Aula

9

Função Delta de Dirac: Teoria das Distribuições

META

Introduzir noções básicas da teoria das distribuições, e discutir algumas distribuições usuadas em problemas de Física.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: identificar propriedades básicas de espaços de funções de teste, e de espaços de distribuições; operar com algumas distribuições de uso frequente.

PRÉ-REQUISITOS

Aulas anteriores sobre espaços vetoriais e espaços métricos.

INTRODUÇÃO

O emprego de procedimentos envolvendo a chamada função delta de Dirac é bastante comum na Física, apesar de deixar a desejar do ponto de vista do rigor matemático. É possível, no entanto, tornar matematicamente aceitável o uso da função delta, encarando-a como uma distribuição, ou seja, como um funcional linear e contínuo agindo sobre um espaço convenientemente escolhido de funções de teste.

Em Física é comum utilizar-se a chamada "função" delta de Dirac, $\delta(x)$, "definida" pelas condições:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\,, & x \neq 0 \\ \infty\,, & x = 0 \end{cases}$$

e, ainda, $\delta(x)$ deve satisfazer a propriedade:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

sendo $\epsilon > 0$ e $f(x)$ contínua em $x = 0$.

Mas, como você pode perceber, definir uma função que é zero em quase todos os pontos, e no único ponto $x = 0$ onde não se anula, ela tem valor infinito (se é que esse é um valor...), é no mínimo estranho. Já do ponto de vista matemático, estas condições de modo nenhum constituem uma definição.

Alguns autores introduzem a função delta como o limite de sequências de funções, como por exemplo

$$\delta(x) = \text{"} \lim_{n\to\infty} \text{"} g_n(x)$$

com as funções Gaussianas normalizadas g_n dadas por

$$g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}\,.$$

As funções g_n são normalizadas, isto é, têm *norma* um:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g_n(x)]^2\, dx = 1\,.$$

Observe a figura 9.1. A integral das funções g_n é um; à medida em que n cresce, a função vai se estreitando, e seu pico vai ficando mais alto, mas mantendo a área de uma unidade sob a curva. Nesse sentido intuitivo, $\delta(x)$ seria o limite dessa sequência, quando o pico fica tão estreito (largura zero!) e alto (g tende a infinito em $x = 0$).

Ocorre que, do ponto de vista matemático, o limite de tal sequência de funções não existe, e delta não é uma função.

Apesar disso, continuou-se a utilizar $\delta(x)$ em procedimentos heurísticos (isto é, que não são rigorosos ou justificados) - especialmente em

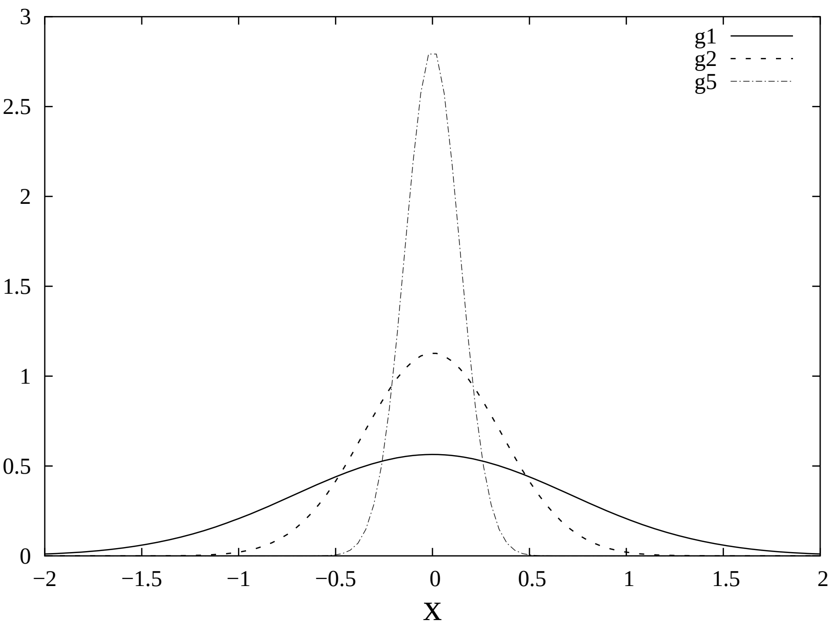

Figura 9.1: Três funções da sequência de funções Gaussianas $g_n(x)$, para $n = 1, 2, 5$, cujo "limite" seria a função delta de Dirac.

