Aula 9 – Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

Nesta aula você estudará dois importantes teoremas de probabilidade e verá suas aplicações em diversas situações envolvendo a tomada de decisão. Esses teoremas, conhecidos como teorema da probabilidade total e teorema de Bayes, resultam diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades vistas para a probabilidade.

A apresentação desses teoremas será feita inicialmente por meio de exemplos, para que você compreenda bem o contexto de sua aplicação. Ao final da aula, será apresentada a formulação geral dos teoremas.

Exemplo 9.1

Em uma linha de produção de certa fábrica, determinada peça é produzida em duas máquinas. A máquina 1, mais antiga, é responsável por 35% da produção, e os 65% restantes vêm da máquina 2. A partir dos dados passados e das informações do fabricante das máquinas, estima-se em 5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 1 e em 2,5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 2. As peças produzidas pelas duas máquinas seguem para o departamento de armazenamento e embalagem, para venda posterior, sem distinção de qual máquina a produziu.

1. Qual é a proporção de peças defeituosas colocadas no mercado por essa fábrica?
2. Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina 2?

Solução:

1. Na **Figura 9.1** representa-se a situação descrita no exemplo. Nosso experimento aleatório é o sorteio de uma peça produzida por essa fábrica, e nosso espaço amostral, representado pelo retângulo, é o conjunto de todas as peças produzidas em determinado período. Podemos ver que o espaço amostral está dividido em 2 eventos mutuamente exclusivos: M_1, peças produzidas pela máquina 1, e M_2, peças produzidas pela máquina 2. Mais precisamente, $\Omega = M_1 \cup M_2$ − isso significa que M_1

e M_2 formam uma partição do espaço amostral (retorne à Aula 5, se necessário). Um outro evento de interesse é o evento $D =$ "peça é defeituosa". Podemos ver que esse evento tem interseção com os eventos M_1 e M_2, ou seja, há peças defeituosas produzidas na máquina 1 e na máquina 2.

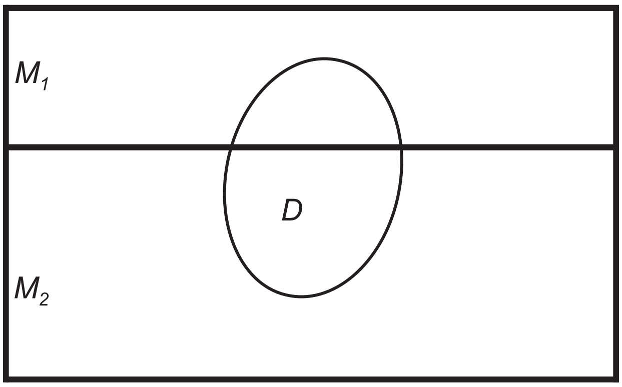

Figura 9.1: Espaço amostral para o experimento do Exemplo 9.1.

Probabilidade *a priori*.

Pelos dados do problema, temos uma estimativa *a priori* das proporções de peças produzidas em cada máquina, ou seja, as probabilidades *a priori* dos eventos M_1 e M_2 são:

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= 0,35 \\ \Pr(M_2) &= 0,65 \end{aligned}$$

Sabemos também a proporção de peças defeituosas produzidas por cada máquina. Essa proporção se traduz em uma probabilidade condicional: se a peça foi produzida pela máquina 1, existe 5% de chance de ser defeituosa; para a máquina 2, essa chance reduz-se a 2,5%. Em termos de probabilidade, temos

$$\begin{aligned} \Pr(D|M_1) &= 0,05 \\ \Pr(D|M_2) &= 0,025 \end{aligned}$$

Como M_1 e M_2 formam uma partição de Ω, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)$$

Mas M_1 e M_2 são mutuamente exclusivos; logo, $(D \cap M_1)$ e $(D \cap M_2)$ também o são. Assim, pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} \Pr(D) &= \Pr\left[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)\right] \\ &= \Pr(D \cap M_1) + \Pr(D \cap M_2) \end{aligned}$$

Pelo teorema da multiplicação (veja a aula anterior), sabemos que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$. Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(D) &= \Pr(M_1)\Pr(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) \\ &= 0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025 \\ &= 0,03375\end{aligned}$$

Note que a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina; os pesos são definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

2. Na segunda parte do exemplo, temos uma informação sobre a peça: ela é defeituosa, ou seja, sabemos que ocorreu o evento D. O que o problema pede é que, com essa informação, reavaliemos a probabilidade de a peça ter sido produzida pela máquina 1. Essa probabilidade é chamada probabilidade *a posteriori,* ou seja, é a probabilidade que calculamos depois de realizado o experimento de sorteio e teste da peça. Em notação matemática, temos que calcular $\Pr(M_1|D)$. Por definição, temos

Probabilidade *a posteriori.*

$$\Pr(M_1|D) = \frac{\Pr(M_1 \cap D)}{\Pr(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(M_1|D) &= \frac{\Pr(M_1)\Pr(M_1|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,05}{0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025} \\ &= \frac{0,0175}{0,03375} = 0,5185\end{aligned}$$

Compare os resultados: sem qualquer informação sobre o resultado do experimento, nossa estimativa para a probabilidade de ocorrência de M_1 − peça a ser produzida pela máquina 1 − era 0,35; com a informação de que a peça é defeituosa, a probabilidade de ter sido produzida pela máquina 1 aumenta para 0,5185.

Exemplo 9.2

Considere novamente a situação do Exemplo 9.1, mas com a seguinte modificação: as peças são produzidas em três máquinas, que são responsáveis por 30%, 35% e 35% da produção, respectivamente. As proporções de peças defeituosas produzidas nessas máquinas são 5%, 2,5% e 2%.

1. Qual é a proporção de peças defeituosas produzidas na fábrica?
2. Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida na máquina 1? E na máquina 2? E na máquina 3?

Solução:

1. O espaço amostral desse experimento está ilustrado no diagrama de árvore da **Figura 9.2**:

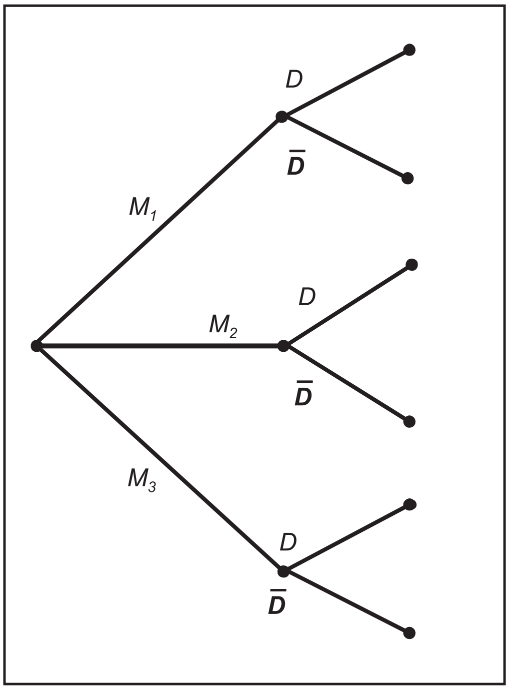

Figura 9.2: Espaço amostral para o experimento do Exemplo 9.2.

