Aula 15 – A distribuição normal - conclusão

Nesta aula serão apresentados resultados básicos sobre a distribuição normal que permitirão que você calcule probabilidades associadas a qualquer variável aleatória normal, e isso ampliará o escopo de aplicações práticas.

Cálculos com a distribuição normal

Na aula anterior você viu como usar a tabela da distribuição normal padrão para calcular probabilidades associadas à variável normal padronizada. Essa tabela é necessária, pois não é "fácil" calcular áreas sob a curva da densidade normal padrão. Mas aquela tabela referia-se ao caso em que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Será que teremos que usar uma tabela diferente para outros valores de μ e σ? Felizmente, a resposta é NÃO, graças a uma propriedade muito interessante da distribuição normal que estabelece o seguinte resultado:

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{15.1}$$

tem distribuição $N(0; 1)$.

Note que a transformação $\frac{X-\mu}{\sigma}$ é uma transformação linear, que é uma transformação biunívoca. Vejamos como usar esse resultado para calcular probabilidades de uma v.a. normal qualquer.

Consideremos, por exemplo, $X \sim N(1; 4)$, ou seja, X é uma v.a. normal com média 1 e variância 4. Suponhamos que se deseje calcular $\Pr(X \leq 3)$. Temos a seguinte equivalência de eventos:

$$X \leq 3 \Longleftrightarrow \frac{X-1}{\sqrt{4}} \leq \frac{3-1}{\sqrt{4}}$$

(Subtraímos a mesma constante e dividimos pela mesma constante em ambos os lados da desigualdade). Mas, pelo resultado acima, $Z = \frac{X-1}{\sqrt{4}} \sim N(0; 1)$. Logo,

$$\Pr(X \leq 3) = \Pr\left(\frac{X-1}{\sqrt{4}} \leq \frac{3-1}{\sqrt{4}}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{3-1}{\sqrt{4}}\right)$$

e caímos novamente no cálculo de probabilidades da normal padrão, que é feito com auxílio da **Tabela 1**, apresentada na aula anterior. Completando o cálculo, obtemos:

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 3) &= \Pr\left(Z \leq \frac{3-1}{\sqrt{4}}\right) \\ &= \Pr(Z \leq 1) \\ &= 0,5 + \text{tab}(1) \\ &= 0,84134\end{aligned}$$

Na **Figura 15.1** ilustra-se a equivalência dessas probabilidades: no gráfico superior, a área sombreada corresponde a $\Pr(X \leq 3)$ e no gráfico inferior, a área sombreada corresponde a $\Pr(Z \leq 1)$. Pelo resultado acima, essas duas áreas são iguais.

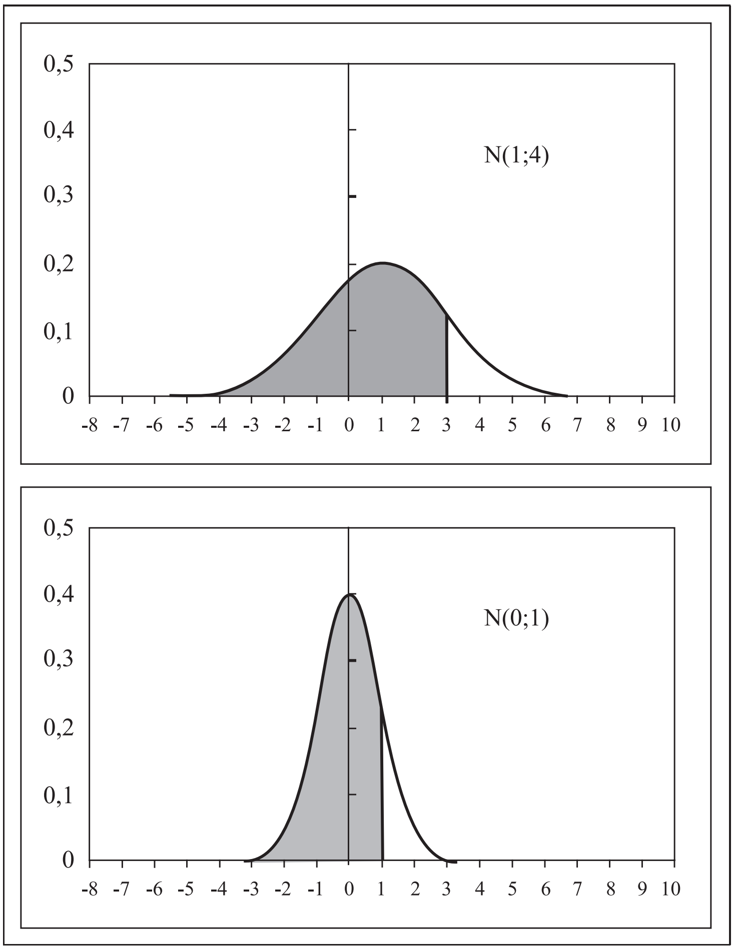

Figura 15.1: Cálculo de $\Pr(X \leq 3)$, onde $X \sim N(1;4)$.

