Aula

3

Método de Separação de Variáveis

METAS

Apresentar a técnica de separação de variáveis que, aplicada numa equação diferencial parcial, permite quebrá-la num conjunto de equações diferenciais ordinárias. Aplicar o método de separação de variáveis a problemas de interesse das físicas clássica e quântica.

OBJETIVO

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de: aplicar a técnica de separação de variáveis a dada equação diferencial parcial, para transformá-la em equações diferenciais ordinárias.

PRÉ-REQUISITO

Equações diferenciais ordinárias.

INTRODUÇÃO

A maior parte das equações da física teórica consiste em equações diferenciais parciais, envolvendo derivadas da função incógnita em relação a mais de uma variável. Existem várias técnicas para resolver essas equações, no entanto a técnica mais simples e mais usada é a separação de variáveis, que transforma a equação diferencial parcial em certo número de equações diferenciais ordinárias, que podem ser resolvidas pelas técnicas vistas em aula anterior.

Aula 3

As teorias clássica e quântica descrevendo variados fenômenos físicos sempre acabam levando a equações diferenciais, especialmente as equações diferenciais parciais.

Por exemplo, a equação de Laplace,

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(x,y,z) = 0\,,$$

que é uma equação diferencial parcial nas variáveis x, y, z, aparece em várias áreas da física: eletromagnetismo, hidrodinâmica, fluxo de calor, gravitação, sempre que não haja fontes (respectivamente: de carga elétrica, de fluido, de calor, de massa).

A equação de Poisson,

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,x)}{\epsilon_0}\,,$$

aparece nas mesmas áreas citadas acima, agora em problemas com fontes. A presença das fontes é especificada pela densidade $\rho(\mathbf{r})$ (densidade de cargas, massa, etc).

A equação de onda (também chamada de equação de Helmholtz) tem o seguinte aspecto:

$$\nabla^2\,\psi(\mathbf{r}) + k^2\,\psi(\mathbf{r}) = 0$$

(com k real) e descreve fenômenos físicos como ondas elásticas em sólidos (cordas vibrantes, vibrações em membranas, dentre outros), ondas sonoras, ondas eletromagnéticas, etc.

A equação de difusão, que é bem parecida,

$$\nabla^2\,\psi(\mathbf{r}) - k^2\,\psi(\mathbf{r}) = 0$$

(k real) descreve o fenômeno da difusão de um líquido em outro.

O mesmo papel desempenhado pelas três leis de Newton na mecânica clássica (que é o de resumir, sumarizar toda a mecânica não-relativística) é representado, no âmbito do eletromagnetismo clássico, pelas quatro equações de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,,$$

$$\nabla.\mathbf{D} = 4\pi\rho\,,$$
$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}\,,$$
$$\nabla.\mathbf{B} = 0\,,$$

onde $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{B}$ é a indução magnética, $\mathbf{D}$ é o deslocamento elétrico, $\mathbf{H}$ é a intensidade magnética. $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente elétrica, ρ a densidade de cargas e c é a velocidade da luz no vácuo. A relação entre os campos vetoriais é:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

(num meio material, a presença de um campo elétrico $\mathbf{E}$ dá origem a uma polarização $\mathbf{P}$, de modo a termos um campo total $\mathbf{D}$),

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

(num meio material, a presença de uma intensidade magnética $\mathbf{H}$ origina uma magnetização $\mathbf{M}$, de modo a termos uma indução magnética $\mathbf{B}$). O operador diferencial ∇ pode ser indicado:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

e sua aplicação aos campos vetoriais referidos dá origem a rotacionais ou divergentes desses campos.

Já na mecânica quântica, que é a teoria válida no mundo dos átomos e moléculas, as conhecidas equações de Schrödinger, nas versões dependente do tempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\,\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(\mathbf{r},t)\,,$$

e independente do tempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}) = E\,\psi(\mathbf{r})\,,$$

são também equações diferenciais parciais.

A equação de Klein-Gordon,

$$\nabla^2\,\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \mu^2\,\Phi = 0$$

e a equação de Dirac,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}mc^2\right]\psi$$

são equações diferenciais parciais, fornecendo a equação relativística de movimento para as partículas do mundo microscópico (dentro do ramo da física conhecido como mecânica quântica relativística).

Há várias técnicas que permitem abordar tais *equações diferenciais parciais*. Há métodos de solução pelo uso de transformações integrais (veremos dois deles no final deste curso); emprega-se também a técnica das funções de Green. Em qualquer caso (e, especialmente nos piores casos), sempre se pode tentar a solução por métodos numéricos.