Como visto na aula anterior, cada galho da árvore corresponde ao condicionamento do evento aos eventos dos galhos anteriores. Assim, na parte superior da árvore, temos os eventos $D|M_1$ e $\overline{D}|M_1$. Na parte do meio, temos os eventos $D|M_2$ e $\overline{D}|M_2$ e na parte inferior, $D|M_3$ e $\overline{D}|M_3$.

Os dados do problema dão que

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= 0,30 \\ \Pr(M_2) &= \Pr(M_3) = 0,35 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pr(D|M_1) &= 0,05 \\
\Pr(D|M_2) &= 0,025 \\
\Pr(D|M_3) &= 0,02
\end{aligned}$$

Como antes, M_1, M_2 e M_3 formam uma partição de Ω e, portanto, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Mas M_1, M_2 e M_3 são mutuamente exclusivos; logo, $(D \cap M_1)$, $(D \cap M_2)$ e $(D \cap M_3)$ também o são. Pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= \Pr\left[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)\right] \\
&= \Pr(D \cap M_1) + \Pr(D \cap M_2) + \Pr(D \cap M_3)
\end{aligned}$$

Pelo teorema da multiplicação, sabemos que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= \Pr(M_1) PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3) \\
&= 0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02 \\
&= 0,03075
\end{aligned}$$

Com antes, a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina, com os pesos definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

2. Na segunda parte do exemplo, deseja-se saber $\Pr(M_1|D)$, $\Pr(M_2|D)$ e $\Pr(M_3|D)$. Por definição, temos

$$\Pr(M_1|D) = \frac{\Pr(M_1 \cap D)}{\Pr(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
\Pr(M_1|D) &= \frac{\Pr(M_1)\Pr(M_1|D)}{\Pr(M_1) PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3)} \\
&= \frac{0,30 \times 0,05}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\
&= \frac{0,015}{0,03075} = 0,487805
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(M_2|D) &= \frac{\Pr(M_2)\Pr(M_2|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3)} \\
&= \frac{0,35 \times 0,025}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\
&= \frac{0,00875}{0,03075} = 0,284553
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(M_3|D) &= \frac{\Pr(M_3)\Pr(M_3|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3)} \\
&= \frac{0,35 \times 0,02}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\
&= \frac{0,007}{0,03075} = 0,227642
\end{aligned}
$$

Note que $0,487805 + 0,284553 + 0,227642 = 1,000000$; esse resultado é imediato a partir do fato de que $\Pr(\Omega) = 1$. Se ocorreu uma peça defeituosa, essa peça só pode ter vindo de umas das três máquinas.

Exemplo 9.3

Sabe-se que um "soro da verdade", quando aplicado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Um suspeito é retirado de um grupo de pessoas, onde 90% jamais cometeram qualquer crime.

1. Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?

2. Se o soro indica "culpado", qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

Solução:

1. Vamos definir os seguintes eventos (veja a **Figura 9.3**):

   C = "suspeito é culpado" $\quad\overline{C}$ = "suspeito é inocente"

   V = "soro indica culpado" $\quad\overline{V}$ = "soro indica inocente"

   Note que você tem que definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade, a resposta é "culpado" ou "inocente" e não "soro acerta" ou "soro erra".

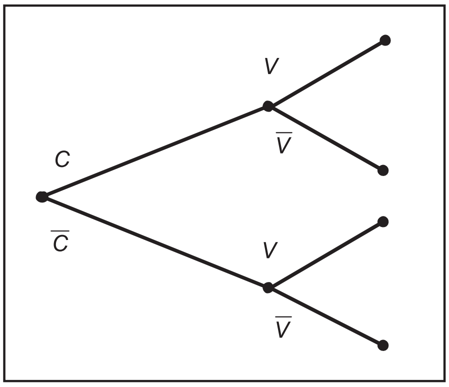

Figura 9.3: Espaço amostral para o experimento do Exemplo 9.3.

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \Pr(V \mid C) &= 0,90 \\ \Pr(\overline{V} \mid \overline{C}) &= 0,99 \\ \Pr(\overline{C}) &= 0,95 \end{aligned}$$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, obtemos:

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{V} \mid C) &= 0,10 \\ \Pr(V \mid \overline{C}) &= 0,01 \\ \Pr(C) &= 0,05 \end{aligned}$$

A partição do espaço amostral é definida pelos eventos C e $\overline{C}$, para os quais temos as probabilidades **a priori**. Os eventos de interesse são V e $\overline{V}$.

Seja o evento A = "soro acerta o diagnóstico". Note que o soro pode diagnosticar corretamente sendo o suspeito culpado ou inocente, ou seja:

$$A = (C \cap V) \cup \left(\overline{C} \cap \overline{V}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(C \cap V) + \Pr\left(\overline{C} \cap \overline{V}\right) \\ &= \Pr(C)\Pr(V \mid C) + \Pr(\overline{C})\Pr(\overline{V} \mid \overline{C}) \\ &= 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,99 \\ &= 0,9855 \end{aligned}$$

2. Queremos calcular $\Pr(\overline{C} \mid V)$. Por definição, temos que:

$$\Pr(\overline{C} \mid V) = \frac{\Pr(\overline{C} \cap V)}{\Pr(V)}$$

O soro pode indicar culpado sendo o suspeito culpado (acerto do diagnóstico) ou inocente (erro no diagnóstico), ou seja:

$$\begin{aligned}\Pr(V) &= \Pr(V \cap C) + \Pr\left(V \cap \overline{C}\right) \\ &= \Pr(V \mid C) \times \Pr(C) + \Pr\left(V \mid \overline{C}\right) \times \Pr(\overline{C}) \\ &= 0,90 \times 0,05 + 0,01 \times 0,95 = 0,045 + 0,0095 = 0,0545\end{aligned}$$

e

$$\Pr\left(V \cap \overline{C}\right) = \Pr\left(V \mid \overline{C}\right) \times \Pr(\overline{C}) = 0,01 \times 095 = 0,0095$$

Logo,

$$\Pr(\overline{C} \mid V) = \frac{0,0095}{0,0545} = 0,1743$$

Exemplo 9.4

Uma caixa contém três moedas. A moeda 1 é honesta, a moeda 2 tem duas caras e a moeda 3 é viciada de tal modo que cara é duas vezes mais provável que coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

1. Qual é a probabilidade de observarmos cara e moeda 1?
2. Qual é a probabilidade de observarmos cara?
3. Se o resultado foi cara, qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido a moeda 1?

