Métodos de Física Teórica II

Osmar S. Silva Jr.

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2009

Métodos de Física Teórica II

Elaboração de Conteúdo
Osmar S. Silva Jr.

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central
Universidade Federal de Sergipe

S586m	Silva Jr, Osmar S. Métodos de física teórica II / Osmar S. Silva Jr. -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009. 1. Física teórica. 2. Matemática. I. Título.
	CDU 530.1::51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Aula

1

Equações Diferenciais Ordinárias

METAS

Revisar métodos básicos de resolução de equações diferenciais ordinárias lineares, especialmente as de primeira e segunda ordem. Aplicar tais métodos a equações diferenciais que aparecem com frequência no tratamento de problemas de várias áreas da física teórica, em particular daqueles levando a funções especiais que serão tratadas em aulas posteriores, como os polinômios de Legendre, as funções de Bessel e Laguerre.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem; resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes; aplicar condições iniciais e outras condições de contorno para especificar as soluções desejadas; encontrar segunda solução de equações diferenciais de segunda ordem; obter soluções de equações diferenciais através do método de Frobenius.

PRÉ-REQUISITO

Espaços lineares: independência linear.

INTRODUÇÃO

Em Física Teórica, descrevemos os sistemas físicos e prevemos seu comportamento futuro através de modelos matemáticos que, em sua grande maioria, acabam levando a equações diferenciais ordinárias. Nesta aula, revisamos os métodos mais usados na solução de equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordens.

Aula 1

1.1 Conceitos Preliminares

Uma equação diferencial ordinária possui termos envolvendo a função incógnita, que chamaremos $y(x)$, e suas derivadas, bem como certos coeficientes, que geralmente são também funções da variável independente x. Pode haver um ou mais termos que não dependem de y ou suas derivadas (estes serão chamados de termos independentes). O termo "ordinária" se aplica quando temos apenas <u>uma</u> variável independente, no caso, x.

Exemplos Vejamos alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias.

$$
\begin{aligned}
(dy/dx)^3 + 3xy^2 = 9\, ln\, x \\
y\, .\, y''' + 2x = -8 \\
\ddot{y} + 2y + 1 = 0\, .
\end{aligned}
$$

Aqui, usamos indistintamente várias notações para derivadas:

$$
\frac{dy}{dx} = \dot{y} = y' = y^{(1)}\, .
$$

Uma equação diferencial é <u>linear</u> quando o termo em y e os termos dy/dx, d^2y/dx^2, ...são elevados à primeira potência, e não aparecem "termos cruzados" como $y.\ddot{y}$, etc. Ou seja, se substituirmos y por ky na equação diferencial, sendo k uma constante dada, poderemos colocar esse k em evidência, exceto para o termo independente, que não envolve y. O importante é que esse k que foi colocado em evidência esteja elevado à primeira potência.

Exemplos Vejamos alguns exemplos de equações diferenciais lineares.

$$
\begin{aligned}
(ln\, x)\, \ddot{y} + x^3\, e^{\pi x}\, \dddot{y} + 1 = 0 \\
\dot{y} + 2y = -1 \\
x\, \ddot{y} + x^2\, \dot{y} = \operatorname{sen} x\, .
\end{aligned}
$$

Chamamos de ordem de uma equação diferencial (linear ou não) o grau da derivada de maior ordem que apareça na equação diferencial. A ordem das equações diferenciais exibidas nos exemplos acima são, na ordem em que foram listadas: 1, 3, 2; 3, 1, 2.

Uma equação diferencial com o(s) termo(s) independente(s) nulo(s) é dita homogênea.

Exemplos São exemplos de equações diferenciais homogêneas:

$$e^{-x^2}\,\ddot{y} = -2y$$
$$\ddot{y} + 2\dot{y} - (2x+1)y = 0$$
$$(\cos x)\,\dot{y} + (\operatorname{sen} x)\,y = \operatorname{tg} x\,\ddot{y}\,.$$

Uma equação diferencial homogênea linear que possua y como solução, terá também ky como solução (k é um escalar). Em particular, $y = 0$ é sempre solução de qualquer equação diferencial homogênenea.

Se a equação não for homogênea, será dita não-homogênea. Ela terá ao menos um termo independente de y e suas derivadas.

