Aula

10

Elementos de Teoria das Probabilidades

META

Introduzir conceitos básicos de teoria de probabilidades e estatística, discutindo algumas distribuições estatísticas que regem grande classe de fenômenos físicos.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de: calcular probabilidades relacionadas a eventos aleatórios, fazendo uso das distribuições binomial, ou de poisson, ou normal.

PRÉ-REQUISITOS

Nenhum.

INTRODUÇÃO

Em vários ramos da Física Teórica, por vezes precisamos tomar procedimentos de médias estatísticas, ou executar cálculos de probabilidades. Nesta aula, revisaremos conceitos básicos de probabilidades, introduziremos os conceitos de variável estocástica e espaço amostral, e teremos um primeiro contato com as distribuições estatísticas binomial, Gaussiana e de Poisson.

Aula 10

Um dos primeiros tópicos apresentados ao estudante de Física é a segunda lei de Newton. Resolvida a equação à ela correspondente, consegue-se prever qual será o movimento do corpo, determina-se a forma de sua trajetória.

Mas agora, imagine um volume não muito grande de um gás, digamos um litro, dentro de um recipiente fechado. Tal gás é constituído por pequenas partículas: moléculas, ou então átomos isolados. Há muitas delas, talvez algo da ordem de 10^{23} partículas (essa é a ordem de grandeza do número de Avogadro, que corresponde a um mol do referido gás). Evidentemente, não devemos ter muita esperança quanto a resolver as equações de movimento para cada uma das 10^{23} partículas, calcular suas trajetórias, etc. Mesmo <u>sem</u> efetuar tais cálculos exatos, é possível extrair informações importantes a respeito do comportamento do gás, por exemplo poderíamos concluir que o gás obedece à equação dos gases ideais,

$$pV = nRT\,.$$

Há um procedimento teórico, consistindo em calcular **médias estatísticas**, que permite relacionar grandezas como a temperatura T, que fundamentalmente é a energia cinética média das partículas do gás, com o volume V ocupado pelo gás, com a pressão (força média exercida pelo gás sobre uma unidade de área do recipiente) e o número total de partículas do gás. Este é o âmbito da Física Estatística, através da qual consegue-se <u>deduzir</u> leis da Termodinâmica.

Como um segundo exemplo de aplicação de idéias de probabilidades e estatística em Física, relembramos a revolução científica ocorrida na virada do século XIX ao XX. De forma muito resumida, podemos dizer que foi descoberto que partículas do mundo microscópico, tais como os elétrons, não se comportam como <u>partículas</u>, as leis de Newton não valem para elas. Constatou-se que tais "partículas" comportam-se mais como <u>ondas</u>, e por exemplo o elétron no átomo do hidrogênio estaria "espalhado" no átomo todo (já que teria o comportamento de onda). O máximo que poderíamos encontrar com relação à posição do elétron seriam <u>probabilidades</u> de que estivesse numa posição ou outra. Aliás, os orbitais $1s$, $2s$, $2p$, etc. estudados em Química são as <u>regiões</u> do átomo onde a probabilidade de encontrar o elétron seria máxima. É claro: o elétron poderia não estar exatamente naquela superfície do orbital!

No domínio microscópico, portanto, a Física é descrita pela Mecânica Quântica, os métodos nela empregados são probabilísticos, e na maior parte do tempo, o que conseguimos calcular são médias estatísticas.

10.1 Permutações, Arranjos e Combinações

Revisaremos, nesta seção, os conceitos de permutação, arranjo e combinação, normalmente introduzidos no ensino médio.

10.1.1 Permutações

Suponha que tenha sido dado um certo conjunto de elementos. Como exemplo, vamos considerar o conjunto das três primeiras letras do alfabeto, $\{a, b, c\}$. A questão que se coloca é saber qual o número das formas distintas possíveis de se exibir ou ordenar os elementos desse conjunto, ou seja, qual o número de permutações, que indicaremos P. No caso do conjunto do exemplo, podemos enumerar as seguintes possibilidades:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba\,,$$

e $P = 6$.

Vamos obter agora uma fórmula geral do número de permutações para um conjunto com N elementos. Num primeiro momento, por simplicidade, suporemos que os elementos são todos distintos. O caso de conjuntos com elementos repetidos, trataremos mais adiante.

A contagem do número de permutações possíveis é efetuada considerando todas as possibilidades de preenchimento de um quadro hipotético, inicialmente vazio, com N posições onde seriam colocados os N elementos do conjunto:

$$\begin{array}{lccccc} & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \ldots & \sqcup \\ \text{Posição} & 1 & 2 & 3 & \ldots & N \end{array}$$

Como há N elementos do conjunto, há N possibilidades de preencher a primeira posição do quadro. Para preencher a segunda posição, há $(N-1)$ elementos possíveis (já que um foi retirado para preencher a primeira posição). Para preencher a terceira posição há $(N-2)$ possibilidades, e assim por diante, diminuindo (de um em um) até a última posição do quadro, para a qual restará um único elemento do conjunto. Note que tais números de possibilidades para cada posição se multiplicam para obter o número total de possibilidades:

$$P_N = N\,(N-1)\,(N-2)\ldots 1$$

e esse produto é chamado "N fatorial" ou fatorial de N,

$$P_N = N!$$

Em particular, para o conjunto das três letras,

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

conferindo com o que havíamos achado antes.