Física - até que a teoria das distribuições foi formalizada pelo matemático francês Laurent Schwartz, por volta de 1950. Vamos apresentar em seguida as noções básicas, os rudimentos dessa teoria.

As funções simbólicas como $\delta(x)$ (e outras que comentaremos) podem ser introduzidas de modo matematicamente válido não como funções, mas como funcionais lineares atuando sobre certos espaços lineares de funções (as chamadas "funções de teste"). Em particular, há dois espaços interessantes por suas aplicações: $\mathcal{D}$ e $\mathcal{S}$.

Relembramos que um funcional linear é um tipo especial de função que associa elementos de um espaço vetorial V à números de um dado corpo K, $f : V \to K$, obedecendo a condição:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \,, \qquad \forall x, y \in V, \ \forall \alpha, \beta \in K \,.$$

O Espaço $\mathcal{D}$ Chamaremos de $\mathcal{D}$ o conjunto das chamadas funções de teste $\phi(x)$,

$$\phi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$$

ou seja, funções de variável real a valores complexos, que devem obedecer as seguintes restrições:

(i) Devem existir as derivadas de todas as ordens de $\phi(x)$;

(ii) As funções $\phi(x)$ devem se anular fora de um intervalo limitado $[a, b]$ da reta real. Tal intervalo é chamado o suporte de $\phi(x)$.

Exemplo Um exemplo de função de teste de $\mathcal{D}$ é o que segue:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1\,, \\ 0\,, & |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

O espaço $\mathcal{D}$ constitui um espaço vetorial com relação às operações usuais de soma de funções e multiplicação de um escalar por uma função (geralmente usamos, em Física, o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos):

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)\,, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}\,;$$

$$(\alpha\phi)(x) = \alpha\,\phi(x)\,, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}, \forall \alpha \in \mathbf{C}\,.$$

Note que estas relações são decorrentes da exigência da linearidade desses funcionais $\phi(x)$ de $\mathcal{D}$. Observe também que para tais expressões fazerem sentido, é necessário que haja alguma intersecção não vazia entre os suportes do funcional ϕ e do funcional ψ.

Pode-se introduzir algumas normas em $\mathcal{D}$, porém usualmente a topologia de $\mathcal{D}$ é dada pela noção de convergência de sequências de funcionais. Definimos, postulamos a noção de convergência, e a topologia estará consequentemente determinada.

Definição Uma sequência $\{\phi_n(x)\}$ de funcionais de $\mathcal{D}$ converge para $0 \in \mathcal{D}$ se forem verificadas as duas condições seguintes:

(i) Deve existir um conjunto limitado $[a, b]$ fora do qual todos os funcionais $\{\phi_n\}$ se anulam;

(ii) Os funcionais $\{\phi_n\}$, bem como as suas derivadas de todas as ordens, devem convergir uniformemente para zero,

$$\phi_n^{(i)}(x) \longrightarrow 0\,, \quad \forall i,\ \forall x \in [a, b]\,.$$

Dizer que a convergência deve ser uniforme significa que, no processo de limite, para cada $\delta > 0$, existe um $\epsilon > 0$ que é função apenas de δ (e não de x).

O Espaço $\mathcal{D}'$ das Distribuições Uma distribuição sobre $\mathcal{D}$ é qualquer funcional linear e contínuo definido nesse espaço,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \phi &\longrightarrow T(\phi) = (T, \phi) \end{aligned}$$

(às vezes indicaremos, numa notação alternativa, $T(\phi) = \langle T|\phi\rangle$. Voltaremos a comentar esta notação adiante) desde que sejam verificadas:

(i)
$$(T, \alpha\phi + \beta\psi) = \alpha\,(T, \phi) + \beta\,(T, \psi)$$

para quaisquer $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ e quaisquer números complexos α, β. Essa é a condição de linearidade;

(ii) $\forall \phi_n \in \mathcal{D}$, tal que $\phi_n \to 0$ quando $n \to \infty$, então devemos ter

$$(T, \phi_n) \longrightarrow (T, 0)\,, \quad \text{quando } n \to \infty$$

(condição de continuidade).