Mas, dada uma equação não-homogênea, constrói-se a equação **homogênea associada**, pela eliminação do termo independente.

Exemplos Eis alguns exemplos de equações diferenciais homogêneas associadas.

Eq. dif. não-homogênea	Eq. dif. homogênea associada
$3x\dddot{y} - (2x-3)\,\dot{y} + 3x = \frac{2x}{x^3-1}$	$3x\dddot{y} - (2x-3)\,\dot{y} = 0$
$2\,ln\,x\,\dot{y} - x\,ln\,(x-1) = 0$	$2\,ln\,x\,\dot{y} = 0$
$2\dddot{y} + \dot{y} + 1 = xy$	$2\dddot{y} + \dot{y} = xy$

Uma equação diferencial linear homogênea, com coeficientes constantes, tem a forma:

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1\,y' + a_0\,y = 0 \tag{1.1}$$

onde os coeficientes a_0, a_1, $\ldots$, a_n são escalares. A equação acima tem, evidentemente, ordem n.

Há teoremas de existência garantindo que equações do tipo (1.1) possuem n soluções linearmente independentes – abreviaremos, como em Métodos de Física Teórica I, como l.i. – mesmo que os coeficientes sejam variáveis, ou seja há n funções distintas $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ que são l.i. e formam portanto uma base para o espaço das soluções da equação diferencial. A solução geral da equação (1.1) pode ser escrita:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \, y_i(x)$$

onde c_i são constantes arbitrárias, que podem ser fixadas, por exemplo, por condições iniciais.

Além disso, se y_{GH} for solução geral da equação (1.1), que é homogênea, e se y_P for uma solução particular de

$$a_n \, y^{(n)} + a_{n-1} \, y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \, y' + a_0 \, y = b \tag{1.2}$$

então $y_G = y_{GH} + y_P$ será a solução geral de (1.2).

1.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, de primeira ordem, é da forma:

$$\dot{y} + ay = b \, .$$

A resolução de tal tipo de equação passa pelas seguintes etapas.

(i) Resolução da equação homogênea associada

$$\dot{y} + ay = 0$$

de onde tiramos:

$$\frac{dy}{dx} = -a \, y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -a \, dx$$

e, integrando,

$$ln \, y = -a \, x + C$$

$$y = A\,e^{-ax}\,, \qquad A = e^{C} = \text{constante}\,.$$

Achamos a solução geral para a equação homogênea associada:

$$y_{GH} = A\,e^{-ax}\,.$$

(ii) Solução particular da equação não-homogênea: soluções particulares podem ser determinadas através de uma série de tentativas (ou, como chamamos informalmente, "chutes"). Neste caso, tentamos

$$y_P = C = \text{constante}\,,$$

$$\dot{y_P} + a\,y_P = b \qquad \Longrightarrow \qquad aC = b$$

de onde achamos $C = b/a$ (note bem, isto só vale se $a \neq 0$. Se a for nulo, $y_P = bx$ é uma solução particular).

(iii) Solução geral da equação não-homogênea: será dada por

$$y_G = y_{GH} + y_P = A\,e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

se $a \neq 0$. No caso de a nulo,

$$y_G = b\,x + D$$

(D constante).

1.3 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes é da forma:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = c\,.$$

Sua solução também segue o mesmo procedimento delineado para equações de primeira ordem, dividido em três fases.

(i) Resolução da equação homogênea associada

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0\,.$$

Tentamos a solução

$$y = e^{rx}$$

onde r é um parâmetro a ser determinado. Tem-se:

$$\dot{y} = r\,e^{rx}\,, \qquad \ddot{y} = r^2\,e^{rx}\,,$$

$$e^{rx}\,\left(r^2 + ar + b\right) = 0$$

e como a exponencial não se anula para valores finitos de x,

$$r^2 + ar + b = 0\,,$$

fornecendo

$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,, \qquad \Delta = a^2 - 4b\,.$$

Há três possibilidades a serem consideradas.