10.1.2 Arranjos

Agora vamos colocar um outro problema. Temos um conjunto, digamos com três elementos $\{a, b, c\}$, e queremos saber de quantas formas podemos arranjar os **três elementos** em conjuntos de **dois elementos**. Diz-se: número de arranjos possíveis de três elementos, dois a dois. Isto também não é difícil de descobrir, com um conjunto pequeno assim:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb\,.$$

Vamos achar uma fórmula geral para o número de arranjos de N elementos (que, num primeiro momento, vamos supor que sejam todos diferentes) M a M, número esse que denotaremosA_N^M. Usaremos a mesma idéia do quadro para as permutações, com a diferença que agora há N elementos e apenas $M < N$ posições:

$$\begin{array}{cccccc} & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \ldots & \sqcup \\ \text{Posição} & 1 & 2 & 3 & \ldots & M \end{array}$$

De novo, na primeira posição há N possibilidades, na segunda posição $(N-1)$ possibilidades, etc. Para a M-ésima posição há $(N - M + 1)$ elementos do conjunto ainda disponíveis, e assim,

$$A_N^M = N\,(N-1)\,(N-2)\ldots(N-M+1)\,.$$

Isto pode ser escrito:

$$\begin{aligned} A_N^M &= N\,(N-1)\ldots(N-M+1)\,\frac{(N-M)(N-M-1)\ldots 1}{(N-M)(N-M-1)\ldots 1} \\ &= \frac{N!}{(N-M)!}\,. \end{aligned}$$

No exemplo do conjunto das três letras, obteríamos:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1!} = \frac{6}{1} = 6$$

de acordo com o que havíamos encontrado.

10.1.3 Combinações

Vamos colocar ainda um terceiro problema, diferente também dos dois anteriores desta aula. Dado um conjunto com três elementos distintos, digamos, $\{a, b, c\}$, desejamos saber quantos agrupamentos diferentes de dois elementos podemos formar. Esses agrupamentos serão considerados diferentes quando os elementos que os compõem sejam distintos, independentemente da ordem em que apareçam nesses agrupamentos. Queremos dizer: o agrupamento ab seria o mesmo que o agrupamento ba (pois ambos têm os mesmos elementos a e b).

Então, o número de combinações de três elementos dois a dois é três:

$$ab,\ ac,\ bc\,.$$

Você deve observar que excluímos, em relação aos arranjos, exatamente ba, ca e cb. Ora, ab e ba são as permutações de dois elementos (assim como ac e ca, ou bc e cb) de modo que tivemos que "corrigir" o número de combinações dividindo pelo número de permutações de dois elementos,

$$\frac{3!}{1!\,2!} = \frac{6}{1.2} = 3\,.$$

Genericamente, para um conjunto de N elementos distintos, combinados M a M ($M < N$), temos o número de combinações C_N^M dado por

$$C_N^M = \frac{A_N^M}{M!} = \frac{N!}{(N-M)!\,M!}\,.$$

10.1.4 Conjuntos com Repetições

O exemplo anterior já nos indicou a maneira de "corrigir" o número de possibilidades quando se quer descontar algumas permutações de elementos.

Retomemos então a questão do número de permutações de um dado conjunto de elementos, quando há elementos repetidos nesse conjunto. Retomemos também o conjunto de três elementos que vínhamos usando, mas com o último elemento repetido, digamos $c = b$. O conjunto então fica $\{a, b, b\}$. As permutações possíveis, podemos construí-las como antes, mas com b ocupando o lugar anteriormente reservado a c,

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Antes} & abc & acb & bac & bca & cab & cba \\ \text{Agora} & abb & \underbrace{abb} & bab & bba & \underbrace{bab} & \underbrace{bba} \end{array}$$

e vemos que há três agrupamentos que devem ser excluídos (iguais a outros), na linha acima são os marcados com chaves. Assim, o número de permutações daquele conjunto é três. Tivemos que "corrigir" $P_3 = 3!$ do conjunto $\{a, b, c\}$ dividindo por $2 = 2! = P_2$ (que é o número de permutações dos elementos repetidos).

Desse modo, havendo repetições de dado elemento, como no conjunto:

$$\{a, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{\text{R repetições}}, c\}$$

corrige-se o número de permutações assim:

$$P = \frac{P_N}{R!}.$$

No caso de haver outras repetições, cada uma delas implicará na divisão pelo respectivo fatorial do número de elementos repetidos,

$$\{\underbrace{a, a, \ldots, a}_{\text{R repetições}}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{\text{S repetições}}, c\}$$

$$P = \frac{P_N}{R!\,S!}.$$

Exemplo Calcule quantas "palavras" distintas podem ser construídas com as treze letras da palavra probabilidade.