Solução:

Vamos definir os eventos

$$\begin{aligned}K &= \text{cara} \qquad C = \text{coroa} \\ M_1 &= \text{moeda 1} \qquad M_2 = \text{ moeda 2} \qquad M_3 = \text{ moeda 3}\end{aligned}$$

É dado que

$$\Pr(K|M_1) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(K|M_2) = 1$$

Para a moeda 3, como a probabilidade de cara é duas vezes a probabilidade de coroa e a soma dessas probabilidades tem que ser 1, resulta que

$$\Pr(K|M_3) = \frac{2}{3}$$

Como a moeda lançada é escolhida aleatoriamente, temos que

$$\Pr(M_1) = \Pr(M_2) = \Pr(M_3) = \frac{1}{3}$$

Veja a **Figura 9.4**:

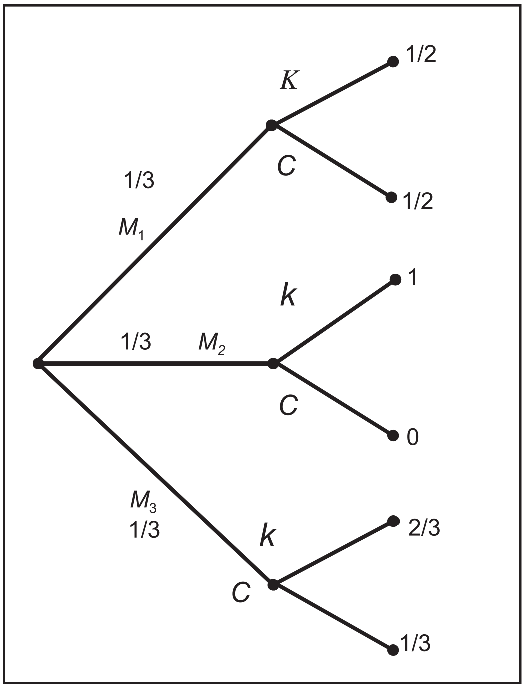

Figura 9.4: Espaço amostral para o Exemplo 9.4 das 3 moedas.

1. Aqui a solução é conseqüência direta da regra de multiplicação:

$$\begin{aligned}\Pr(K \cap M_1) &= \Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

2. Os eventos que formam a partição do espaço amostral são M_1, M_2 e M_3. Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(K) &= \Pr(K \cap M_1) + \Pr(K \cap M_2) + \Pr(K \cap M_3) = \\ &= \Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1) + \Pr(M_2) \times \Pr(K|M_2) + \Pr(M_3) \times \Pr(K|M_3) = \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{6} = \frac{13}{18}\end{aligned}$$

3. O problema pede

$$\Pr(M_1|K) = \frac{\Pr(K \cap M_1)}{\Pr(K)} = \frac{\Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1)}{\Pr(K)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}$$

Exemplo 9.5

Um gerente de banco tem que decidir se concede ou não empréstimo aos clientes que o solicitam. Ele analisa diversos dados para estudar a possibilidade de o cliente vir a ficar inadimplente. Com base em dados passados, ele estima em 15% a taxa de inadimplência. Dentre os inadimplentes, ele tem 80% de chance de tomar a decisão certa, enquanto essa chance aumenta para 90% entre os clientes adimplentes. Esse gerente acaba de recusar um empréstimo. Qual é a probabilidade de ele ter tomado a decisão correta?

Solução:

Os fatos envolvidos nesse processo decisório são: "cliente é inadimplente ou não" e "gerente concede ou não o empréstimo". Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} I &= \text{"cliente é inadimplente"} \\ C &= \text{"gerente concede empréstimo"} \end{aligned}$$

Usaremos a notação de evento complementar para definir

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \text{"cliente é adimplente"} \\ \overline{C} &= \text{"gerente não concede empréstimo"} \end{aligned}$$

Note que temos duas possibilidades de acerto e duas possibilidades de erro. Os acertos são:

- cliente é inadimplente e gerente não concede o empréstimo
- cliente é adimplente e gerente concede o empréstimo

Os erros são:

- cliente é inadimplente e gerente concede o empréstimo
- cliente é adimplente e gerente não concede o empréstimo

A árvore que representa o espaço amostral é dada na **Figura 9.5**.

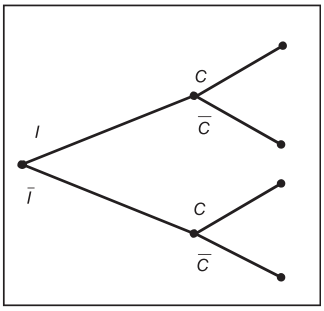

Figura 9.5: Espaço amostral para o Exemplo 9.5.

As probabilidades dadas são

$$\begin{aligned}\Pr(I) &= 0,15\\ \Pr(\overline{C}|I) &= 0,80\\ \Pr(C|\overline{I}) &= 0,90\end{aligned}$$

Pela lei do complementar, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{I}) &= 0,85\\ \Pr(C|I) &= 0,20\\ \Pr(\overline{C}|\overline{I}) &= 0,10\end{aligned}$$

Com relação ao que o problema pede, temos que, dado que o gerente *recusou* o empréstimo, a decisão só será certa se o cliente for *inadimplente*. Logo, temos que calcular

$$\Pr(I|\overline{C}) = \frac{\Pr(I \cap \overline{C})}{\Pr(\overline{C})}$$

Mas o gerente pode recusar o empréstimo sendo o cliente inadimplente ou não, ou seja,

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{C}) &= \Pr(\overline{C} \cap I) + \Pr(\overline{C} \cap \overline{I})\\ &= \Pr(I)\Pr(\overline{C}|I) + \Pr(\overline{I})\Pr(\overline{C}|\overline{I})\\ &= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times 0,10\\ &= 0,205\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pr(I|\overline{C}) &= \frac{\Pr(I \cap \overline{C})}{\Pr(\overline{C})} \\
&= \frac{\Pr(I)\Pr(\overline{C}|I)}{\Pr(I)\Pr(\overline{C}|I) + \Pr(\overline{I})\Pr(\overline{C}|\overline{I})} \\
&= \frac{0,15 \times 0,80}{0,205} \\
&= 0,5854
\end{aligned}$$

Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

Considere a **Figura 9.6**, onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer em Ω.

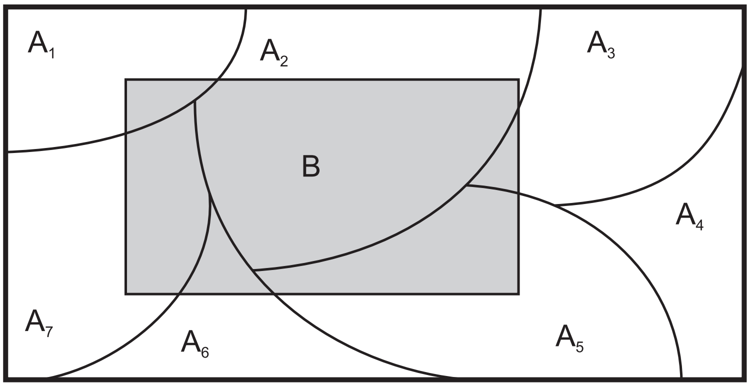

Figura 9.6: Partição do espaço amostral.

Como a união de todos os A_i's é o espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

O fato de alguns desses termos serem o conjunto vazio (por exemplo, $B \cap A_4 = \varnothing$) não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \varnothing = A$. Por definição de partição, os A_i's são mutuamente exclusivos dois a dois; logo, os eventos $A_i \cap B$ também o são. Então, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B)] = \\
&= \Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) + \cdots + \Pr(A_n \cap B)
\end{aligned}$$

e a regra da multiplicação nos dá que

$$\Pr(B) = \Pr(A_1)\Pr(B|A_1) + \Pr(A_2)\Pr(B|A_2) + \cdots + \Pr(A_n)\Pr(B|A_n)$$

Esse resultado é conhecido como teorema da probabilidade total.