(i1) $\Delta > 0$

Neste caso, há duas raízes distintas, r_1 e r_2, dadas por:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,, \\ r_2 &= -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,, \end{aligned}$$

existindo duas soluções l.i.,

$$e^{r_1 x}\,, \qquad e^{r_2 x}$$

em termos das quais qualquer solução se escreve:

$$y_{GH} = C_1\,e^{(-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2})x} + C_2\,e^{(-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2})x}\,.$$

(i2) $\Delta = 0$

Agora, $r_1 = r_2 = -a/2$, e pode-se mostrar (na verdade, veremos isto um pouco adiante, ao tratar da segunda solução de equações diferenciais de segunda ordem) que, além da solução $e^{r_1 x}$, há uma solução

$x\, e^{r_1 x}$, e essas duas soluções são l.i., de modo que a solução geral se escreve na forma de uma combinação linear destas duas,

$$y_{GH} = C_1\, e^{-\frac{ax}{2}} + C_2\, x\, e^{-\frac{ax}{2}}\,.$$

(i3) $\Delta < 0$

Teremos aqui duas soluções complexas para r,

$$r_1 = -\frac{a}{2} + i\,\sqrt{4b-a^2}\,, \qquad r_2 = -\frac{a}{2} - i\,\sqrt{4b-a^2}\,,$$

e assim

$$y_{GH} = C_1\, e^{(-\frac{a}{2}+i\sqrt{4b-a^2})x} + C_2\, e^{(-\frac{a}{2}-i\sqrt{4b-a^2})x}\,.$$

Outra forma de expressar y_{GH} é:

$$y_{GH} = e^{-\frac{ax}{2}} \left\{ C_1\, e^{i\sqrt{4b-a^2}x} + C_2\, e^{-i\sqrt{4b-a^2}x} \right\}\;;$$

usa-se então a fórmula de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

para colocar a solução geral na forma:

$$\begin{aligned} y_{GH} &= e^{-\frac{ax}{2}} \left\{ C_1 \left[\cos\sqrt{4b-a^2}x + i\,\mathrm{sen}\,\sqrt{4b-a^2}x \right] + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left[\cos\sqrt{4b-a^2}x + i\,\mathrm{sen}\,(-\sqrt{4b-a^2}x) \right] \right\} \\ &= e^{-\frac{ax}{2}} \left\{ \cos\sqrt{4b-a^2}x\, \underbrace{[C_1 + C_2]}_{=B_1=\text{const}} + \right. \\ &\quad \left. + \mathrm{sen}\,\sqrt{4b-a^2}x\, \underbrace{[iC_1 - iC_2]}_{=B_2=\text{const}} \right\} \\ &= B_1\, e^{-\frac{ax}{2}}\, \cos\sqrt{4b-a^2}x + B_2\, e^{-\frac{ax}{2}}\, \mathrm{sen}\,\sqrt{4b-a^2}x\,. \end{aligned}$$

Uma terceira maneira de representar y_{GH} é:

$$y_{GH} = e^{-\frac{ax}{2}}\, D_1\, \mathrm{sen}\, \left(\sqrt{4b-a^2}x + D_2 \right)\,,$$

que se consegue usando a expressão trigonométrica

$$\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\, \cos\beta + \cos\alpha\, \mathrm{sen}\,\beta$$

e utilizando as novas constantes D_1 e D_2,

$$D_1 = \sqrt{{B_1}^2 + {B_2}^2}\,, \qquad \operatorname{tg} D_2 = \frac{B_1}{B_2}\,.$$

(ii) Solução particular da equação não-homogênea

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = c\,.$$

Se b não for nulo, então uma solução particular na forma de constante pode ser encontrada,

$$y_P = \frac{c}{b}\,;$$

se $b = 0$ e $a \neq 0$, teremos

$$y_P = \frac{cx}{a}\,;$$

e, finalmente, se $a = b = 0$, a solução particular será dada por

$$y_P = \frac{cx^2}{2}\,.$$

(iii) A solução geral da equação não-homogênea é dada, como antes, por

$$y_G = y_{GH} + y_P\,.$$

1.4 Segunda Solução para as Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Suponha que conseguimos determinar, seja por "chute", ou por algum método (como Frobenius, que apresentaremos daqui a pouco), uma solução da equação diferencial

$$\ddot{y} + P(x)\,\dot{y} + Q(x)\,y = 0\,,$$

vamos chamar de $y_1(x)$ essa solução que já conhecemos. Mas sabemos que as equações diferenciais lineares de segunda ordem possuem *duas* soluções l.i., portanto para escrever uma solução geral (você sabe, como uma combinação linear de duas soluções l.i.) precisamos de uma segunda solução, $y_2(x)$, l.i. com relação à primeira. Este método a seguir serve exatamente para isso, vamos descrevê-lo.