Ao elaborar as permutações dessas letras, devemos levar em conta as repetições, de modo que palavras como "probabilidade" e "probabilidade" (obtidas permutando apenas os dois b's), que são iguais, não sejam contadas duas vezes. O número de repetições de cada letra é:

$$\begin{array}{ccccccccc} p & r & o & b & a & i & l & d & e \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Assim, o número de permutações sem repetições será:

$$P = \frac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 389.188.800\,.$$

Este tipo de "correção" para descontar permutações de elementos repetidos também deve ser feita no cálculo do número de arranjos A_N^M e combinações C_N^M quando houver repetições entre os N elementos.

Incidentalmente, os números

$$C_N^M = \frac{N!}{(N-M)!\,M!} = \binom{N}{M}$$

são chamados números binomiais, porque aparecem como coeficientes da expansão do binômio de Newton,

$$(x+a)^N = \sum_{M=0}^{N} \binom{N}{M}\, x^M\, a^{N-M}\,.$$

Tais números gozam de uma propriedade de simetria, fácil de ser mostrada,

$$\binom{N}{M} = \binom{N}{N-M}\,.$$

10.2 Probabilidades

Vamos introduzir alguns conceitos de probabilidades, fazendo uso de exemplos concretos. Pense num daqueles dados usados em jogos. Bem entendido: que seja um dado não-viciado, quando lançado exiba com iguais chances qualquer das seis faces, que consideraremos numeradas de 1 a 6. Essas seis possibilidades constituem o espaço amostral. Já que a probabilidade de que o resultado do lançamento $(1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 na face de cima) é igual para cada uma das seis possibilidades -

que chamaremos eventos - a probabilidade associada à cada um dos eventos $1-6$ é:

$$P = \frac{1}{6}$$

e os eventos serão ditos equiprováveis.

Esta escolha foi feita de modo que a probabilidade total, ou seja, a probabilidade de que num lançamento obtenhamos 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 seja um,

$$P_{total} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

ou, em outros termos, a probabilidade total é de 100%.

Na expressão acima, somamos as probabilidades de cada um dos seis eventos. É bom chamar sua atenção de que esses eventos são mutuamente excludentes, isto é, cada lançamento implica numa única face voltada para cima (um único número sai como resultado desse lançamento).

Em termos gerais, se A e B são eventos mutuamente excludentes, indica-se

$$A \cap B = \emptyset$$

(leia-se: "a intersecção de A e B é vazia"). Nesse caso, a probabilidade de que ocorra A ou B é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$(A \cap B = \emptyset)$.

Aliás, quando consideramos os eventos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que eram excludentes, a soma das probabilidades relativas a cada um desses eventos era um. Nessa situação, diz-se que aquele conjunto de eventos constitui uma partição do espaço amostral.

Agora, vamos considerar uma outra situação. Queremos calcular a probabilidade de que num lançamento com dois dadinhos, se consiga as faces "1" para cima no primeiro dado e "3" no segundo. Ora, você já sabe que a probabilidade de que o lançamento de um dado forneça "1" é $1/6$, e o mesmo para o resultado "3". Considerando, de novo, dados não-viciados com iguais probabilidades de ocorrer qualquer face, podemos calcular a probabilidade considerando todas as possibilidades para o conjunto dos dois dados:

$$\begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array}$$

portanto há 36 possibilidades, e assim,

$$P = \frac{1}{36}\,.$$

Isso pode ser calculado também (mais facilmente!) como o produto das probabilidades para cada dado,

$$P = P(\text{"}1\text{"})\,P(\text{"}3\text{"}) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}\,.$$

É bom chamar a atenção de que os lançamentos dos dois dados são <u>independentes</u>, daí valer esse resultado.

Como um outro exemplo, suponha que você foi até uma lotérica jogar na Mega-Sena, e escolheu <u>seis</u> números em seu volante. Qual a probabilidade de que seus números sejam sorteados e você ganhe alguns milhões de reais? Vamos calcular, talvez eu consiga lhe convencer de que está desperdiçando seu dinheiro! São sorteados <u>seis</u> números de 00 a 59 (sendo o 00 equivalente ao 60). Assim, para cada um desses números a probabilidade de seu acerto é:

$$P_1 = \frac{1}{60}\,.$$

Como são seis números (obtidos em sorteios independentes), as probabilidades se multiplicam (observe que os números sorteados não poderão ser sorteados novamente, não pode haver repetição dos números). Num primeiro sorteio temos 60 possibilidades, num segundo sorteio, 59 possibilidades, etc. até o sexto, com 55 possibilidades, e ao todo teremos:

$$60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 = 36.045.970.000\,.$$

Temos ainda que corrigir esse número, uma vez que, definido o conjunto dos seis números não-repetidos, ainda há 6! formas de arrumá-los, o que deve ser descontado desse número total de possibilidades,

$$P_{total} = \frac{6!}{36.045.970.000} = \frac{1}{50.063.860}\,.$$

Assim, sua chance de ganhar (jogando seis números) é de uma em cinquenta milhões, sessenta e três mil, oitocentos e sessenta!

Conclusão: desista. Pense assim: se eu **não** jogar, **ganho** um pouquinho, duas

vezes por semana, com probabilidade 100%!

Nestes problemas de probabilidades, é preciso ter muita atenção ao que o problema pede para calcular. Vamos voltar ao problema dos dois dados. A questão agora é: qual a probabilidade de que, num lançamento de dois dados, tenhamos números pares nos dois dados, ou números superiores a três nos dois dados?

