série de Fourier na forma complexa, usando as relações

$$sen\, nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\,, \qquad cos\, nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\,.$$

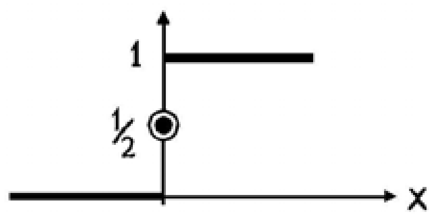

Figura 8.5: A função degrau, apresentando uma descontinuidade em $x = 0$.

Com isso,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i}\,(e^{inx} - e^{-inx}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\,(e^{inx} + e^{-inx}) \\ &= \underbrace{a_0}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{c_n} e^{inx} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{c_{-n}} e^{-inx} \right] \end{aligned}$$

e introduzindo as constantes complexas c_0, c_1, c_{-1}, c_2, c_{-2}, $\ldots$ definidas acima, temos:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}\,.$$

Usando as relações dos a_n e b_n, concluimos que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad \forall n\,.$$

Aqui, e no exemplo visto há pouco, usamos o intervalo $[0, 2\pi]$, mas poderíamos utilizar qualquer outro intervalo de comprimento 2π, como $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$, etc. A única alteração nesses casos seria a troca correspondente nos limites de integração do cálculo dos c_n.

Porém, se o período de $f(x)$ não for 2π, mas digamos T, então algumas mudanças têm que ser feitas. Ao invés de usar $cos\, nx$ e $sen\, nx$ (ou e^{inx}) na série de Fourier, teremos que usar:

$$cos\left(\frac{2\pi}{T}\, nx\right)\,, \qquad sen\left(\frac{2\pi}{T}\, nx\right)$$

$$\left(\text{ou } e^{i\,\frac{2\pi}{T}\, nx}\right)$$

na série de Fourier, que passa a ser escrita:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx + b_n \, sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx \right) \\
a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \, cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx \, dx \quad (\text{n}>1) \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \, sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx \, dx \quad (\text{n}>1)
\end{aligned}
$$

Na forma complexa,

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i \, \frac{2\pi}{T} \, nx} \, ,
$$

$$
c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, e^{-i \, \frac{2\pi}{T} \, nx} \, dx \quad (\forall n) \, .
$$

Outro modo de se escrever a série de Fourier é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \, cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx + b_n \, sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx \, \frac{2}{T} \int_0^T f(x') \, cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx' \, dx' + \right. \\
&\qquad \left. sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx \, \frac{2}{T} \int_0^T f(x') \, sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx' \, dx' \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(x') \times \\
&\quad \times \left(cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx \; cos \, \frac{2\pi}{T} \, nx' + sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx \; sen \, \frac{2\pi}{T} \, nx' \right) dx'
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(x') \, cos \, \frac{2\pi}{T} \, n \, (x - x') \, dx' \, .
$$

É interessante observar também que, em alguns casos, as constantes a_n podem ser todas nulas (ou todas as b_n). Fala-se, nesse caso, numa série de Fourier seno (ou cosseno). As funções ímpares são sempre representadas por séries de Fourier seno, enquanto as pares são representadas pelas séries de Fourier cosseno.

Vamos sumarizar, na próxima página, todas essas fórmulas vistas para as séries de Fourier.

Formulário - Fourier

f(x) com período 2π

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx\,, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad (n > 1) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \qquad (n > 1) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} \tag{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx\,.$$

f(x) com período T

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T} nx + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} nx \right) \qquad (3) \\ a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{T} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f(x) \cos \frac{2\pi}{T} nx\, dx \qquad (\text{n}>1) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T} f(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} nx\, dx \qquad (\text{n}>1) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \tag{4}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{T} f(x)\, e^{-i \frac{2\pi}{T} nx}\, dx \qquad (\forall n)\,.$$

Exemplo Expanda a função "dente de serra" em série de Fourier.

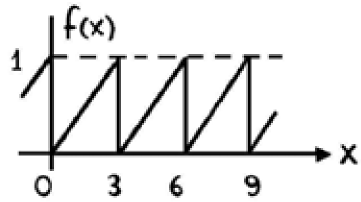

Figura 8.6: A função periódica "dente de serra".

Vamos usar a expansão (4) da página anterior. Neste problema, $T = 3$, e assim,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,\frac{2\pi}{3}\,nx}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{1.3}{2} = \frac{1}{2}\,, \\ c_n &= \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{x}{3}\,e^{-i\,\frac{2\pi}{3}\,nx}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\int_0^3 e^{\alpha x}\,x\,dx \end{aligned}$$

com $\alpha = -i2n\pi/3$.

Esta última integral pode ser calculada com o seguinte artifício (ou com a função gama, que veremos em Métodos de Física Teórica II). Para $n \neq 0$,

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \;\;\Rightarrow\;\; \frac{d}{d\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx = \int x e^{\alpha x}\,dx = -\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \frac{x}{\alpha}\,e^{\alpha x}$$

e assim, podemos obter c_n,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x}\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{9}e^{3\alpha}\left(\frac{3}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{3\alpha} = \frac{i}{2n\pi}\,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{i}{2n\pi} e^{in\frac{2\pi x}{3}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\left\{ \frac{e^{\frac{2\pi x}{3}} - e^{-\frac{2\pi x}{3}}}{1} + \frac{e^{\frac{4\pi x}{3}} - e^{-\frac{4\pi x}{3}}}{2} + \ldots \right\} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\left\{ 2i\, sen\, \frac{2\pi x}{3} + 2i\, sen\, \frac{4\pi x}{3} + \ldots \right\} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\left[sen\, \frac{2\pi x}{3} + sen\, \frac{4\pi x}{3} + sen\, \frac{6\pi x}{3} + \ldots \right]
\end{aligned}
$$