Chama-se Wronskiano de duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ o seguinte determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \dot{y}_1(x) & \dot{y}_2(x) \end{vmatrix} = y_1\,\dot{y}_2 - \dot{y}_1\,y_2\,.$$

Nota-se que

$$\dot{W} = y_1\,\ddot{y}_2 - y_2\,\ddot{y}_1 = y_1\,\left(-P\,\dot{y}_2 - Q\,y_2\right) - y_2\,\left(-P\,\dot{y}_1 - Q\,y_1\right)\,.$$

Usou-se, na última passagem, o fato de que ambas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação diferencial, portanto:

$$\ddot{y}_1 + P(x)\,\dot{y}_1 + Q(x)\,y_1 = 0\,,$$

$$\ddot{y}_2 + P(x)\,\dot{y}_2 + Q(x)\,y_2 = 0\,,$$

e daí tiramos os valores de $\ddot{y}_1$ e $\ddot{y}_2$.

Com isso,

$$\dot{W} = (-P)\,(y_1\,\dot{y}_2 - y_2\,\dot{y}_1) = -P\,W$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= -P\,W \\ \frac{dW}{W} &= -P\,dx \\ ln\,W &= -\int P\,dx + C \\ W &= A\,e^{-\int P\,dx}\,. \end{aligned}$$

Mas W pode ser escrito, alternativamente, na forma:

$$W = {y_1}^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

(se você quiser se certificar que isso é verdade, desenvolva o lado direito dessa igualdade!).

Usando isso,

$$
\begin{aligned}
{y_1}^2 \, \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= A\, e^{-\int P\, dx} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= \frac{1}{[y_1(x)]^2} A\, e^{-\int P\, dx} \\
\frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{A\, e^{-\int P(x')\, dx'}\, dx}{[y_1(x)]^2} + B \\
y_2(x) = y_1(x) & \int \frac{A\, e^{-\int P(x')\, dx'}}{[y_1(x)]^2}\, dx
\end{aligned}
$$

(tomamos $B = 0$, pois estamos querendo achar uma solução adicional, apenas).

1.5 Método de Frobenius

O método de Frobenius consiste em tentar uma solução para a equação diferencial na forma de uma série de potências,

$$
y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i} \,,
$$

com k e os coeficientes $a_0, a_1, \ldots$ a serem determinados.

Vamos nos restringir a equações diferenciais lineares, de segunda ordem, homogêneas e com coeficientes variáveis, do tipo:

$$
A(x)\, \ddot{y} + B(x)\, \dot{y} + C(x)\, y = 0 \,,
$$

que colocamos na forma

$$
\ddot{y} + P(x)\, \dot{y} + Q(x)\, y = 0 \,.
$$

É claro que se $A(x)$ tiver um zero num ponto $x = x_0$, possivelmente P e Q tenham uma singularidade nesse ponto,

$$
P(x), Q(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \,.
$$

Os pontos singulares (ou singularidades) podem ser classificados em duas categorias,

(i) Se $P(x)$ e $Q(x)$ divergirem no limite $x \to x_0$, mas $(x - x_0)\, P(x)$ e $(x - x_0)^2\, Q(x)$ forem finitos nesse limite, então x_0 será chamado de ponto singular regular, ou singularidade regular, ou ainda ponto singular não essencial;

(ii) Se $P(x)$, $Q(x)$, $(x - x_0)\, P(x)$ e $(x - x_0)^2\, Q(x)$ divergirem todos quando $x \to x_0$, então x_0 será chamado de ponto singular essencial, ou ponto singular não regular.

Exemplo Na equação diferencial de Bessel,

$$x^2\, \ddot{y} + x\, \dot{y} + (x^2 - n^2)\, y = 0$$

que pode ser reescrita:

$$\ddot{y} + \frac{1}{x}\, \dot{y} + (1 - \frac{n^2}{x^2})\, y = 0$$

$x = 0$ é um ponto singular regular, os outros pontos são ordinários (isto é, não singulares).

A validade do método de Frobenius é garantida pela condição seguinte.