Vamos chamar a primeira parte da pergunta (os números devem ser pares) de evento A. Note bem, antes chamamos de espaço amostral o conjunto de eventos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mas chamaremos, mais geralmente, qualquer subconjunto de E de evento. Qual é a probabilidade associada ao evento A? Para cada dadinho, os valores pares são $2, 4, 6$ de modo que a probabilidade é meio, e a probabilidade para que tenhamos números pares para os dois dados é:

$$P_A = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Já para o evento B (números maiores que três), a probabilidade do lançamento de um dado fornecer $4, 5$ ou 6 é meio, e

$$P_B = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Pode parecer, então, que

$$P = P_A + P_B = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Mas este problema apresenta uma complicação a mais: a intersecção entre os eventos A e B não é vazia. De fato, há situações em que o sorteio dos dois dados, além de levar a números pares, implica em números maiores que três! São os seguintes:

$$4,4\,;\;\; 4,6\,;\;\; 6,4;\,;\;\; 6,6\,.$$

Se A e B não são disjuntos, usamos a seguinte receita para calcular a probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{4}{36} = \frac{7}{18}\,. \end{aligned}$$

Trataremos agora de outro problema. Considere um daqueles globos usados para sortear números nas loterias. Suponha que ele contém dez bolas numeradas de zero a nove. Qual a probabilidade de que num primeiro sorteio, se tire um número par e, num segundo sorteio subsequente (sem devolver a primeira bola sorteada) tire-se uma bola com número ímpar?

O evento A consiste em tirar uma bola com número par $(0, 2, 4, 6, 8)$ dentre dez possibilidades, e assim $P_A = 1/2$. Já $P_B \neq 1/2$ devido ao fato de não termos devolvido a primeira bola ao globo após o primeiro sorteio. **Se** a primeira bola for par, então $P_B = 5/9$, e a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{1}{2}\frac{5}{9} = \frac{5}{18}\,.$$

Esta probabilidade é o que chamamos de probabilidade condicional $P(B|A)$, a probabilidade de que um evento B ocorra, desde que A ocorra (antes). A probabilidade de que ocorram A e B (nessa ordem) é dada pelo produto

$$P(A, B) = P(A)\, P(B|A)$$

e a probabilidade condicional é dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)}{P(A)}\,.$$

10.3 Variáveis Estocásticas

Uma variável estocástica ou variável aleatória, especialmente do ponto de vista do físico, é uma quantidade numérica cujo valor é determinado pelo resultado de algum experimento ou medida. O termo aleatório ou estocástico significa que não podemos saber com certeza o valor daquela variável, não há como prevê-lo teoricamente de modo inequívoco.

Suponha que num experimento de laboratório de Física Básica, desejamos calcular a aceleração da gravidade g, através de um pêndulo simples. O cálculo de g passa, naturalmente, pela medida do comprimento do fio, e do período de uma oscilação completa. Na verdade, do ponto de vista experimental é bem melhor efetuar várias medidas, o que pode reduzir o erro. Uma medida do comprimento do fio, feita digamos com uma régua comum, cuja menor divisão é o milímetro, tem uma incerteza (erro experimental) igual à metade da menor divisão (neste exemplo, $0,5$ mm). Haverá, igualmente, um erro na medida do tempo (o que depende do cronômetro usado). Inclusive, se você fez um experimento semelhante em Laboratório de Física A, deve ter calculado a propagação dos erros, para chegar em um resultado do tipo:

$$g = (10,1 \pm 0,5)\ m/s^2$$

que exibe o erro experimental $(0,5\,m/s^2)$ para a aceleração da gravidade.

Uma variável estocástica pode ser discreta, como no exemplo do lançamento de um dado, em que os resultados numéricos possíveis são enumeráveis, $\{1,2,3,4,5,6\}$. Já a variável estocástica contínua assume valores numéricos que estão dentro de um intervalo da reta real, por exemplo $x \in [a,b]$, como é comum na medida de grandezas físicas num laboratório.

Digamos que uma variável aleatória X possa assumir apenas alguns valores discretos, x_1, x_2, ..., x_n, com probabilidades respectivas p_1, p_2, ..., p_n, sendo

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,.$$

Definimos, para essa variável estocástica discreta, a **função densidade de probabilidade** $P(x)$ à ela associada,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta(x - x_i)$$

e a função distribuição $F(x)$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(x')\,dx' = \sum_{i=1}^{n} p_i\,H(x - x_i)\,,$$

onde $H(x - x_i)$ é a função degrau de Heaviside, introduzida anteriormente. Pela nossa prática anterior com as distribuições H e δ, você deve notar que a densidade de probabilidade é a derivada da função distribuição.

Para variáveis contínuas, introduz-se de modo análogo a densidade de probabilidade $P(x)$, e a função distribuição $F(x)$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(x')\, dx' \,.$$

Nós estamos supondo que a variável aleatória contínua X assuma valores em toda a reta real $(-\infty, +\infty)$ mas, é claro, esta última expressão pode ser adaptada facilmente se x estiver restrito a algum intervalo $[a, b] \subset \mathbf{R}$, alterando os limites de integração.