Teorema da probabilidade total

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr(B|A_i)$$

Como visto, a probabilidade $\Pr(A_i)$ é denominada *probabilidade a priori do evento A_i*. Continuando no contexto da **Figura 9.6**, suponhamos agora que B tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a probabilidade **a posteriori** do evento A_i, ou seja, vamos calcular $\Pr(A_i|B)$. Por definição temos que

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i \cap B)}{\Pr(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(A_i|B)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)}$$

Esse resultado é conhecido como teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(A_i|B)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)}$$

É importante que, na resolução de exercícios e também na aplicação prática desses teoremas, você identifique os eventos de interesse, os eventos que definem a partição do espaço amostral e quais são as probabilidades **a priori**. Em geral, são essas probabilidades que identificam a partição de Ω.Vamos considerar mais um exemplo para ilustrar esses pontos.

Exemplo 9.6

Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se que 30% dos alunos têm carro, enquanto essa proporção entre as alunas se reduz para 18%. Sorteia-se ao acaso um estudante dessa turma usando o seu número de matrícula e constata-se que possui um carro. Qual é a probabilidade de que a pessoa sorteada seja do sexo feminino?

Solução:

Os eventos em questão envolvem o sexo do aluno e a posse de um carro. Vamos definir os eventos de interesse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \text{homem} \qquad M = \text{mulher} \\ C &= \text{possui carro} \qquad \overline{C} = \text{não possui carro} \end{aligned}$$

Note que H e M definem uma partição do espaço amostral, assim como C e $\overline{C}$. No entanto, as probabilidades **a priori** dadas referem-se a H e M; logo, a partição de Ω será definida em termos desses eventos. Os dados do problema nos dão que

$$\begin{aligned} \Pr(H) &= 0,65 \Rightarrow \Pr(M) = 0,35 \\ \Pr(C|H) &= 0,30 \Rightarrow \Pr(\overline{C}|H) = 0,70 \\ \Pr(C|M) &= 0,18 \Rightarrow \Pr(\overline{C}|M) = 0,82 \end{aligned}$$

O problema pede $\Pr(M|C)$ e para calcular essa probabilidade, temos que calcular $\Pr(C)$. Pelo teorema da probabilidade total, sabemos que

$$\begin{aligned} \Pr(C) &= \Pr(C \cap M) + \Pr(C \cap H) \\ &= \Pr(M)\Pr(C|M) + \Pr(H)\Pr(C|H) \\ &= 0,35 \times 0,18 + 0,65 \times 0,30 \\ &= 0,518 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(M|C) &= \frac{\Pr(C \cap M)}{\Pr(C)} \\ &= \frac{\Pr(M)\Pr(C|M)}{\Pr(C)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,18}{0,518} \\ &= 0,12162 \end{aligned}$$

Resumo da Aula

Nesta aula você estudou dois importantes teoremas da teoria de probabilidade.

- Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer de Ω

  - **Teorema da Probabilidade Total**

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr(B|A_i)$$

  - **Teorema de Bayes**

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

  - **Probabilidades a priori** - são as probabilidades $\Pr(A_i)$
  - **Probabilidades a posteriori** - são as probabilidades $\Pr(A_i|B)$

Exercícios

1. Uma propaganda de um curso preparatório para a prova da ANPAD diz que 80% dos seus alunos conseguem ingressar em algum programa de Mestrado em Administração. Dos cadastros da ANPAD, sabe-se que 15% dos candidatos aos programas de Mestrado escolhem esse curso e que o índice geral de aprovação é de 63% (dados fictícios).

   (a) Se um candidato não escolhe esse curso, qual é a probabilidade de ele passar no exame da ANPAD?

   (b) Sabe-se que um aluno foi aprovado, conseguindo ingressar no programa de Mestrado de uma grande universidade. Qual é a probabilidade de ele ter freqüentado este curso preparatório?

2. Em uma localidade, 8% dos adultos sofrem de determinada doença. Um médico local diagnostica corretamente 95% das pessoas que têm a doença e diagnostica erradamente 2% das pessoas que não a têm. Um adulto acaba de ser diagnosticado pelo médico como portador da doença. Qual é a probabilidade de esse adulto ter, de fato, a doença?

3. Uma urna contém 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas sem reposição. Seja A o evento "soma é 5" e seja B_i o evento "primeira bola sorteada tem o número i", $i = 1, 2, 3, 4$. Calcule $\Pr(A \mid B_i)$ e $\Pr(B_i \mid A)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

4. Resolva o exercício anterior, supondo que as extrações são feitas com reposição.

5. Numa prova há 7 perguntas do tipo Verdadeiro-Falso. Calcule a probabilidade de um aluno acertar todas as 7 questões

   (a) se ele "chuta" as respostas;

   (b) se ele "chuta" as respostas, mas sabendo que há mais Verdadeiros do que Falsos.

6. *Continuação do exercício 4 da Aula 8.* O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criarem mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível. No ano seguinte, um economista estrangeiro constata que foram criados 200.000 empregos novos. Qual é a probabilidade de a inflação ter ficado abaixo de 3%?

7. *Continuação do exercício 6 da Aula 8.* Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é também $\frac{9}{10}$. Dado que Camila não recebeu a carta, qual é a probabilidade de que Joana não a tenha escrito?

8. *Continuação do exercício 14 da Aula 8.* Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com 4 alternativas, com uma só correta.
A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola". Se o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de ele ter "chutado" a resposta?

9. Consideremos dois dados: um deles é equilibrado e o outro viciado, com $\Pr(1) = 0,5$ e $\Pr(2) = \cdots = \Pr(6) = 0,1$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e efetuam-se dois lançamentos, que resultam ambos na face 1. Qual a probabilidade de ter sido escolhido o dado viciado?

10. Uma urna tem 3 bolas brancas, 3 pretas e 4 azuis. Duas bolas são retiradas ao acaso e substituídas por 5 vermelhas. Depois disso, retira-se uma bola. Qual a probabilidade de ser azul?

11. São dadas as urnas A, B e C. Da urna A é retirada uma bola, que é colocada na urna B. Da urna B retira-se, então, uma bola que é colocada na urna C. Retira-se em seguida uma bola da urna C.
A probabilidade de ocorrer bola de cor vermelha na última extração é 0,537. Determinar o valor de x sabendo que as urnas têm as seguintes composições:

$$A : \begin{cases} 7V \\ 3P \end{cases} \qquad B : \begin{cases} 3V \\ 6P \end{cases} \qquad C : \begin{cases} 9-x & V \\ x & P \end{cases}$$

onde V representa bola vermelha e P, bola preta.

12. O chefe do Setor de Compras de uma empresa trabalha com 3 grandes distribuidores de material de escritório. O distribuidor 1 é responsável por 70% dos pedidos, enquanto cada um dos outros 2 distribuidores responde por 15% dos pedidos. Dos registros gerais de compra, sabe-se que 6% dos pedidos chegam com atraso. A proporção de pedidos com atraso do distribuidor 1 é a metade da proporção do distribuidor 2 que, por sua vez, é o dobro da proporção do distribuidor 3. Calcule a porcentagem de pedidos com atraso de cada um dos distribuidores.

13. O gerente de Recursos Humanos de uma empresa escolhe estagiários oriundos de dois cursos de Administração. No curso 1, a proporção de alunos com boa formação em informática é de 60%, enquanto no outro curso essa proporção cai para 40%. Um estagiário acaba de ser contratado. A probabilidade de que tenha boa formação em informática é 0,44. Qual é a preferência (probabilidade) do gerente pelo curso 1?