Teorema de Fuchs O método de Frobenius, aplicado a equações diferenciais lineares de segunda ordem, tem sua validade garantida, ou melhor, as expansões em série ao redor de pontos ordinários ou pontos singulares regulares convergem.

Portanto, o método pode não funcionar nas proximidades de uma singularidade essencial. Note bem: o teorema não diz que o método não funciona ao redor de uma singularidade essencial!

No exemplo anterior, vimos que $x = 0$ é ponto singular regular para a equação diferencial de Bessel, e os outros pontos (finitos) são ordinários, portanto podemos esperar que o método de Frobenius funcione bem para essa equação diferencial.

No que segue, vamos exemplificar a aplicação do método de Frobenius, atacando algumas equações diferenciais selecionadas.

Exemplo Vamos considerar, primeiramente, a equação diferencial de Bessel,

$$x^2\,\ddot{y} + x\,\dot{y} + (x^2 - n^2)\,y = 0\,.$$

Tentaremos a solução em forma de série infinita,

$$y(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i}$$

onde a_0, a_1, ...são números a serem determinados, e k é um inteiro, a ser determinado também, podendo assumir inclusive valor negativo.

Derivamos a série acima para $y(x)$, para obter

$$\dot{y} = \sum_{i=0}^{\infty} (k+i)\, a_i\, x^{k+i-1}\,,$$

$$\ddot{y} = \sum_{i=0}^{\infty} (k+i-1)(k+i)\, a_i\, x^{k+i-2}\,.$$

Aqui, usamos a propriedade $d\,x^n/dx = n\,x^{n-1}$.

Substituímos, então, essas expressões em série para $\ddot{y}$, $\dot{y}$ e y na equação diferencial de Bessel, o que resulta em:

$$\begin{gathered} x^2 \sum_{i=0}^{\infty}(k+i-1)(k+i)\, a_i\, x^{k+i-2} + x \sum_{i=0}^{\infty}(k+i)\, a_i\, x^{k+i-1} + \\ +(x^2 - n^2) \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i} = 0 \end{gathered}$$

ou, ainda,

$$\begin{gathered} x^2 \sum_{i=0}^{\infty}(k+i-1)(k+i)\, a_i\, x^{k+i-2} + x \sum_{i=0}^{\infty}(k+i)\, a_i\, x^{k+i-1} + \\ +x^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i} - n^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i} = 0\,. \end{gathered}$$

Inserindo os coeficientes x^2 e x dentro das séries, tem-se

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{\infty}(k+i-1)(k+i)\, a_i\, x^{k+i} + \sum_{i=0}^{\infty}(k+i)\, a_i\, x^{k+i} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i+2} - n^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i} = 0\,. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Neste ponto, precisamos retomar uma definição importante de álgebra linear, que já estudamos na aula sobre espaços lineares (quarta aula de Métodos de Física Teórica I). Trata-se do conceito de conjunto linearmente independente (l.i.): um conjunto de funções, como por exemplo $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ é l.i. se, para a combinação linear seguinte se anular,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = 0$$

devemos ter necessariamente todos os coeficientes nulos,

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0\,.$$

É bom lembrar também que qualquer subconjunto de um conjunto l.i. é também l.i..

Voltando à expressão acima (1.3), onde aparecem quatro somatórias, vemos que todas envolvem potências de x. Imagine que possamos reagrupar esses termos, na forma de potências crescentes; a potência mais baixa de x será x^k, pois o valor menor possível para i (em todas as somas) é zero, e assim temos algo como

$$A_k x^k + A_{k+1} x^{k+1} + A_{k+2} x^{k+2} + \ldots = 0$$

e já sabemos que, devido à independência linear das potências de x, os coeficientes A_k, A_{k+1}, ... serão todos nulos.

Vamos observar, agora, mais atentamente um outro aspecto da equação (1.3). Nas somatórias primeira, segunda, e quarta temos termos gerais envolvendo a potência x^{k+i} onde $i = 0, 1, 2, \ldots$, portanto temos potências como x^k, x^{k+1}, x^{k+2}, etc. Mas, na terceira somatória, o termo geral é diferente, e a menor potência ali é x^{k+2}. Em outras palavras: se quisermos descobrir o coeficiente A_k, devemos descobrir as contribuições que vem da primeira, segunda e quarta somatórias, o mesmo para A_{k+1}. Mas para determinar A_{k+2} e seguintes, devemos considerar as contribuições de todas as quatro somas. É o que faremos a seguir.