No entanto, a técnica mais simples e muito comumente empregada consiste em "separar variáveis" da equação a derivadas parciais, transformando-a (como costumamos dizer, "quebrando-a") em equações diferenciais ordinárias que resolvemos pelas técnicas esboçadas na primeira aula.

Veremos como utilizar o método de separação de variáveis através de dois exemplos seguintes, e de vários outros em aulas posteriores deste curso.

Exemplo Vamos efetuar a separação de variáveis da equação de Helmholtz no espaço tridimensional,

$$\nabla^2\,\psi(\mathbf{r}) + k^2\,\psi(\mathbf{r}) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(x,y,z) + k^2\,\psi(x,y,z) = 0\,.$$

Tentaremos a separação (e o método consiste nessa tentativa, que pode funcionar ou não, dependendo do caso) em coordenadas cartesianas:

$$\psi(x,y,z) = X(x).Y(y).Z(z)$$

(preste atenção: x, y, z minúsculos são as variáveis independentes do problema, as coordenadas, enquanto que X, Y, Z, em letras maiúsculas, são funções a serem determinadas). Fazendo essa substituição na equação diferencial parcial, temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XYZ) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(XYZ) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(XYZ) + k^2XYZ = 0\,.$$

Note que, no primeiro termo, há uma derivada do produto XYZ em relação a x; mas apenas X é função da variável x, de modo que Y e Z funcionam, aí, como se fossem constantes. Portanto podem ser "trazidas para fora" da derivada. O mesmo acontece no segundo e no terceiro termo, agora com relação às variáveis y e z,

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0\,.$$

Dividindo a equação pelo produto das funções, XYZ, fica:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0\,.$$

Reescrevemos a equação, deixando apenas o primeiro termo no lado esquerdo, para obter

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

ou

$$\frac{1}{X}X'' = -k^2 - \frac{1}{Y}Y'' - \frac{1}{Z}Z''$$

e observamos que, do lado esquerdo desta última equação temos uma função apenas de x (já que $X(x)$ só depende de x), enquanto que no lado direito temos funções dependendo de y e z. Ora, x, y e z são variáveis independentes entre si, de modo que <u>não</u> podemos expressar uma função de x (lado esquerdo) em termos das variáveis y e z (lado direito). Devemos ter, então, que nem o lado esquerdo depende de x, nem o lado direito depende de y e z, ou seja, devemos ter necessariamente que ambos os lados são iguais a uma constante,

$$\frac{1}{X}X'' = \alpha_1$$

e

$$-k^2 - \frac{1}{Y}Y'' - \frac{1}{Z}Z'' = \alpha_1\,.$$

A constante α_1 é chamada de constante de separação de variáveis. Colocamos a última equação na forma:

$$\frac{1}{Y}Y'' = -\alpha_1 - k^2 - \frac{1}{Z}Z''$$

e, usando uma argumentação semelhante àquela usada há pouco, concluímos que

$$\frac{1}{Y}Y'' = \alpha_2\,,$$

$$-\alpha_1 - k^2 - \frac{1}{Z}Z'' = \alpha_2$$

(α_2 é uma segunda constante de separação).

Se quiser, podemos juntar as constantes nessa última equação,

$$\frac{1}{Z}Z'' = \alpha_3\,,$$

onde $\alpha_3 = -\alpha_2 - \alpha_1 - k^2$.

Conseguimos, com a aplicação do método de separação de variáveis, "quebrar" a equação diferencial parcial de Helmholtz em três equações diferencias ordinárias (uma para cada coordenada), que podem ser escritas na forma:

$$X'' - \alpha_1\,X = 0\,,$$

$$Y'' - \alpha_2\,Y = 0\,,$$

$$Z'' - \alpha_3\,Z = 0\,.$$

Estas equações podem ser resolvidas pelas técnicas apresentadas em nossa primeira aula.

Note que a mesma equação de Helmholtz poderia ter sido separada em outros sistemas de coordenadas, como em coordenadas polares esféricas, ou cilíndricas.

Exemplo Vamos considerar agora a equação de Laplace,

$$\nabla^2\,\psi(\mathbf{r}) = 0$$

descrita em termos de coordenadas polares esféricas (veja a figura 3.1). Para isso, precisamos recorrer a uma tabela matemática, de onde retiramos a expressão do Laplaciano escrito em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\,.$$

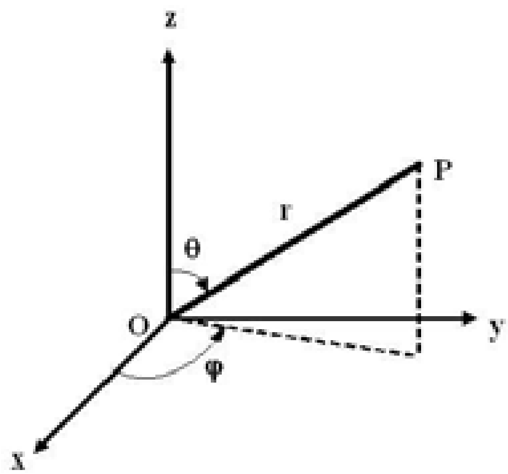

Figura 3.1: As coordenadas polares esféricas r, θ e φ.