14. Em um escritório de contabilidade, o contador-chefe tem três auxiliares: um que trabalha em tempo integral e os outros dois que trabalham em tempo parcial. O funcionário de tempo integral é responsável por 50% dos balancetes, enquanto cada um dos funcionários de tempo parcial

responde pela metade dos balancetes restantes. Nos últimos 2 meses, a proporção de balancetes com erros oriundos do funcionário de tempo integral foi de 5%, enquanto para os funcionários de tempo parcial essas proporções foram de 6% e 8%. O chefe resolve, então, fazer um novo treinamento, discutindo os principais erros encontrados. No mês seguinte ao treinamento, a proporção de balancetes com erro cai pela metade, com cada funcionário de tempo parcial produzindo a mesma proporção de balancetes com erro, igual à metade da proporção de erros do funcionário de tempo integral. Quais são as novas proporções de balancetes com erro de cada funcionário?

15. Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de 1/2. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte hidráulica é de 3/4; caso contrário, essa probabilidade é de 1/3. Qual é a probabilidade de ele:

    (a) ganhar os dois contratos?
    (b) ganhar apenas um?
    (c) não ganhar qualquer contrato?

Solução dos Exercícios

1. Os eventos de interesse no problema são:

$$\begin{aligned} C &= \text{“escolher o curso em questão”} \\ P &= \text{“passar no concurso da ANPAD”} \end{aligned}$$

Os dados do problema informam que

$$\begin{aligned} \Pr(P|C) &= 0,80 \\ \Pr(C) &= 0,15 \\ \Pr(P) &= 0,63 \end{aligned}$$

Veja a **Figura 9.7**.

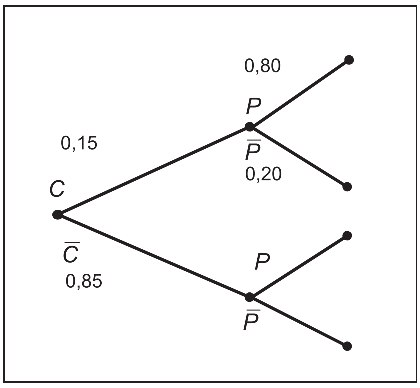

Figura 9.7: Espaço amostral para o experimento do Exercício 9.1.

(a) Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(P) &= \Pr(P \cap C) + \Pr(P \cap \overline{C}) \Rightarrow \\
0,63 &= \Pr(C)\Pr(P|C) + \Pr(\overline{C})\Pr(P|\overline{C}) \Rightarrow \\
0,63 &= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times \Pr(P|\overline{C}) \Rightarrow \\
\Pr(P|\overline{C}) &= \frac{0,63 - 0,15 \times 0,80}{0,85} \Rightarrow \\
\Pr(P|\overline{C}) &= 0,60
\end{aligned}$$

(b) O problema pede $\Pr(C|P)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(C|P) &= \frac{\Pr(C \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\Pr(C)\Pr(P|C)}{\Pr(P)} \\
&= \frac{0,15 \times 0,80}{0,63} = 0,1905
\end{aligned}$$

2. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}
D &= \text{pessoa tem a doença} \Rightarrow \overline{D} = \text{pessoa não tem a doença} \\
V &= \text{diagnóstico indica doença} \Rightarrow \overline{V} = \text{diagnóstico não indica doença}
\end{aligned}$$

Se a pessoa tem a doença, diagnóstico correto significa que o médico identificou a doença. Se a pessoa não tem a doença, diagnóstico correto significa que o médico não identificou a doença. Dessa forma, os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= 0,08 \Rightarrow \Pr(\overline{D}) = 0,92 \\
\Pr(V \mid D) &= 0,95 \Rightarrow \Pr(\overline{V} \mid D) = 0,05 \\
\Pr(V \mid \overline{D}) &= 0,02 \Rightarrow \Pr(\overline{V} \mid \overline{D}) = 0,98
\end{aligned}$$

A probabilidade **a priori** dada é $\Pr(D)$ e, por conseqüência, $\Pr(\overline{D})$. Então, para aplicar o teorema de Bayes, a partição do espaço amostral tem que ser definida por esses eventos, embora V e $\overline{V}$ também definam uma partição. Queremos calcular $\Pr(D \mid V)$. Por definição, temos que:

$$\Pr(D \mid V) = \frac{\Pr(D \cap V)}{\Pr(V)}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\Pr(V) &= \Pr(V \cap D) + \Pr\left(V \cap \overline{D}\right) \\
&= \Pr(V \mid D) \times \Pr(D) + \Pr\left(V \mid \overline{D}\right) \times \Pr(\overline{D}) = \\
&= 0,95 \times 0,08 + 0,02 \times 0,92 \\
&= 0,076 + 0,0184 = 0,0944
\end{aligned}$$

e

$$\Pr(V \cap D) = \Pr(V \mid D) \times \Pr(D) = 0,95 \times 0,08 = 0,076$$

Logo,

$$\Pr(D \mid V) = \frac{0,076}{0,0944} = 0,8051$$

3. Pelo princípio fundamental da multiplicação, temos que $\#\Omega = 4 \times 3 = 12$.

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow \Pr(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(1,2), (1,3), (1,4)\} \\
B_2 &= \{(2,1), (2,3), (2,4)\} \\
B_3 &= \{(3,1), (3,2), (3,4)\} \\
B_4 &= \{(4,1), (4,2), (4,3)\} \\
\Pr(B_i) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad i = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

Note que $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ e como esses eventos são mutuamente exclusivos dois a dois, eles formam uma partição de Ω. Temos que

$$A \cap B_1 = \{(1,4)\} \qquad A \cap B_2 = \{(2,3)\} \qquad A \cap B_3 = \{(3,2)\} \qquad A \cap B_4 = \{(4,1)\}$$

$$\Pr(A \cap B_i) = \frac{1}{12} \qquad i = 1,2,3,4$$

Logo,

$$\Pr(A \mid B_i) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} = \Pr(A) \qquad i = 1,2,3,4$$

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} = \Pr(B_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Note que os eventos A e $B_i, i = 1, 2, 3, 4$ são independentes!

4. Pelo princípio fundamental da multiplicação, temos que $\#\Omega = 4 \times 4 = 16$.

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow \Pr(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\} \\ B_2 &= \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\} \\ B_3 &= \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\} \\ B_4 &= \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \\ \Pr(B_i) &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Então,

$A \cap B_1 = \{(1,4)\} \qquad A \cap B_2 = \{(2,3)\} \qquad A \cap B_3 = \{(3,2)\} \qquad A \cap B_4 = \{(4,1)\}$

$$\Pr(A \cap B_i) = \frac{1}{16} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Logo,

$$\Pr(A \mid B_i) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \Pr(A) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \Pr(B_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Como antes, os eventos A e $B_i, i = 1, 2, 3, 4$ são independentes!

5. (a) Pelo princípio fundamental da multiplicação, há $2^7 = 128$ possibilidades de respostas para as 7 questões. Logo, a probabilidade de acertar todas é $\frac{1}{128}$.

   (b) Haver mais Verdadeiros do que Falsos significa que pode ter 4 Verdadeiros (e, portanto, 3 Falsos), 5 Verdadeiros (e, portanto, 2 Falsos), 6 Verdadeiros (e, portanto, 1 Falso) e 7 Verdadeiros (e, portanto, nenhum Falso).