Independentemente de ser a variável discreta ou contínua, definimos os <u>momentos</u> da variável X, através de

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x')^n\, P(x')\, dx'$$

(este é o n-ésimo momento).

Os primeiros momentos são os mais importantes. Para $n = 1$, tem-se o <u>valor médio</u> de X (também chamado de valor esperado),

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x'\, P(x')\, dx' \,.$$

Exemplo No caso de uma variável discreta, o valor médio é escrito:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x' \sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta(x' - x_i)\, dx' \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \end{aligned}$$

o que consiste em uma média ponderada (onde os "pesos" são as probabilidades p_i de cada evento). No caso particular do lançamento de um dado, onde o resultado é um número inteiro (entre 1 e 6),

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\, i = \frac{21}{6} = 3,5 \,.$$

Note que o valor esperado não precisa ser um dos valores x_i que a variável aleatória pode assumir!

Para $n = 2$ tem-se o <u>momento de inércia</u>,

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x')^2 \, P(x') \, dx' \, .$$

São bastante úteis os seguintes conceitos, que se relacionam a $\langle x^2 \rangle$. Em primeiro lugar, a <u>variância</u>,

$$\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x' - \langle x \rangle)^2 \, P(x') \, dx' = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

que dá uma informação de quanto os valores x_i se afastam da média $\langle x \rangle$.

Há também o <u>desvio padrão da média</u>,

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \, .$$

A <u>função característica</u> $\langle e^{ikx} \rangle$ é definida por:

$$\langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx'} \, P(x') \, dx'$$

e é, como veremos em Métodos de Física Teórica II, a transformada de Fourier da densidade de probabilidade $P(x)$.

É comum encontrarmos situações em Física, em que estejam presentes mais de uma variável aleatória (ao mesmo tempo). Num caso geral com duas variáveis, X e Y, são colocados os mesmos conceitos discutidos de densidade de probabilidade, $P(x, y)$, momentos como os valores médios de X e Y,

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x' \, P(x', y') \, dx' dy' \\ \langle y \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} y' \, P(x', y') \, dx' dy' \, . \end{aligned}$$

Também se definem, de modo similar, as variâncias,

$$\begin{aligned} \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} (x' - \langle x \rangle)^2 \, P(x', y') \, dx' dy' \\ \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} (y' - \langle y \rangle)^2 \, P(x', y') \, dx' dy' \end{aligned}$$

e desvios-padrão,

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}\,, \qquad \sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}\,.$$

Um conceito adicional importante é o de correlação,

$$\mathrm{Corr}(x,y) = \frac{\langle\, (x - \langle x \rangle)\,(y - \langle y \rangle)\,\rangle}{\sigma_x\,\sigma_y}\,.$$

Esta função mede o grau de ligação entre as variáveis X e Y. Em particular, se elas forem independentes, a correlação é nula.

Veremos a seguir três importantes funções distribuições de probabilidades.

10.4 A Distribuição Binomial

Esta distribuição encontra aplicação quando a variável aleatória pode assumir <u>dois</u> valores apenas, ou quando o problema que se coloca tem <u>duas</u> respostas cabíveis. Um exemplo é o lançamento de moedas (que fornece os valores "cara" ou "coroa").

Trabalhamos bastante, até agora, com o problema do lançamento do dado. Vamos ver que, muito embora ele forneça <u>seis</u> resultados, podemos atacá-lo via distribuição binomial para responder à seguinte questão: qual a probabilidade de, em <u>três</u> lançamentos do dado, tirarmos duas vezes o valor máximo "6"? No outro lançamento, pode-se ter qualquer outro resultado. Como já discutimos antes, a probabilidade de tirar "6" é $1/6$, e a probabilidade de tirar qualquer outra face é $5/6$ (a soma das probabilidades do valor "1", ..., "5").

A resposta àquela pergunta está contida na expansão do binômio de Newton:

$$(p+q)^N = \sum_{M=1}^{N} \frac{N!}{M!\,(N-M)!}\; p^M\, q^{N-M}$$

e para $N = 3$, $p = 1/6$, $q = 5/6$,

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^3 = \sum_{M=1}^{3} \binom{N}{M} \left(\frac{1}{6}\right)^M \left(\frac{5}{6}\right)^{(3-M)} \\ &=\; 1.\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3.\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) + 3.\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

e a probabilidade desejada é dada pelo segundo termo,

$$P = 3.\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right).$$

Como você poderia responder rapidamente, a probabilidade de tirar "6" nos três lançamentos seria $(1/6)^3$; esta é a previsão do primeiro termo da expansão binomial.

Em termos gerais, se fazemos N medidas de uma variável aleatória que pode assumir dois valores (digamos, "0" e "1"), um com probabilidade p e o outro com probabilidade q $(p+q=1)$, então a probabilidade de fornecer o valor "0" M vezes (e, é claro, o valor "1" $(N-M)$ vezes) é dada por

$$P(M) = \binom{N}{M}\, p^M\, q^{N-M} = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}\, p^M\, q^{N-M}\,.$$

A figura 10.1 mostra o gráfico da distribuição binomial para $N = 30$, em três casos, $p_1 = 0,05$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,50$, note que à medida em que p aumenta, a distribuição vai se alargando. Observe que as linhas ligando os pontos ajudam a observar o comportamento da densidade de probabilidade, mas lembre-se que $P(M)$ é discreta, e está definida apenas para valores inteiros de M.