Indicaremos por $\mathcal{D}'$ o espaço de todas as distribuições desse tipo.

Exemplo A imprecisa "função delta de Dirac" passa a ser corretamente colocada como a <u>distribuição delta de Dirac</u>:

$$(\delta_0, \phi) = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\,.$$

Para se convencer de que δ_0 é realmente uma distribuição, você terá que mostrar a linearidade e a continuidade desse funcional. A definição acima para δ_0 pode ser estendida para um outro ponto arbitrário, assim:

$$(\delta_a, \phi) = \phi(a) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\,.$$

Esse último funcional nós físicos costumamos denotá-lo $\delta(x - a)$.

Exemplo Vamos introduzir agora a chamada *distribuição regular*. Ela é definida para cada função $f(x)$ localmente integrável: f será localmente integrável se para qualquer intervalo limitado $[a, b]$ existir a integral

$$\int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

A distribuição regular f será dada por

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \phi(x)\, dx\,.$$

Note que a integral certamente é convergente, uma vez que f é integrável, e ϕ tem suporte limitado (anula-se fora de algum intervalo limitado da reta real). Veja, também, que tal integral (que aparece, pelo menos, no caso das distribuições regulares) é a mesma usada para definir o produto escalar entre as funções f e ϕ na reta real. Fazendo uso da notação de Dirac, tal produto escalar pode ser escrito:

$$\langle f|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \phi(x)\, dx\,.$$

Daqui por diante vamos preferir usar esta notação para indicar a ação de uma distribuição T (qualquer) sobre uma função de teste ϕ:

$$\langle T|\phi\rangle$$

pelo uso frequente de tal notação em Mecânica Quântica.

As distribuições que não são regulares são ditas singulares (como δ). Um exemplo clássico de distribuição regular é dado pela função de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

que permite definir a distribuição de Heaviside,

$$\langle H|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \phi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \phi(x)\, dx$$

(independentemente do valor que se queira atribuir a $H(0)$).

$\mathcal{D}'$ será um espaço linear, agregando-se as operações de soma de distribuições e multiplicação de uma distribuição por um escalar,

$$\langle R + T|\phi\rangle = \langle R|\phi\rangle + \langle T|\phi\rangle$$

$(\forall R, T \in \mathcal{D}', \forall \phi \in \mathcal{D})$;

$$\langle \alpha T|\phi\rangle = \alpha\langle T|\phi\rangle$$

$(\forall T \in \mathcal{D}', \forall\phi \in \mathcal{D}, \forall\alpha \in \mathbf{C})$ e por vezes é chamado o espaço dual de $\mathcal{D}$.

A regra para a derivação de distribuições é motivada pela fórmula obtida no caso de distribuições regulares,

$$\langle f'|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'\,\phi\,dx = [f\phi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f\,\phi'\,dx = -\langle f|\phi'\rangle\,.$$

Define-se, então, em geral a derivada de uma distribuição:

$$\langle T'|\phi\rangle = -\langle T|\phi'\rangle\,,$$

para qualquer função de teste $\phi \in \mathcal{D}$ e qualquer distribuição $T \in \mathcal{D}'$.

Vamos calcular agora a derivada de uma função $f(x)$, contínua exceto para $x = a$, onde apresenta um salto finito de altura $s_a = f_+ - f_-$ (veja a figura 9.2).