   4 verdadeiros: existem $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$ maneiras;

   5 verdadeiros: existem $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$ maneiras;

6 verdadeiros: existem $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7 \times 6!}{6! \times 1} = 7$ maneiras;

7 verdadeiros: existem $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ maneira.

Assim, se denotamos por V o evento "ter mais verdadeiros que falsos", resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(V) &= \frac{\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}}{128} \\ &= \frac{35 + 21 + 7 + 1}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Se A é o evento "acertar todas as questões", então $A \subset V$, e o problema pede

$$\Pr(A|V) = \frac{\Pr(A \cap V)}{\Pr(V)} = \frac{\Pr(A)}{\Pr(V)} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{64}{128}} = \frac{1}{64}$$

6. No Exercício 4 da aula anterior, definimos os seguintes eventos: $B =$ "inflação abaixo de 3%"; $M =$ "inflação entre 3% e 4%", $A =$ "inflação acima de 4%" e $E =$ "200.000 empregos". O problema dá o seguinte:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= 0,20 \qquad \Pr(M) = 0,45 \qquad \Pr(A) = 0,35 \\ \Pr(E|B) &= 0,6 \qquad \Pr(E|M) = 0,3 \qquad \Pr(E|A) = 0\end{aligned}$$

Lá, calculamos também que

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(B)\Pr(E|B) + \Pr(M)\Pr(E|M) + \Pr(A)\Pr(E|A) \\ &= 0,20 \times 0,60 + 0,45 \times 0,30 + 0,35 \times 0 \\ &= 0,255\end{aligned}$$

O problema agora pede $\Pr(B|E)$:

$$\begin{aligned}\Pr(B|E) &= \frac{\Pr(B \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr(B)\Pr(E|B)}{\Pr(E)} \\ &= \frac{0,20 \times 0,6}{0,255} = 0,4706\end{aligned}$$

7. Veja a **Figura 9.8**, na qual temos os seguintes eventos: $E =$ "Joana escreve a carta"; $C =$ "correio não perde a carta"; $T =$ "carteiro entrega a carta".

   No Exercício 7 da aula anterior, definimos o evento $R =$ "Camila recebe a carta" e calculamos

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{R}) &= \Pr(\overline{E}) + \Pr(E \cap \overline{C}) + \Pr(E \cap C \cap \overline{T}) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 0,352\end{aligned}$$

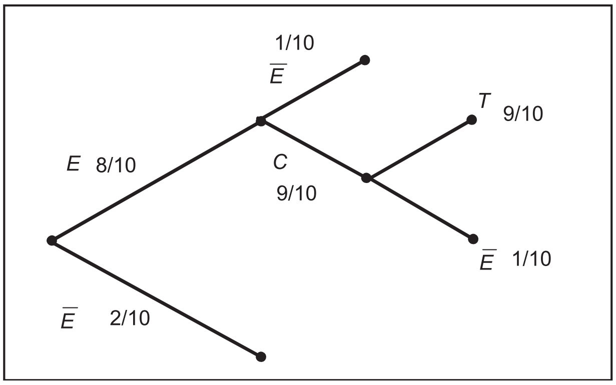

Figura 9.8: Diagrama de árvore para o Exercício 9.7.

O problema agora pede $\Pr(\overline{E}|\overline{R})$:

$$\Pr(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{\Pr(\overline{R} \cap \overline{E})}{\Pr(\overline{R})} = \frac{\Pr(\overline{E})\Pr(\overline{R}|\overline{E})}{\Pr(\overline{R})}$$

O evento $\overline{R}|\overline{E}$ significa "Camila não receber a carta, dado que Joana não a escreveu". Ora, se Joana não escreveu, é claro que Camila não recebe a carta! Logo, esse evento é o evento certo e, portanto, $\Pr(\overline{E}|\overline{R}) = \dfrac{\Pr(\overline{E})\Pr(\overline{R}|\overline{E})}{\Pr(\overline{R})} = \dfrac{0,2 \times 1}{0,352} = 0,5682$

8. Veja a **Figura 9.9**, na qual temos os eventos $S =$ "sabe a resposta" e $A =$ "acerta a resposta".

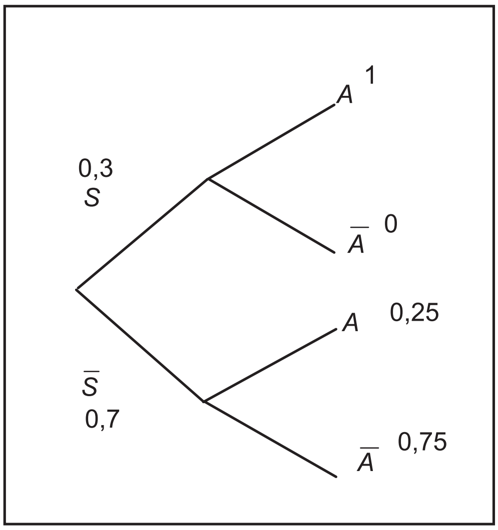

Figura 9.9: Diagrama de árvore para o Exercício 9.8.

É dado que

$$\Pr(S) = 0,3 \Rightarrow \Pr(\overline{S}) = 0,7$$

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode "chutar" entre as 4 alternativas. Logo,

$$\Pr(A|S) = 1 \qquad\qquad \Pr(A|\overline{S}) = 0,25$$

No Exercício 14 da aula anterior, calculamos

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(A \cap S) + \Pr(A \cap \overline{S}) \\
&= \Pr(S) \times \Pr(A|S) + \Pr(\overline{S}) \times \Pr(A|\overline{S}) \\
&= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475
\end{aligned}$$

O problema agora pede $\Pr(\overline{S}|A)$:

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{S}|A) &= \frac{\Pr(\overline{S} \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(\overline{S}) \Pr(A|\overline{S})}{\Pr(A)} \\
&= \frac{0,7 \times 0,25}{0,475} = 0,3684
\end{aligned}$$

9. Seja A_i = "face i no primeiro lançamento", $i = 1, \ldots, 6$ e seja B_i = "face i no segundo lançamento", $i = 1, \ldots 6$. Como os lançamentos são independentes, os eventos A_i e B_i são independentes. Logo, a probabilidade de cada um dos 36 pares (A_i, B_i) do espaço amostral é dada pelo produto das probabilidades individuais, ou seja,

$$\Pr(A_i, B_i) = \Pr(A_i) \Pr(B_i)$$

Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}
E &= \text{"dado equilibrado"} \Rightarrow \overline{E} = \text{"dado viciado"} \\
D &= \text{"dois 1s"} \Rightarrow \overline{D} = \text{"no máximo um 1"}
\end{aligned}$$

A escolha dos dados é aleatória. Logo,

$$\Pr(E) = \Pr(\overline{E}) = \frac{1}{2}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\Pr(D|E) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow \Pr(\overline{D}|E) = \frac{35}{36} \\
\Pr(D|\overline{E}) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Pr(\overline{D}|\overline{E}) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

O problema pede $\Pr(\overline{E}|D)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{E}|D) &= \frac{\Pr(\overline{E}\cap D)}{\Pr(D)} \\
&= \frac{\Pr(\overline{E}\cap D)}{\Pr(D\cap\overline{E})+\Pr(D\cap E)} \\
&= \frac{\Pr(\overline{E})\Pr(D|\overline{E})}{\Pr(\overline{E})\Pr(D|\overline{E})+\Pr(E)\Pr(D|E)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{9+1}{72}} = \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