Exemplo Uma corrente alternada $i(t) = A\, sen\, \omega t$ passou por um retificador de onda completa. Mostre que a corrente de saída, $i'(t)$, pode ser expressa por

$$
i'(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{npar} \frac{cos\, n\omega t}{n^2 - 1}\, .
$$

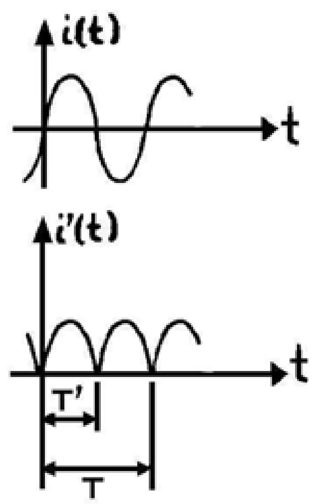

Figura 8.7: A ação do retificador de onda completa.

A corrente retificada é mostrada na figura 8.7. Trata-se aqui de obter a série de Fourier para $i'(t)$.

Usemos a expansão (3). Note que para i', $T' = T/2 = \pi/\omega$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\, sen\, \omega t\, dt = \frac{2A}{\pi} \\
a_n &= \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\, sen\, \omega t\, cos\, \frac{2\pi n t}{\pi/\omega}\, dt = \frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} sen\, \omega t\, cos\, 2n\omega t\, dt \\
&= \frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\, sen\, [(2n+1)\omega t]\, dt + \\
&\quad -\frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} \frac{1}{2}\, sen\, [(2n-1)\omega t]\, dt \\
&= \frac{A\omega}{\pi}\left\{(-1)[cos\,(2n+1)\pi - 1]\,\frac{1}{(2n+1)\omega} + \right. \\
&\quad \left. + [cos\,(2n-1)\pi - 1]\,\frac{1}{(2n-1)\omega}\right\} \\
&= -\frac{4A}{\pi(4n^2-1)}\,.
\end{aligned}
$$

Não é necessário calcular os b_n, que são nulos, já que a função $i(t)$ é par. Então,

$$
i'(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\, cos\, 2n\omega t
$$

ou

$$
i'(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{cos\, n\omega t}{n^2-1}\,.
$$

Vejamos agora algumas propriedades adicionais das séries de Fourier.

(i) Uma série de Fourier convergente nem sempre é uniformemente convergente. De fato, se a série representa uma função descontínua (com saltos finitos), aquela propriedade não é verificada.

Eis uma condição suficiente para a série de Fourier de $f(x)$ ser uniformemente convergente em $[a, b]$: $f(x)$ deve ser contínua em $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ e $f'(x)$ deve ser seccionalmente contínua em $[a, b]$.

(ii) Independentemente de ser uniformemente convergente ou não, uma série de Fourier convergente pode ser integrada termo a termo.

(iii) O mesmo não se pode dizer quanto à derivação da série. Se a série for uniformemente convergente, pode ser derivada termo a termo.

ATIVIDADES

1. Ache a série de Fourier da função "dente de serra", ela é uma sequência de pulsos triangulares, como mostra a figura 8.8.

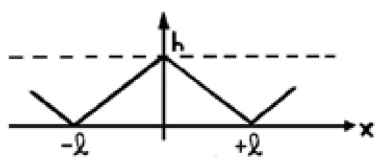

Figura 8.8: Uma função dente de serra, de período 2ℓ.

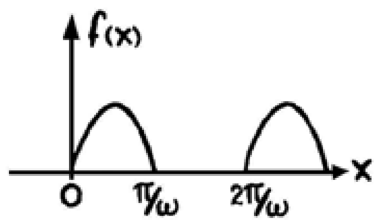

Figura 8.9: A ação do retificador de meia onda sobre uma voltagem senoidal.

2. Obtenha a série de Fourier para a função

$$f(x) = \begin{cases} A\, sen\, \omega x\,, & 0 < x < \pi/\omega \\ 0\,, & \pi/\omega < x < 2\pi/\omega \end{cases}$$

(corrente alternada após passar por um "retificador de meia onda" - um diodo - que deixa passar a corrente se for positiva, e a bloqueia se for negativa). Veja a figura 8.9

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Obter a série de Fourier, significa calcular os coeficientes a_0, a_n, b_n. Se necessário, você pode usar uma tabela de integrais para ajudar no seu cálculo.

CONCLUSÃO

As séries de Fourier são úteis na descrição matemática de de oscilações e ondas, na medida em que utilizam as chamadas funções harmônicas, seno e cosseno, como uma base em termos da qual é feita a expansão. Os coeficientes da expansão podem ser calculados através de integrais simples.

RESUMO

Nesta aula estudamos propriedades básicas das séries de Fourier, em particular as condições de convergência da série infinita, e aprendemos a fazer a expansão de uma função periódica qualquer em uma série de Fourier. Aplicamos tal técnica a alguns problemas de Física.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você aprenderá que a função delta de Dirac, embora bastante usada em Física, na verdade não é uma função, e verá como podemos interpretá-la mais apropriadamente como uma distribuição.

REFERÊNCIAS

CHURCHILL, Ruel. Séries de Fourier e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.

BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.