Perguntamos: qual a potência mais baixa de x presente na expressão (1.3)? Isto já sabemos, é x^k. A próxima pergunta é: quais os termos de (1.3) que envolvem x^k? Ou, se quiser, qual o coeficiente de x^k na expressão (1.3), reagrupando a série em potências crescentes de x? Vejamos, há contribuições da primeira, segunda e quarta somatórias, sendo que a potência mais baixa é conseguida fazendo $i = 0$:

$$A_k = a_0(k+0)(k+0-1) + a_0(k+0) - n^2 a_0 = 0\,.$$

Observe que a terceira somatória em (1.3) não contribuiu para esse A_k, pois envolve potências a partir de x^{k+2}.

Podemos simplificar essa expressão para A_k,

$$A_k = a_0(k^2 - n^2) = 0$$

e obtemos a primeira equação indicial.

Uma segunda equação indicial é obtida de modo semelhante, agora para o coeficiente de x^{k+1},

$$A_{k+1} = a_1(k+1)(k+1-1) + a_1(k+1) - n^2 a_1 = 0$$

ou

$$A_{k+1} = a_1[(k+1)^2 - n^2] = 0\,.$$

Antes de prosseguir com os A_{k+2} e outros, vamos ver que condições podemos tirar das duas equações indiciais. Da primeira, descobrimos que $k = +n$ ou $k = -n$. Suporemos, sempre, que $a_0 \neq 0$. Quando analisamos a segunda equação indicial, vemos que nem $k = +n$ ou $k = -n$ são soluções dela e, evidentemente, se escolhessemos $k = n-1$, esse valor não é compatível com a primeira equação indicial. Portanto escolhemos $a_1 = 0$. Em resumo, há duas possibilidades: (i) $a_0 \neq 0$, $k = +n$, $a_1 = 0$, e (ii) $a_0 \neq 0$, $k = -n$, $a_1 = 0$.

Na verdade, há mais duas possibilidades, muito particulares: as duas equações indiciais estariam simultaneamente satisfeitas se $k = \pm n = \pm 1/2$, mas não levaremos em consideração isso aqui, porque em física normalmente desejamos que n seja inteiro.

A seguir tentaremos descobrir quanto vale A_{k+j}, com $j \geq 2$. Esses seriam os coeficientes de x^{k+2} e potências superiores, e assim teremos de considerar todas as quatro somatórias da expressão (1.3).

Fazemos, apenas na terceira somatória, a mudança de índice $k + i + 2 = k + j$, ou seja, $i + 2 = j$, de modo que $i = j - 2$. Isto terá o seguinte efeito sobre a terceira somatória:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i+2} = \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^{k+j}\,.$$

E, na primeira, segunda e quarta somatórias, fazemos a troca simples de índice $i = j$. Ficamos com:

$$\sum_{j=2}^{\infty}(k+j-1)(k+j)\, a_j\, x^{k+j} + \sum_{j=2}^{\infty}(k+j)\, a_j\, x^{k+j} + \\ + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2}\, x^{k+j} - n^2 \sum_{j=2}^{\infty} a_j\, x^{k+j} = 0\,.$$

Você pode estar se perguntando, por quê j estaria começando de 2 na primeira, segunda e quarta somatórias? O motivo é que os casos de $i = 0$ e $i = 1$ já foram tratados, e levam a coeficientes A_k e A_{k+1} que se anulam: são as duas equações indiciais que já analisamos.

Mas, agora, as quatro somatórias podem ser escritas de modo mais econômico,

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left\{(k+j-1)(k+j)\,a_j + (k+j)\,a_j + a_{j-2} - n^2 a_j\right\} x^{k+j} = 0$$

e, em vista da independência linear do conjunto $\{x^{k+2}, x^{k+3}, x^{k+4}, \ldots\}$, os coeficientes são nulos, o que fornece:

$$A_{k+j} = (k+j-1)(k+j)\,a_j + (k+j)\,a_j + a_{j-2} - n^2 a_j = 0\,.$$

Desta última equação, obtemos:

$$a_j = \frac{-1}{(k+j)^2 - n^2}\,a_{j-2} \qquad (j \geq 2)$$

e esta é chamada de <u>relação de recorrência</u>.