Com esse operador Laplaciano substituído na equação de Laplace,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]=0\,.$$

Fazendo a separação de variáveis:

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y(\theta,\varphi)$$

vem:

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=0\,.$$

Nesta última passagem, usamos o fato que Y é uma função apenas dos ângulos θ, φ, de modo que no primeiro termo ele funciona como se fosse uma constante, e pode ser trazido para fora das derivações parciais em relação a r. Por outro lado, no termo entre colchetes os operadores diferenciais envolvem apenas as variáveis θ e φ, de modo que R funciona ali como se fosse uma constante, por isso foi colocado em evidência, fora dos colchetes.

No primeiro termo, R é uma função apenas de r, de modo que devemos substituir os símbolos de derivada parcial $\partial R/\partial r$ pela derivada total dR/dr.

O próximo passo é dividir a equação toda pelo produto RY, e multiplicar por r^2, para obter

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=0\,.$$

Passando o termo entre colchetes ao lado direito da igualdade,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]$$

e chegamos ao ponto crucial da separação de variáveis: no lado esquerdo temos apenas dependência na variável r (lembre que $R=R(r)$, e portanto suas derivadas também dependerão de r apenas), enquanto que no lado direito tem-se uma função de θ e φ (e não de r). Esta igualdade vale para quaisquer valores de r, θ e φ.

Ora, a única forma de uma função de r ser igual a outra função, de θ e φ (para quaisquer r, θ, φ) é que sejam constantes, ou seja, nem o lado esquerdo depende de r, nem o lado direito deve depender dos ângulos θ e φ. Com isso,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda(\lambda+1)$$

onde $\lambda\,(\lambda+1)$ é uma constante de separação, que foi escolhida numa forma conveniente, como veremos adiante.

A separação da equação parcial, evidenciada na relação anterior, leva a duas equações diferenciais,

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=-\lambda\,(\lambda+1)$$

e

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\lambda\,(\lambda+1)\,.$$

Efetuando a derivada na equação radial, chega-se a

$$r^2\,\ddot{R}+2r\,\dot{R}-\lambda\,(\lambda+1)\,R=0$$

e esta é uma equação diferencial <u>ordinária</u>, que pode ser resolvida, por exemplo, por Frobenius, o que fornece duas soluções l.i.,

$$r^{\lambda}\,,\qquad r^{-\lambda-1}\,.$$

De outro lado,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\,\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\lambda\,(\lambda+1)Y$$

é ainda uma equação diferencial parcial (há duas variáveis, θ e φ), e deve ser separada novamente,

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\,.\,\Phi(\varphi)\,.$$

Note bem, Θ corresponde à letra grega "téta" maiúscula, e representa uma função da variável θ (téta minúsculo), e Φ é a letra grega "fi" maiúscula, aqui é uma função de φ (fi minúsculo). Substituindo essa expressão $Y=\Theta\Phi$ na equação diferencial parcial, e multiplicando por $\operatorname{sen}^2\theta$, vem:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\,(\lambda+1)sen^2\,\theta+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0\,.$$

Rearranjando os termos,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\,(\lambda+1)sen^2\,\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

e fica muito claro o sucesso da separação de variáveis: do lado esquerdo temos uma função de θ apenas, e do lado direito uma função só de φ. Pelo mesmo raciocínio anteriormente usado, ambos os lados devem ser igualados a uma constante, o que leva à duas equações diferenciais <u>ordinárias</u>:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\,(\lambda+1)sen^2\,\theta=+m^2$$

e

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2\,.$$

Esta última é a equação diferencial do oscilador harmônico simples (MHS),

$$\ddot{\Phi}+m^2\,\Phi=0$$

que já encontramos na primeira aula deste curso; suas soluções são as funções harmônicas seno e cosseno.

Precisamos chamar sua atenção para a forma da constante de separação $+m^2$ usada acima: claramente, ela assume valores positivos se m é real. Você poderia perguntar: não poderíamos escolher uma constante negativa, neste caso?