É interessante lembrar que a transformação dada na equação (15.1) corresponde a calcular o escore padronizado associado à abscissa x. Assim, cálculos de probabilidades de v.a. normais sempre envolverão o cálculo do escore padronizado da(s) abscissa(s) de interesse. Como na aula anterior, vamos apresentar vários exemplos para fixar os conceitos e procedimentos. Nesses exemplos apresentaremos os cálculos em termos da **Tabela 1** e da **Tabela 2**, usando a mesma notação utilizada na aula anterior: na **Tabela 1** obtemos $\text{tab}(z) = \Pr(0 \leq Z \leq z)$ e na **Tabela 2** obtemos $\Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$. É importante que você faça um esboço do gráfico da $N(0;1)$ sombreando a área desejada.

Exemplo 15.1

Se $X \sim N(3;9)$, calcule $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$. Veja a **Figura 15.2**.

$$\begin{aligned}
\Pr(-1 \leq X \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-1-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4-3}{\sqrt{9}}\right) \\
&= \Pr\left(-1,33 \leq Z \leq 0,33\right) \\
&= \Phi(0,33) - \Phi(-1,33) \\
&= 0,62930 - 0,09176 \\
&= 0,53754 \\
&= \text{tab}(0,33) + \text{tab}(1,33) \\
&= 0,12930 + 0,40824
\end{aligned}$$

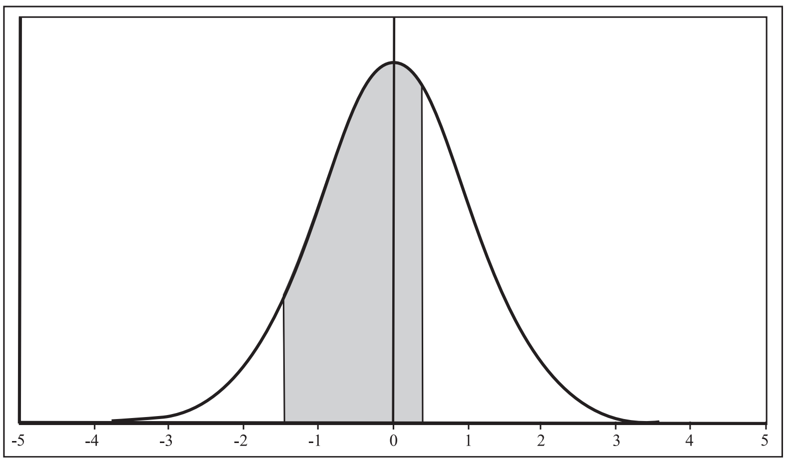

Figura 15.2: Exemplo 15.1 – Cálculo de $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$, $X \sim N(3;9)$.

Exemplo 15.2

Se $X \sim N(2;5)$, calcule $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$. Veja a **Figura 15.3**.

$$\begin{aligned}
\Pr(-1 \leq X \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-1-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{4-2}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \Pr\left(-1,34 \leq Z \leq 0,89\right) \\
&= \Phi(0,89) - \Phi(-1,34) \\
&= 0,81327 - 0,09012 \\
&= 0,72315 \\
&= \text{tab}(0,89) + \text{tab}(1,34) \\
&= 0,31327 + 0,40988
\end{aligned}$$