Note, nos dois casos possíveis (i) e (ii) já referidos, que $a_1 = 0$. Usemos então a relação de recorrência para $j = 3$:

$$a_3 = \frac{-1}{(k+3)^2 - n^2}\,\underbrace{a_{3-2}}_{a_1=0} = 0$$

e assim a_3 se anula porque a_1 é nulo. Do mesmo modo, se calcularmos a_5, ele será proporcional a a_3; mas $a_3 = 0$ logo $a_5 = 0$ também. Você já deve ter percebido que, usando a relação de recorrência várias vezes (aliás, daí vem o nome "recorrência", você recorre a ela repetidamente), acharemos que todos os coeficientes de índice ímpar se anulam,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0\,.$$

Para achar os coeficientes pares, devemos considerar separadamente os casos de $k = \pm n$.

(i) Caso $a_0 \neq 0$, $k = +n$, $a_1 = 0$

Colocando $j = 2$ na relação de recorrência, vem:

$$a_2 = \frac{-1}{(n+2)^2 - n^2}\,a_0 = \frac{-1}{2\,(2+2n)}\,a_0\,;$$

com $j = 4$,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{(n+4)^2 - n^2}\, a_2 = \frac{-1}{4\,(4+2n)}\,\frac{-1}{2\,(2+2n)}\, a_0 \\ &= \frac{(-1)^2}{4\,2\,(4+2n)\,(2+2n)}\, a_0\,. \end{aligned}$$

Podemos prosseguir, achando as expressões para $j = 6, 8, 10, \ldots$, mas podemos tentar desde já escrever o termo geral,

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{[2j\,(2j-2)\,\ldots 2]\,[(2j+2n)\,\ldots(2+2n)]}\, a_0$$

ou, como aprenderemos em aula posterior (não se preocupe se lhe parecer estranho neste momento)

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j\,(2n)!!\,a_0}{(2j)!!\,(2j+2n)!!}$$

para $j = 1, 2, \ldots$ O fatorial duplo envolve a multiplicação de números que decrescem de duas unidades, por exemplo $6!! = 6.4.2 = 48$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}\, x^{2j+n} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,(2n)!!\,a_0}{(2j)!!\,(2j+2n)!!}\, x^{2j+n} \\ &= J_n(x) \end{aligned}$$

e é exatamente essa a expressão para a função de Bessel de primeira espécie, $J_n(x)$, que veremos com detalhes na sexta aula.

(ii) Caso $a_0 \neq 0$, $k = -n$, $a_1 = 0$

De modo completamente similar, acha-se

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}\, x^{2j-n} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,(-2n)!!\,a_0}{(2j)!!\,(2j-2n)!!}\, x^{2j-n} \\ &= J_{-n}(x) \end{aligned}$$

Exemplo Vamos ver agora a aplicação do método de Frobenius a um caso em que não vale o Teorema de Fuchs, e como veremos a técnica não vai funcionar bem. A equação diferencial a ser abordada é:

$$\ddot{y} + \frac{1}{x^2}\,\dot{y} - \frac{a^2}{x^2}\,y = 0\,,$$

e vemos que $x = 0$ é um ponto singular essencial. Se, de qualquer forma, insistirmos em buscar a solução na forma de série de potências, vamos chegar à equação indicial:

$$k = 0$$

e à relação de recorrência

$$a_{j+1} = \frac{j(j-1) - a^2}{j+1}\,a_j\,.$$

Entretanto, vemos daí que

$$\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| \longrightarrow 1$$

logo a série não converge.

Exemplo Considere a equação diferencial

$$\ddot{y} - \frac{6}{x^2}\,y = 0\,.$$

Tentamos, como sempre, a solução

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,x^{k+i}\,,$$

obtemos a sua derivada segunda, substituímos na equação diferencial, para obter:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(k+i-1)(k+i)\,a_i\,x^{k+i-2} - 6\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,x^{k+i-2} = 0$$

Para a potência mais baixa de x (correspondendo a $i = 0$), obtemos a equação indicial:

$$[k(k-1) - 6]a_0 = 0$$

de onde se acha, se $a_0 \neq 0$, $k = -2$ ou $k = 3$.