Podemos calcular o valor médio de M (para N lançamentos):

$$\langle M\rangle = \sum_{M=1}^{N} M\,\underbrace{\binom{N}{M}\, p^M\, q^{N-M}}_{P(M)}\,.$$

Usaremos o seguinte truque. A expressão:

$$(p+q)^N = \sum_{M=1}^{N}\binom{N}{M}\, p^M\, q^{N-M}$$

vale para quaisquer p, q, mesmo quando são independentes. Suponha que este seja o caso. Derivando os dois lados em relação a p, vem:

$$\begin{aligned} N(p+q)^{N-1} &= \sum_{M=1}^{N}\binom{N}{M}\, M\, p^{M-1}\, q^{N-M} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{M=1}^{N}\binom{N}{M}\, M\, p^{M}\, q^{N-M} \\ &= \frac{\langle M\rangle}{p} \end{aligned}$$

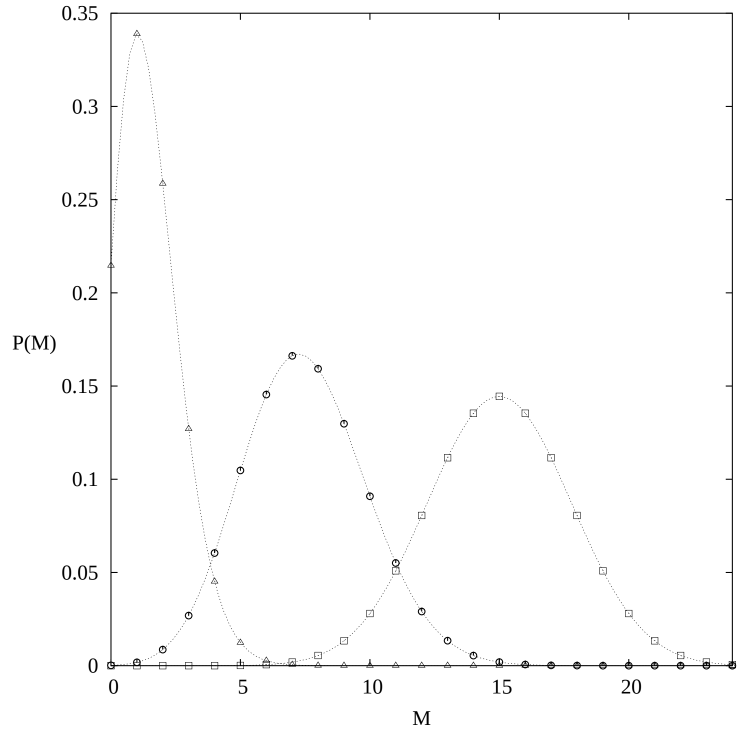

Figura 10.1: A densidade de probabilidade $P(M)$ associada à distribuição binomial, com $N = 30$, e valores de p de (i) $0,05$ (triângulos), (ii) $0,2$ (circunferências) e (iii) $0,5$ (quadrados).

e, pondo $p + q = 1$ segue que

$$\langle M \rangle = N\,p\,.$$

Veja outros resultados que se pode obter:

$$\langle M^2 \rangle = Np + N(N-1)p^2$$

e a variância é dada por

$${\sigma_M}^2 = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 = Np(1-p)\,.$$

σ_M é o desvio padrão. Como já havíamos apontado antes, na figura 10.1 os picos ficam mais largos para valores maiores de p.

10.5 A Distribuição de Poisson

O decaimento radioativo é uma lei importante da Física Nuclear. Núcleos de elementos muito pesados, como o urânio e tório têm certa instabilidade, devido ao elevado número de prótons confinados numa região muito pequena. Prótons são cargas positivas, e portanto repelem uns aos outros. Para atingir maior estabilidade, são emitidas partículas alfa (que consistem em dois prótons e dois nêutrons - igual ao núcleo do hélio), o que baixa o número de prótons no núcleo. Esse é o chamado <u>decaimento alfa</u>, as partículas emitidas constituem a <u>radiação alfa</u>. No início do curso de Métodos de Física Teórica II, veremos que o número de átomos $N(t)$ de dada amostra que podem sofrer decaimento alfa (mas que ainda não decairam) é dada por

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda\, t}$$

onde N_0 é o número inicial de átomos, e λ é a constante de decaimento. De acordo com essa lei do decaimento, os átomos vão sofrendo decaimento, no início mais rapidamente, $N(t)$ decresce mais rapidamente, mas à medida em que o tempo passa esse decréscimo fica mais lento. Teoricamente, depois de um tempo infinito, $N = 0$, todos os núcleos decairam.

A questão que colocamos aqui é: qual a probabilidade de que, durante um tempo t, um número N de núcleos sofra o decaimento alfa?