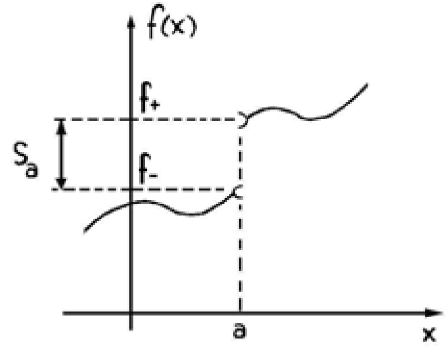

Figura 9.2: Uma função contínua exceto no ponto $x = a$, onde tem um salto finito.

$$\begin{aligned}\langle f'|\phi\rangle &= -\langle f|\phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\phi'\,dx \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0_+}\left\{\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f\,\phi'\,dx + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f\,\phi'\,dx + \int_{a+\epsilon}^{+\infty} f\,\phi'\,dx\right\}\,.\end{aligned}$$

No limite de ϵ tendendo a zero, a segunda integral acima se anula. Fazemos uma integração por partes nas outras duas:

$$\begin{aligned}
\langle f'|\phi\rangle &= -\Bigg\{\lim_{\epsilon\to 0_+}\Big[f(x)\phi(x)\Big]_{-\infty}^{a-\epsilon} - \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f'\,\phi\,dx + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to 0_+}\Big[f(x)\phi(x)\Big]_{a+\epsilon}^{+\infty} - \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{a+\epsilon}^{+\infty} f'\,\phi\,dx\Bigg\} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0_+}\left[f(a-\epsilon)\phi(a)\right] + \lim_{\epsilon\to 0_+}\left[f(a+\epsilon)\phi(a)\right] + \\
&\quad + \left\{\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f'\,\phi\,dx + \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{a+\epsilon}^{+\infty} f'\,\phi\,dx\right\}
\end{aligned}$$

Dentro destas últimas chaves, encontra-se a integral do que chamamos de derivada clássica, $\{f'\}(x)$ (a derivada costumeira),

$$\{...\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\{f'\}(x)\,\phi\,dx = \langle\{f'\}|\phi\rangle$$

e com isto escrevemos

$$\begin{aligned}
\langle f'|\phi\rangle &= \phi(a)\underbrace{[f_+ - f_-]}_{s_a} + \langle\{f'\}|\phi\rangle \\
&= s_a\,\langle\delta_a|\phi\rangle + \langle\{f'\}|\phi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Como tal igualdade vale para qualquer ϕ de $\mathcal{D}$, concluimos que

$$f' = \{f'\} + s_a\,\delta_a\,.$$

Se f for seccionalmente contínua, e tiver vários saltos finitos, digamos em $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_n$, então

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{n} s_i\,\delta_{a_i}\,.$$

Uma segunda derivação, tomada sobre essa expressão, nos fornece:

$$f'' = \{f''\} + \sum_{i=1}^{m} {s_i}'\,\delta_{b_i} + \sum_{i=1}^{n} s_i\,{\delta'}_{a_i}\,,$$

onde ${s_i}'$ são os saltos de f' (nos pontos $b_1, b_2, \ldots, b_m$), e como antes s_i são os saltos de f em $a_1, a_2, \ldots, a_n$. No último termo aparece ${\delta'}_{a_i}$:

esta é a derivada primeira da função delta de Dirac (ou melhor, da distribuição delta), que é definida assim:

$$\langle \delta_{a_i} | \phi \rangle = -\phi'(x = a_i) = -\langle \delta_{a_i} | \phi' \rangle \, .$$

Outros resultados de derivação distribucional podem ser conseguidos com o auxílio das fórmulas acima para f' e f''.

Exemplos A derivada da função degrau de Heaviside, $H(x)$, vale:

$$H'(x) = \delta_0$$

(observe na figura 9.3 que a derivada clássica de $H(x)$ é nula).

A derivada da função módulo de x ($f(x) = |x|$) é igual à função sinal de x, $\epsilon(x)$, que também aparece na figura 9.3. Derivando uma segunda vez a função módulo,

$$|x|'' = \epsilon' = 2\,\delta_0 \, .$$

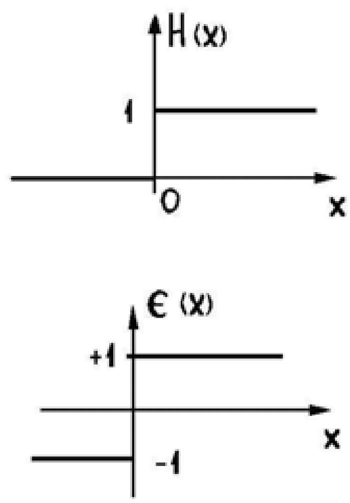

Figura 9.3: Um gráfico das funções degrau de Heaviside, $H(x)$, e da função sinal de x, $\epsilon(x)$, que vale -1 para x negativo e $+1$ para x positivo.