Bem, se a constante escolhida fosse $-m^2$, a equação diferencial seria

$$\ddot{\Phi} - m^2\,\Phi = 0$$

que possui como soluções as funções exponencial crescente e decrescente,

$$e^{+m\varphi}\,, \qquad e^{-m\varphi}\,.$$

Mas nenhuma delas satisfaz uma condição importante do ponto de vista físico. Considere um ponto P do espaço, caracterizado pelas coordenadas r, θ e φ. Se tomarmos as coordenadas r, θ e $\varphi + 2\pi$ (isto é, se dermos uma volta a mais no ângulo azimutal φ), retornaremos ao mesmo ponto P (reveja a figura 3.1). Isto significa que as soluções do problema físico considerado não devem ser afetadas por uma mudança de φ para $\varphi + 2\pi$, ou em outras palavras, a função usada deve ser periódica:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \Psi(r, \theta, \varphi + 2\pi)$$

ou, mais especificamente, quem tem a dependência em φ é quem deve possuir tal periodicidade,

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

e por isso uma função tipo exponencial crescente ou decrescente não nos serve como solução. Preste atenção: a exponencial é uma solução matematicamente aceitável, mas por uma razão física ela não nos serve. Já as funções seno e cosseno, essas sim são periódicas, e servem como nossas soluções para Φ. Aqui preferimos a forma:

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}\,.$$

Há uma restrição adicional. Como Φ deve ser periódica,

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi + 2\pi)}$$

o que implica:

$$e^{im2\pi} = 1$$

e portanto m tem que ser um inteiro,

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cabe uma observação importante sobre esses valores possíveis de m. Se o problema físico analisado apresentar simetria azimutal, isto é, simetria em φ, o que é expresso por

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \Psi(r, \theta)$$

e significa que a função Ψ na verdade não depende da variável φ, então devemos ter necessariamente $m = 0$. Este é o único valor de m que elimina a dependência em φ, e nesse caso

$$\Phi(\varphi) = e^0 = 1\,.$$

Examinaremos agora a dependência em θ. Tínhamos a equação diferencial:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \lambda\,(\lambda+1) sen^2\,\theta = +m^2$$

e efetuando a derivada da parte entre parênteses,

$$sen^2\,\theta\,\ddot{\Theta} + \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,\dot{\Theta} + \left[\lambda(\lambda+1)\,sen^2\,\theta - m^2\right]\Theta = 0\,.$$

Essa equação pode ser simplificada pela mudança de variáveis:

$$x = \cos\theta\,, \qquad y(x) = \Theta(\theta)$$

e após uma certa álgebra, chega-se a

$$\left(1 - x^2\right)\,\ddot{y} - 2x\,\dot{y} + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right]\,y = 0\,.$$

Esta é a equação diferencial associada de Legendre, e será analisada em aula posterior. Lá veremos que a constante $\lambda = \ell$ tem que ser um número inteiro ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$).

Mais exemplos da aplicação do método de separação de variáveis serão dados no decorrer deste curso.

ATIVIDADES

1. Considere a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\,\psi\,;$$

(i) Escreva esta equação em coordenadas cartesianas, sabendo que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

(ii) Efetue a separação de variáveis:

$$\psi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

obtendo equações diferenciais ordinárias para x, y, z.

(iii) Supondo soluções oscilatórias, isto é, usando a constante de separação tipo $(-m^2)$ como fizemos para a variável φ na equação de Laplace, ache as soluções $\psi(x, y, z)$ para o problema específico de uma partícula microscópica presa numa caixa de lados a, b, c. A partícula obedece à equação de Schrödinger, e sua função de onda ψ anula-se em cada lateral (ou tampas) da caixa, o que impõe restrições sobre as constantes de separação.

(iv) Que restrições são essas? Que valores poderão assumir essas constantes?

(v) Quais os valores permitidos para a energia E da partícula?

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

No problema 1, proceda como nos exemplos do texto para fazer a separação de variáveis. No ítem (ii), você deve chegar à equação $\ddot{X} + m^2X = 0$ (e outras semelhantes para Y e Z). As respostas dos ítens: (iii) $X(x) = A\,\mathrm{sen}\,M\pi/a$ e similares para Y e Z. (iv) $m = M\pi/a$, $\quad n = N\pi/a$, $p = P\pi/a$, com M, N, P inteiros. (v)

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2} + \frac{P^2}{c^2}\right)\,.$$

CONCLUSÃO

Vimos nesta aula que a aplicação do método de separação de variáveis sobre uma equação diferencial parcial transforma-a num conjunto de equações diferenciais ordinárias, que podem ser resolvidas pelas técnicas aprendidas numa aula anterior.

RESUMO

Nesta aula você aprendeu a usar o método de separação de variáveis que se aplica a equações diferenciais parciais. Esta técnica tem emprego amplo, em vários ramos da física.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos as funções beta e gama, que facilitam o cálculo de integrais de uso frequente em física.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, George; WEBER, Hans. Física Matemática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
BUTKOV, Eugene. Física Matemática. Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1978.