A resposta é dada pela seguinte expressão:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\,,$$

que se relaciona com a distribuição de Poisson,

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}$$

onde a variável aleatória X assume os valores $n = 0, 1, 2, \ldots$

Lembrando da série de McLaurin para a função exponencial,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

pode-se calcular o valor esperado de X,

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^n}{n!} \\ &= \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda\,e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}}_{e^{\lambda}} = \lambda\end{aligned}$$

e (de modo análogo) a variância,

$$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda\,.$$

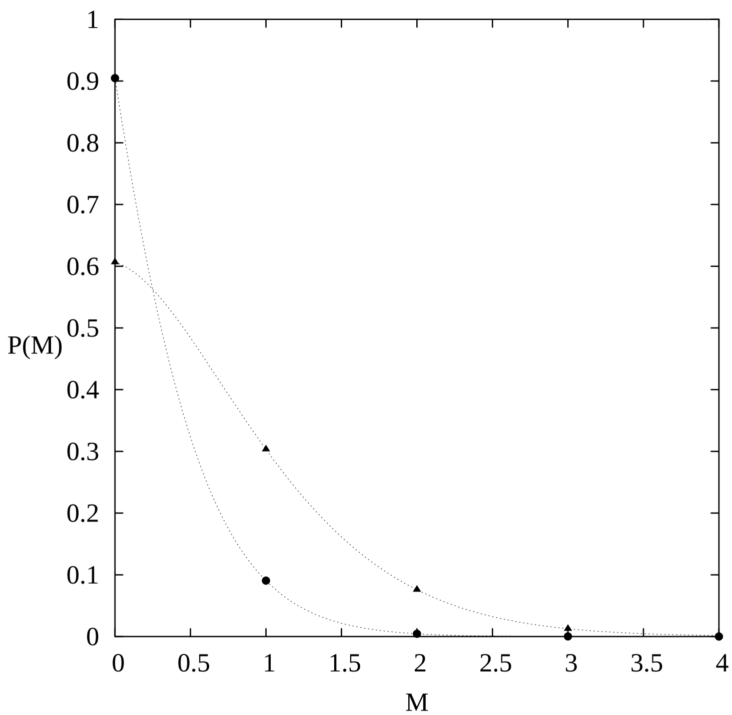

Figura 10.2: A densidade de probabilidade $P(M)$ associada à distribuição de Poisson, com $N = 30$, e valores de λ de (i) $0,1$ (círculos cheios) e (ii) $0,5$ (triângulos cheios). As linhas apenas ligam os pontos e ajudam a visualizar o comportamento do tipo exponencial decrescente, que tende muito rapidamente a zero.

A distribuição de Poisson pode ser vista como o limite da distribuição binomial para $N \to \infty$ e $p \to 0$ mas de modo que o produto fique constante,

$$Np = \lambda = \text{constante finita} .$$

Empregando a fórmula de Stirling (que veremos em Métodos de Física Teórica II),

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \qquad \text{quando}\, N \to \infty \,,$$

achamos:

$$\begin{aligned}
\frac{N!}{(N-M)!} &\simeq \frac{N^{N+1/2}}{e^N} \frac{e^{N-M}}{(N-M)^{N-M+1/2}} \\
&\simeq \left(\frac{N}{e}\right)^M \left(\frac{N}{N-M}\right)^{N-M} \\
&= \left(\frac{N}{e}\right)^M \left(1 + \frac{M}{N-M}\right)^{N-M} \\
&\simeq \left(\frac{N}{e}\right)^M e^M = N^M
\end{aligned}$$

já que

$$\lim_{K\to\infty} \left(1 + \frac{x}{K}\right)^K = e^x \,.$$

Aplicando a aproximação de Stirling na densidade de probabilidade associada à distribuição binomial, para N muito grande, e com $Np = \lambda = \langle x \rangle$, $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned}
\binom{N}{M} p^M\, q^{N-M} &= \frac{N!}{M!\,(N-M)!}\, p^M\, (1-p)^{N-M} \\
&\simeq \frac{N^M}{M!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^M \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-M} \\
&\simeq \frac{\lambda^M}{M!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \simeq \frac{\lambda^M}{M!}\, e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

que é a distribuição de Poisson $P(M)$.

10.6 A Distribuição Gaussiana

A distribuição Gaussiana ou distribuição normal pode ser obtida, também, por um processo de limite tomado sobre a distribuição binomial, definindo uma nova variável

$$z = \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma_x}$$

e com $\langle x \rangle = Np$, $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ (valor esperado e desvio padrão da distribuição binomial). Tomando-se o limite $N \to \infty$ mostra-se (omitiremos esse cálculo) que

$$P(M) \longrightarrow P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$$

ou, em termos de $\langle x \rangle$ e σ_x,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\, e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma_x{}^2}}\ .$$

Esta é uma distribuição contínua, e de grande aplicabilidade em Física Experimental. Geralmente, o processo de medida de dada grandeza física, no laboratório, leva a um conjunto de dados que está de acordo com a distribuição normal. Outro exemplo é dado pelas velocidades das partículas (moléculas ou átomos) de um gás contido num recipiente com volume, temperatura e pressão fixos. Tais velocidades, por um lado, são aleatórias, mas para dada temperatura elas obedecem a uma distribuição Gaussiana (tanto melhor quanto mais partículas tivermos. Como já falamos no início da aula, digamos que o número de partículas é da ordem $N \sim 10^{23}$).