Exemplo Vamos agora investir algum tempo na obtenção da derivada distribucional da função $log|x|$.

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dx} \log|x| \,\middle|\, \phi \right\rangle &= -\left\langle \log|x| \,\middle|\, \phi' \right\rangle \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0_+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \log|x|\, \phi'\, dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \log|x|\, \phi'\, dx \right\} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0_+} \left\{ \underbrace{\log\epsilon\phi(\epsilon) - \log\epsilon\phi(-\epsilon)}_{0} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \right\}\end{aligned}$$

sendo que nesta última passagem foi feita uma integração por partes. As duas integrais restantes no lado direito são agregadas sob o símbolo "vp", que explicaremos em seguida:

$$\left\langle \frac{d}{dx} \log|x| \,\middle|\, \phi \right\rangle = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, dx\,.$$

No sentido usual do Cálculo Diferencial e Integral, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$$

existe se existirem os dois limites:

$$\lim_{\epsilon_1\to 0_+} \int_{-\infty}^{-\epsilon_1} \frac{\phi(x)}{x}\, dx\,; \qquad \lim_{\epsilon_2\to 0_+} \int_{+\epsilon_2}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, dx\,,$$

onde ϵ_1, ϵ_2 são independentes um do outro.

No caso, porém, não há esses limites. Mas há, sim, o limite:

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \right\}$$

(aqui, as integrais são calculadas juntamente, e tudo funciona como se houvesse um cancelamento das partes divergentes de uma e da outra integral).

Esse limite *especialíssimo* recebe o nome de valor principal (ou valor principal de Cauchy) da referida integral, daí o símbolo "vp" antes do símbolo de integração.

Exemplo Um outro tópico que guarda alguma semelhança com o exemplo anterior é a parte finita de Hadamard. Esta é obtida de uma integral divergente "subtraindo" dela uma parte infinita da forma:

$$\epsilon^{\mu}\, log^{\nu}\, \epsilon$$

para $\epsilon \to 0$ e $Re\,\mu \geq 0$, $Re\,\nu \geq 0$ excluído o caso $\mu = \nu = 0$. Um exemplo clássico é:

$$\text{pf} \int_0^b \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0_+} \left\{ \int_\epsilon^b \frac{dx}{x} + log\ \epsilon \right\} = log\ b$$

onde você deve notar que o resultado da integração é $log\, b - log\, \epsilon$, e o termo divergente $(-log\, \epsilon)$ é subtraído.

Procedimentos como esse são comuns em Teoria de Campo; chamam-no **renormalização**, e essa técnica é útil para eliminar problemas com integrais divergentes que surgem na teoria. Gostaríamos de enfatizar que vp $1/x$, pf $1/x^2$, etc. são corretamente interpretadas como distribuições (singulares).

Ainda relacionado com o aparecimento das distribuições quando se faz uso da derivação, mencionaremos de modo breve que as próprias equações diferenciais, além de possuirem as soluções tradicionais já conhecidas e estudadas por você, admitem outras soluções, distribucionais. Mostraremos isso através de um exemplo.

Exemplo Considere a equação diferencial

$$x\, y' = 0\,;$$

ela possui a solução (chamaremos a solução clássica) $y_{class} = C_1 =$ constante. No entanto,

$$y_{distr} = C_2\, H(x)$$

também é uma solução ($H(x)$ é a função degrau de Heaviside), no caso, nós a chamamos de solução distribucional. De fato, ela é uma solução:

$$\begin{aligned} \langle x\, C_2\, H' \,|\phi\rangle &= C_2 \,\langle x\, \delta_0 \,|\phi\rangle \\ &= C_2 \,\langle \delta_0 \,|x\, \phi\rangle = 0 \end{aligned}$$

já que $x\phi$ calculada em $x = 0$ se anula.