10. São feitas 3 extrações. Veja a **Figura 9.10**, na qual os números representam o número de bolas disponíveis de cada cor no momento da respectiva extração. Queremos a probabilidade de sair azul na terceira extração. Esse evento corresponde à união dos eventos indicados pelas setas na figura; ou seja, representando a extração pelo número no subscrito, temos que

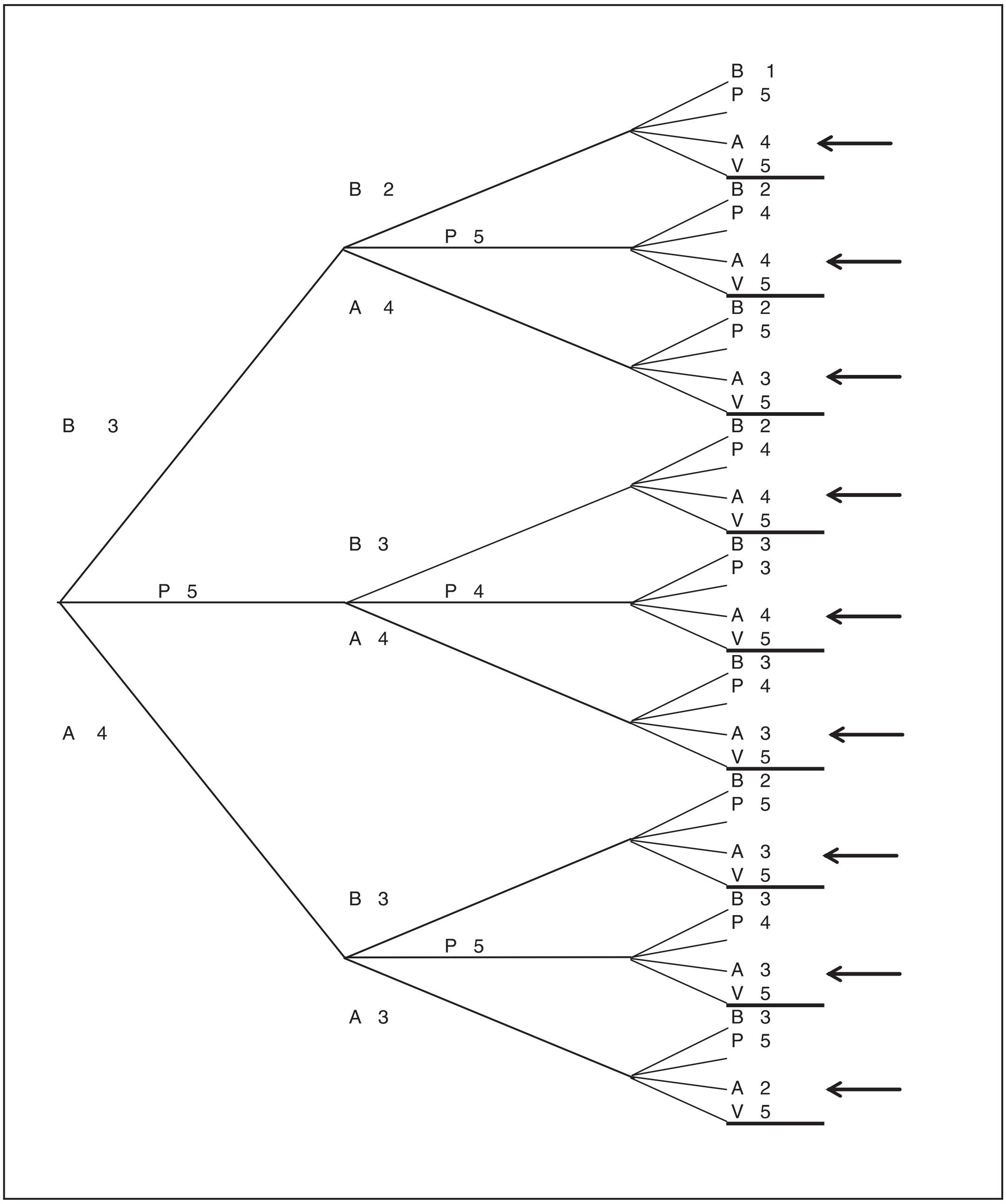

Figura 9.10: Espaço amostral para o experimento do Exercício 9.10.

$$\begin{aligned}
\Pr(A_3) &= [\Pr(B_1 \cap B_2 \cap A_3) + \Pr(B_1 \cap P_2 \cap A_3) + \Pr(B_1 \cap A_2 \cap A_3)] + \\
&\quad [\Pr(P_1 \cap B_2 \cap A_3) + \Pr(P_1 \cap P_2 \cap A_3) + \Pr(P_1 \cap A_2 \cap A_3)] + \\
&\quad [\Pr(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap P_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&= [\Pr(B_1)\Pr(B_2|B_1)\Pr(A_3|B_1 \cap B_2) + \\
&\quad \Pr(B_1)\Pr(P_2|B_1)\Pr(A_3|B_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(B_1)\Pr(A_2|B_1)\Pr(A_3|B_1 \cap A_2)] + \\
&\quad [\Pr(P_1)\Pr(B_2|P_1)\Pr(A_3|P_1 \cap B_2) + \\
&\quad \Pr(P_1)\Pr(P_2|P_1)\Pr(A_3|P_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(P_1)\Pr(A_2|P_1)\Pr(A_3|P_1 \cap A_2)] + \\
&\quad [\Pr(A_1)\Pr(B_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap B_2) + \\
&\quad \Pr(A_1)\Pr(P_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)] \\
&= \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{3}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \\
&\quad \frac{5}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \\
&\quad \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{15} \\
&= \frac{440}{1.980} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Esse problema pode ser resolvido de forma mais simples, já que só estamos interessados em bola azul na terceira extração. Podemos pensar, em cada extração, que ocorreu bola azul ou não. Veja a **Figura 9.11**. Dessa forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\Pr(A_3) &= \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \\
&\quad \Pr(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + \Pr(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \\
&= \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_2 \cap A_1) + \\
&\quad \Pr(A_1)\Pr(\overline{A}_2|A_1)\Pr(A_3|\overline{A}_2 \cap A_1) + \\
&\quad \Pr(\overline{A}_1)\Pr(A_2|\overline{A}_1)\Pr(A_3|A_2 \cap \overline{A}_1) + \\
&\quad \Pr(\overline{A}_1)\Pr(\overline{A}_2|A_1)\Pr(A_3|\overline{A}_2 \cap \overline{A}_1) \\
&= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{3}{15} + \\
&\quad \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{15} \\
&= \frac{440}{1.980} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