Para $i > 0$, acha-se relações como:

$$[(k+1)k - 6]a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0\,,$$

$$[(k+2)(k+1) - 6]a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0\,,$$

e assim por diante, ou seja,

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^{k+i} \underbrace{=}_{a_1 = a_2 = \ldots = 0} a_0 x^k = \begin{cases} a_0 x^{-2} \\ a_0 x^3 \end{cases}$$

Surpreendentemente, encontramos neste exemplo, por Frobenius, duas soluções *exatas* e l.i. da equação diferencial.

ATIVIDADES

1. Classifique as equações diferenciais seguintes:

   (i) $(\ddot{y})^2 - 2xy = 0$

   (ii) $x^2\ddot{y} + x\dot{y} + (x^2 - n^2)y = 0$

   (iii) $x^2\dot{y} - 2x(y-1) = 0$

2. Resolva a equação diferencial

$$5\dot{y} - 2y = 4\,.$$

3. Que solução da equação diferencial do problema anterior satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$?

4. Resolva as equações diferenciais:

   (i) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 2$

   (ii) $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 18$

   (iii) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$

5. Sabemos que a equação diferencial $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$ tem a solução $y_1(x) = e^{3x}$. Ache uma segunda solução, l.i. em relação à y_1.

6. Resolva completamente a equação: $x\dot{y} + 5y = 8x^3$.

7. Ache uma solução particular das equações diferenciais:

   (i) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = 2x^2 + 1$

   (ii) $\ddot{y} - 12\dot{y} - 3y = \operatorname{sen} x$

   (iii) $2\dot{y} - \ddot{y} + 4y = 2e^{3x}$

8. Utilizando o método de Frobenius, ache uma solução da equação diferencial do oscilador harmônico,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

   (sugestão: escolha $k = 1$ e $a_1 = 0$. Através dos primeiros termos da série, você consegue reconhecer que função é essa? R elembre das expansões em série de MacLaurin para as funções simples, que podem ser encontradas na aula 07 de Métodos de Física Teórica I).

9. Ache uma solução, por expansão em série de potências, da equação diferencial de Legendre,

$$(1 - x^2)\,\ddot{y} - 2x\,\dot{y} + \ell(\ell + 1)\,y = 0\,.$$

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

R espostas de problemas:
(2) $y_G = -2 + Ae^{+2x/5}$.
(3) $y = -2 + 3e^{+2x/5}$.
(4) (i) $y_G = 2 + c_1\,e^{x} + c_2\,x\,e^{x}$;
(ii) $y_G = -3 + c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{+3x}$;
(iii) $y_G = y_{GH} = e^{x}[c_1\,e^{ix} + c_2\,e^{-ix}]$.
(5) $y = xe^{3x}$.
No problema 7, ítem (i), experimente "chutar" uma solução do tipo $y_P = Ax^2 + Bx + C$, substitua na equação diferencial e, comparando os coeficientes dos lados esquerdo e direito de 1, x e de x^2, ache A, B, C. No ítem (ii) tente usar $y = A\operatorname{sen} x + B\,\cos x$. Em (iii) use $y = A\,e^{3x}$.

No problema 8, siga a sugestão de valores de k e a_1, obtenha os três primeiros termos da série. Você consegue reconhecer que função é essa? Relembre das expansões em série de MacLaurin para as funções simples, que podem ser encontradas na aula 07 ou 03 do Curso de Métodos de Física Teórica I.
O problema 9 tem como soluções os polinômios de Legendre, que você pode encontrar no material impresso da aula 05.
Confira a solução do outros problemas com seus colegas!

CONCLUSÃO

Vimos nesta aula técnicas de resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Ocorre que são exatamente estes dois tipos de equações diferenciais os que mais aparecem nos modelos teóricos das várias áreas da física, em particular na mecânica Newtoniana, onde a própria segunda lei de Newton é uma equação diferencial de segunda ordem.

RESUMO

Nesta aula você tomou contato com técnicas básicas de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordens.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula será apresentada a teoria de Sturm-Liouville, que se aplica àquelas equações diferenciais de segunda ordem que estão associadas a operadores diferenciais autoadjuntos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W.E. DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.
BRAGA, Carmen. Notas de Física Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1988.