Mostramos que uma solução mais geral daquela equação diferencial pode ser escrita:

$$y = C_1 + C_2\, H(x)\,.$$

O Espaço S É o espaço das funções de teste temperadas, que são infinitamente deriváveis sobre toda a reta real, e "rápidamente decrescentes no infinito", o que significa:

A letra **S** foi escolhida em homenagem a Schwartz.

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|x^k\, \phi^{(p)}(x)\right| = 0$$

para quaisquer inteiros $k \geq 0$ e $p \geq 0$.

Um exemplo de função temperada é a Gaussiana, e^{-x^2}.

Além da estrutura linear, que o espaço S apresenta, introduzimos uma noção de convergência através da convergência uniforme de sequências. Dizemos que ϕ_n converge em S para 0 quando:

$$x^k\, \phi_n^{(p)}(x) \longrightarrow 0$$

à medida que $n \to \infty$, para quaisquer k, p maiores ou iguais a zero.

As distribuições temperadas, que formam um espaço linear S', são funcionais lineares e contínuos sobre S.

São exemplos de distribuições temperadas os polinômios, delta e suas derivadas, vp e pf de funções como $1/x^m$, e^{ikx} (com k real).

Tem-se as seguintes relações de inclusões entre os espaços $\mathcal{D}$ e S:

$$\mathcal{D} \subset S\,; \quad \mathcal{D}' \supset S'\,.$$

Um espaço de Hilbert é autodual,

$$H \equiv H'$$

(lembre-se que o Teorema da Representação de Riesz estabelece a existência de correspondência um-a-um entre elementos de H e seu dual H').

Assim, se pensarmos em H como sendo o espaço das funções de quadrado integrável sobre a reta real, teremos as relações de inclusão:

$$\mathcal{D} \subset H \equiv H' \subset \mathcal{D}'$$

e tal terna de espaços encaixados é conhecida como "espaço de Hilbert equipado", ou tripleto de Gel'fand, abreviadamente na literatura R.H.S. (*Rigged Hilbert Space*).

Um segundo exemplo de R.H.S. é:

$$S \subset H \subset S' \, ;$$

tais tripletos de espaços mostram-se úteis como ferramentas matemáticas mais adequadas para uso na Mecânica Quântica. Objetos como os núcleos de transformações de Fourier, e^{ikx}, não são encarados mais como funções do espaço de Hilbert H (como já comentamos antes, eles não pertencem a esse espaço), mas como distribuições de S', atuando sobre as funções de onda. Estas, pertenceriam não ao espaço de Hilbert H, mas ao espaço "menor" S das funções temperadas, que possuem certa "suavidade" em virtude de serem infinitamente deriváveis, o que parece combinar bem com o que se espera dos estados físicos.

ATIVIDADES

1. Mostre que a derivada distribucional da função módulo de x é igual à função sinal de x.

2. Calcule a derivada distribucional da função sinal de x.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Você terá que recorrer ao texto, em particular aos exemplos resolvidos para atacar estas duas questões!

CONCLUSÃO

Em Física é comum o uso da função delta de Dirac, especialmente na teoria quântica, em procedimentos não-rigorosos (heurísticos). No entanto, é possível formalizar tais desenvolvimentos, introduzindo a distribuição delta de Dirac. Observamos que há outras distribuições, que podem ser usadas em procedimentos da Física Teórica, como as derivadas de delta, ou os valores principais e partes finitas.

RESUMO

Nesta aula foram apresentados os rudimentos da teoria das distribuições, e discutidos os espaços distribucionais $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{S}'$, das distribuições de suporte limitado e das distribuições temperadas. Mostramos que derivadas de funções que não são contínuas, e mesmo certas equações diferenciais, podem levar a distribuições como a função delta.

PRÓXIMA AULA

Serão desenvolvidos conceitos básicos de probabilidade e estatística, e seu uso será exemplificado com aplicações em Física.

REFERÊNCIAS

SCHWARTZ, Laurent. Théorie des Distributions. Paris: Hermann, 1966.

GEL'FAND, I. SHILOV, G. Generalizes Functions. New York: Academic Press, 1968.

BRAGA, Carmen. Notas de Física Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.