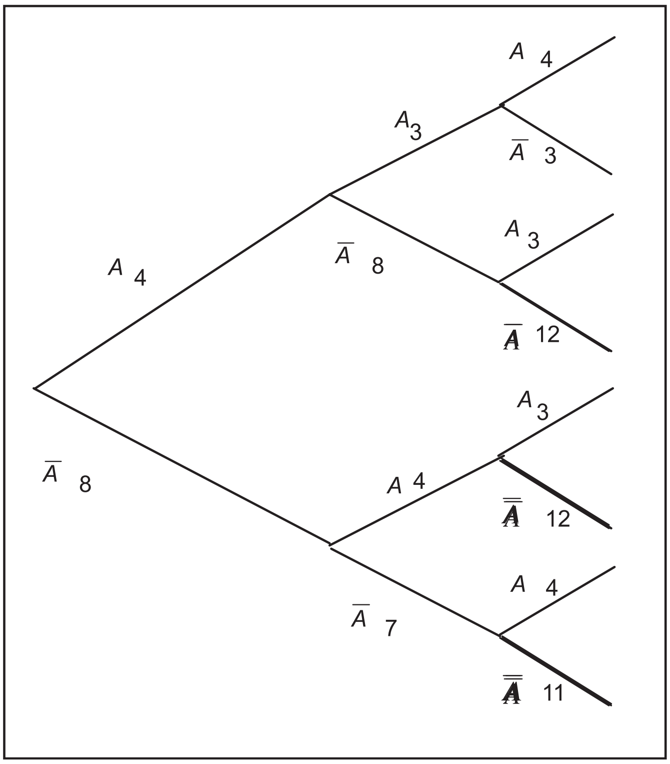

Figura 9.11: Solução alternativa do Exercício 9.10.

11. São feitas 3 extrações. Como antes, vamos denotar por V_i o evento "bola de cor vermelha na extração i" e por B_i o evento "bola de cor branca na extração i". Queremos $\Pr(V_3)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(V_3) &= \Pr(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \Pr(V_1 \cap P_2 \cap V_3) + \\
&\quad \Pr(P_1 \cap V_2 \cap V_3) + \Pr(P_1 \cap P_2 \cap V_3) \\
&= \Pr(V_1) \times \Pr(V_2|V_1) \times \Pr(V_3|V_1 \cap V_2) + \\
&\quad \Pr(V_1) \times \Pr(P_2|V_1) \times \Pr(V_3|V_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(P_1) \times \Pr(V_2|P_1) \times \Pr(V_3|P_1 \cap V_2) + \\
&\quad \Pr(P_1) \times \Pr(P_2|P_1) \times \Pr(V_3|P_1 \cap P_2)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0,537 &= \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{10-x}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{9-x}{10} + \\
&\quad \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{10-x}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9-x}{10} \\
0,537 &= 0,037 \times (10-x) + 0,063 \times (9-x) \\
0,537 &= 0,937 - 0,1x \\
0,1x &= 0,4 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

12. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} D_i &= \text{“distribuidor } i\text{”}, i = 1, 2, 3 \\ A &= \text{“atraso”} \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(D_1) &= 0,70 \qquad \Pr(D_2) = \Pr(D_3) = 0,15 \\ \Pr(A) &= 0,06 \\ \Pr(A|D_1) &= \frac{1}{2}\Pr(A|D_2) \\ \Pr(A|D_2) &= 2\Pr(A|D_3) \end{aligned}$$

Fazendo $p = \Pr(A|D_1)$, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(A|D_2) &= 2p \\ \Pr(A|D_3) &= \frac{1}{2}\Pr(A|D_2) = p \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap D_1) + \Pr(A \cap D_2) + \Pr(A \cap D_3) \\ &= \Pr(D_1)\Pr(A|D_1) + \Pr(D_2)\Pr(A|D_2) + \Pr(D_3)\Pr(A|D_3) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0,06 &= 0,7p + 0,15 \times 2p + 0,15p \Rightarrow \\ 0,06 &= 1,15p \Rightarrow p = 0,052174 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Pr(A|D_1) = 0,052174 \qquad \Pr(A|D_2) = 0,104348 \qquad \Pr(A|D_3) = 0,052174$$

13. Considere os eventos I = “aluno tem boa formação em informática” e C_i = “aluno do curso i”, $i = 1, 2$. O problema dá as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \Pr(I|C_1) &= 0,60 \\ \Pr(I|C_2) &= 0,40 \\ \Pr(I) &= 0,44 \end{aligned}$$

e pede $\Pr(C_1)$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \Pr(I) &= \Pr(C_1 \cap I) + \Pr(C_2 \cap I) \\ &= \Pr(C_1) \times \Pr(I|C_1) + \Pr(C_2) \times \Pr(I|C_2) = \\ &= \Pr(C_1) \times 0,6 + \Pr(C_2) \times 0,4 \\ &= 0,6 \times \Pr(C_1) + 0,4 \times [1 - \Pr(C_1)] \end{aligned}$$

Logo,

$$0,44 = 0,4 + 0,2 \times \Pr(C_1) \Rightarrow 0,2 \times \Pr(C_1) = 0,04 \Rightarrow \Pr(C_1) = 0,2$$

14. Vamos indicar por F_i o evento "funcionário i" e por E o evento "balancete com erro". Antes do treinamento, temos:

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= \Pr(F_1 \cap E) + \Pr(F_2 \cap E) + \Pr(F_3 \cap E) \\
&= \Pr(F_1)\Pr(E|F_1) + \Pr(F_2)\Pr(E|F_2) + \Pr(F_3)\Pr(E|F_3) \\
&= 0,5 \times 0,05 + 0,25 \times 0,06 + 0,25 \times 0,08 \\
&= 0,06
\end{aligned}$$

Depois do treinamento, passamos a ter

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= 0,03 \\
\Pr(E|F_2) &= \Pr(E|F_3) \\
\Pr(E|F_1) &= 2\Pr(E|F_3)
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $p = \Pr(E|F_3)$

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= \Pr(F_1 \cap E) + \Pr(F_2 \cap E) + \Pr(F_3 \cap E) \\
&= \Pr(F_1)\Pr(E|F_1) + \Pr(F_2)\Pr(E|F_2) + \Pr(F_3)\Pr(E|F_3) \Rightarrow \\
0,03 &= 0,5 \times 2p + 0,25 \times p + 0,25 \times p \Rightarrow \\
0,03 &= 1,5p \Rightarrow p = 0,02
\end{aligned}$$

ou seja, depois do treinamento, as probabilidades de erro de cada funcionário passam a ser

$$\begin{aligned}
\Pr(E|F_1) &= 0,04 \text{ (tempo integral)} \\
\Pr(E|F_2) &= \Pr(E|F_3) = 0,02 \text{ (tempo parcial)}
\end{aligned}$$

15. Sejam os eventos E = "ganhar parte elétrica" e H = "ganhar parte hidráulica". Temos que

$$\Pr(E) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(H|E) = \frac{3}{4} \qquad \Pr\left(H|\overline{E}\right) = \frac{1}{3}$$

Resulta que

$$\Pr\left(\overline{E}\right) = \frac{1}{2} \qquad \Pr\left(\overline{H}|E\right) = \frac{1}{4} \qquad \Pr\left(\overline{H}|\overline{E}\right) = \frac{2}{3}$$

(a)

$$\Pr(E \cap H) = \Pr(H|E)\Pr(E) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{E} \cap H\right) + \Pr\left(E \cap \overline{H}\right) &= \Pr\left(H|\overline{E}\right) \times \Pr\left(\overline{E}\right) + \Pr\left(\overline{H}|E\right) \times \Pr(E) = \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

(c)

$$\Pr\left(\overline{E} \cap \overline{H}\right) = \Pr\left(\overline{H}|\overline{E}\right) \times \Pr\left(\overline{E}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$