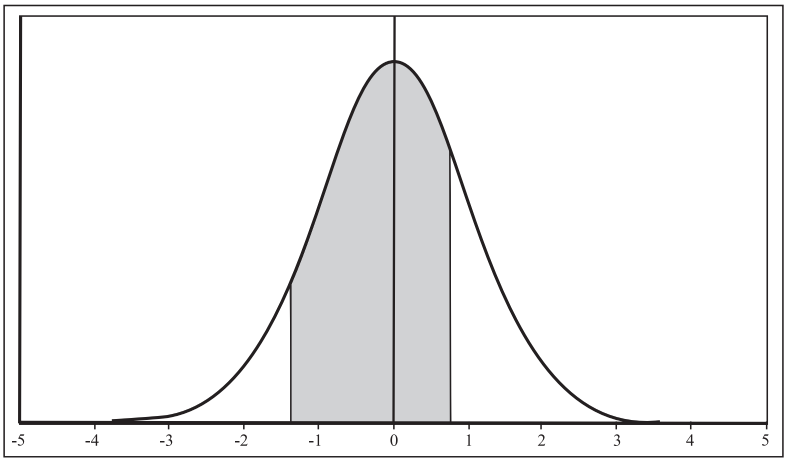

Figura 15.3: Exemplo 15.2 – Cálculo de $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$, $X \sim N(2;5)$.

Exemplo 15.3

Se $X \sim N(5,1)$, calcule $\Pr(X > 7)$. Veja a **Figura 15.4**.

$$\begin{aligned}
\Pr(X > 7) &= \Pr\left(\frac{X-5}{1} > \frac{7-5}{1}\right) \\
&= \Pr(Z > 2) \\
&= 1,0 - \Phi(2,0) \\
&= 1,0 - 0,97725 \\
&= 0,5 - \text{tab}(2,0) \\
&= 0,5 - 0,47725 \\
&= 0,02275
\end{aligned}$$

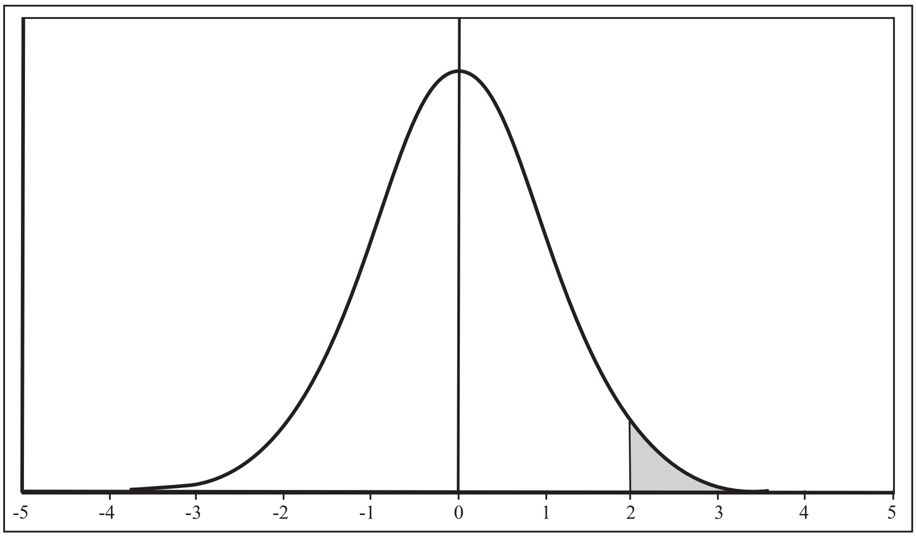

Figura 15.4: Exemplo 15.3 – Cálculo de $\Pr(X > 7)$, $X \sim N(5, 1)$.

Exemplo 15.4

Se $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$, calcule $\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de 1 desvio padrão da média.

$$\begin{aligned}
\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Pr(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= \Phi(1,0) - \Phi(-1,0) \\
&= 0.84134 - 0.15866 \\
&= \mathrm{tab}(1,0) + \mathrm{tab}(1,0) \\
&= 2 \times 0.34134 \\
&= 0,68268
\end{aligned}$$

Exemplo 15.5

Se $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$, calcule $\Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$.

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de 2 desvios padrões da média.

$$\begin{aligned}
\Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Pr(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= \Phi(2,0) - \Phi(-2,0) \\
&= 0.97725 - 0.02275 \\
&= \mathrm{tab}(2,0) + \mathrm{tab}(2,0) \\
&= 2 \times 0.47725 \\
&= 0,95450
\end{aligned}$$

Essa probabilidade nos diz que, para *qualquer* distribuição normal, 95,45% dos valores estão a 2 desvios padrões da média (acima ou abaixo).

Exemplo 15.6

Se $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$, calcule $\Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de 3 desvios padrões da média.

$$\begin{aligned}
\Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Pr(-3 \leq Z \leq 3) \\
&= \Phi(3,0) - \Phi(-3,0) \\
&= 0.99865 - 0.00135 \\
&= \mathrm{tab}(3,0) + \mathrm{tab}(3,0) \\
&= 2 \times 0.49865 \\
&= 0,9973
\end{aligned}$$

Essa probabilidade nos diz que, para *qualquer* distribuição normal, 99,73% dos valores estão a 3 desvios padrões da média (acima ou abaixo). Veja a **Figura 15.5** para uma ilustração desses resultados. Lembre-se de que o teorema de Chebyshev fornecia percentuais análogos para qualquer distribuição; para distribuições normais, os resultados desses três exemplos mostram percentuais mais precisos.