O cálculo de momentos,

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\, e^{-(x-\langle x \rangle)^2/2\sigma_x{}^2}\, dx$$

será adiado, já que existe uma técnica (usando a função gama, a ser vista em Métodos de Física Teórica II) que torna muito simples o cálculo de integrais desse tipo.

Incluimos na figura 10.3 um gráfico de distribuições normais com σ_x assumindo os valores 1 e 3, para mostrar que a função em forma de sino vai se alargando à medida em que σ_x aumenta.

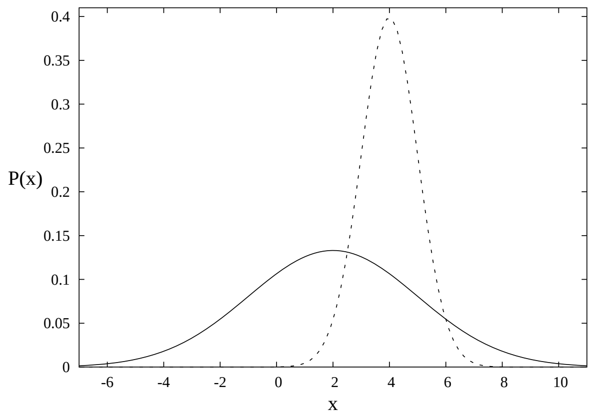

Figura 10.3: A densidade de probabilidade $P(x)$ associada à distribuição Gaussiana, com (i) $\langle x \rangle = 2$ e $\sigma_x = 3$ (linha cheia); (ii) $\langle x \rangle = 4$ e $\sigma_x = 1$ (linha interrompida).

A distribuição normal, na verdade, é tão universalmente obedecida, que incluimos o teorema a seguir, que mostra essa generalidade. Isto é particularmente importante no tocante a medidas de grandezas físicas no laboratório, que se ajustam a um comportamento Gaussiano. Apresentamos aqui uma versão simplificada do teorema, e sem a demonstração, que caberia melhor após um estudo de transformadas de Fourier (a ser visto em Métodos de Física Teórica II).

Teorema do Limite Central Considere uma variável aleatória x, associada à uma distribuição de probabilidade dada $P(x)$ com valor esperado $\langle x \rangle$ e desvio padrão σ_x. Esta densidade de probabilidade $P(x)$ não precisa ser uma Gaussiana. Faz-se N medidas independentes da variável x, encontrando valores $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Define-se uma nova variável, que é o desvio dessas medidas com relação à média das medidas,

$$y = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i - \langle x \rangle}{N} \,.$$

Então, na medida em que o número N de medidas seja muito grande ($N \to \infty$), a densidade de probabilidade associada à y tende a uma Gaussiana (independentemente de $P(x)$ ser uma distribuição

Gaussiana ou não):

$$P(y) \to \sqrt{\frac{N}{2\pi\sigma_x}}\, e^{-\frac{y^2}{2\,(\sigma_x{}^2/N)}} \,.$$

Ou seja, mesmo que a variável estocástica x não obedeça à distribuição de probabilidades Gaussiana, um número muito grande de medidas de x corresponderá a uma distribuição Gaussiana, centrada em $\langle x \rangle$ e com desvio padrão $\sigma_y = \sigma_x/\sqrt{N}$.

ATIVIDADES

1. Considere o lançamento simultâneo de dois dados (não-viciados). Qual a probabilidade de que a soma dos números das faces de cima dê cinco?
2. Cinco moedas são lançadas para cima. Calcule a probabilidade de obter pelo menos três caras como resultado.
3. Numa sala com cinquenta estudantes, faz-se um experimento para calcular a aceleração da gravidade com o auxílio de um plano inclinado. Uma das medidas de comprimento necessárias nesse cálculo, foi realizada cinco vezes por cada estudante, de modo a obter melhores resultados. Qual distribuição estatística descreve melhor essas medidas de comprimento?

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

Para resolver a primeira questão, você deve perceber que há algumas possibilidades diferentes (quantas?) que levam à soma cinco. Por exemplo, o primeiro dado pode fornecer "2" e o segundo, "3". Você deve somar as probabilidades de cada uma dessas possibilidades. Cuidado com a segunda questão; quando se coloca "pelo menos três", se quer dizer que podem ser quatro ou mesmo cinco! De novo, você terá que somar as probabilidades de cada caso. Qual distribuição estatística deve ser usada neste problema? É a mesma para a terceira questão?

CONCLUSÃO

Métodos probabilísticos e procedimentos estatísticos encontram grande aplicação na Física Teórica. Além de revisar conceitos básicos dessas áreas, vimos nesta aula como aplicar tais idéias a alguns problemas de interesse.

RESUMO

Nesta aula estudamos métodos básicos de teoria de probabilidades e estatística, incluindo as distribuições de probabilidade mais usadas em Física, e os aplicamos a exemplos ilustrativos.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, George; WEBER, Hans. Física Matemática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.

VENTZEL, H. Théorie des Probabilités. Moscou: MIR, 1973.