Exemplo 15.7

Determine o valor de k tal que $\Pr(Z \leq k) = 0,90$. Lembre-se de que $Z \sim N(0;1)$.

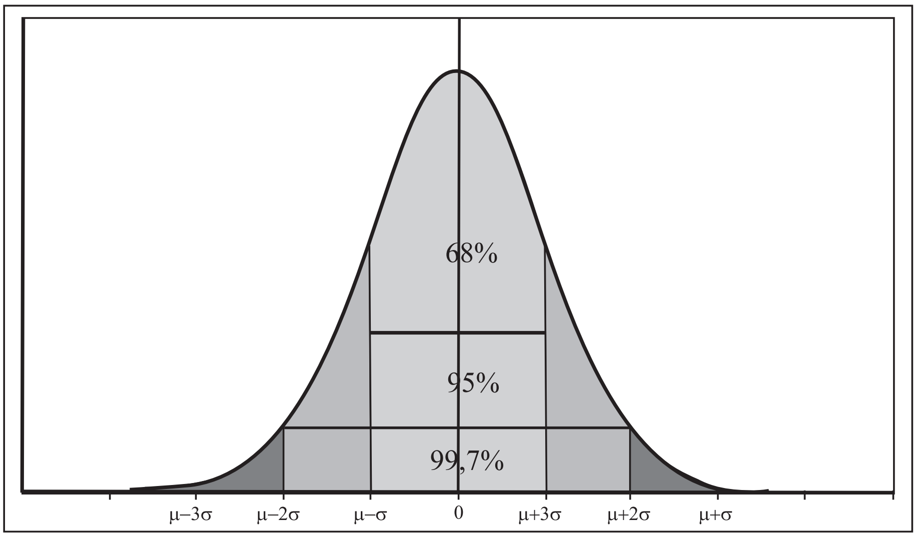

Figura 15.5: Ilustração da distribuição normal.

Nos exemplos anteriores, tínhamos a abscissa e queríamos a probabilidade (área); neste exemplo, temos a probabilidade e queremos a abscissa. Esta é uma situação comum em problemas de tomada de decisão, conforme veremos em exemplos mais adiante.

Vamos "traduzir" essa probabilidade em termos da **Tabela 1**. O primeiro ponto a observar é o seguinte: $\Pr(Z \leq k)$ indica a área à esquerda de k; como essa área à esquerda de k é maior que 0,5, temos de ter $k > 0$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\Pr(Z \leq k) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(Z \leq 0) + \Pr(0 < Z \leq k) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&0,5 + \Pr(0 < Z \leq k) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(0 < Z \leq k) = 0,40 \Longleftrightarrow \\
&\mathrm{tab}(k) = 0,40
\end{aligned}$$

Esta última igualdade nos diz que k é a abscissa correspondente ao valor 0,40 na **Tabela 1**. Para identificar k, temos que buscar no corpo da **Tabela 1** o valor mais próximo de 0,40. Na linha correspondente ao valor 1,2 encontramos as entradas 0,39973 e 0,40147. Como a primeira está mais próxima de 0,40, olhamos qual é a abscissa correspondente: a linha é 1,2 e a coluna é 8, o que nos dá a abscissa de 1,28. Ou seja, $k = 1,28$.

Exemplo 15.8

Se $X \sim N(3;4)$ calcule k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,90$.

A diferença em relação ao exemplo anterior é que a distribuição não é mais a normal padrão. Mas o raciocínio é análogo, e podemos concluir que k tem de ser maior que a média. Vamos traduzir a probabilidade dada em termos da normal padronizada.

$$\begin{aligned}
&\Pr(X \leq k) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,90
\end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, $\frac{k-3}{2}$ tem de ser maior que 0 e, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(Z \leq 0) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&0,5 + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,40 \Longleftrightarrow \\
&\frac{k-3}{2} = 1,28 \Longleftrightarrow \\
&k = 5,56
\end{aligned}$$

Exemplo 15.9

Se $X \sim N(3;4)$ calcule k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,05$.

Em termos da normal padronizada, temos a seguinte probabilidade:

$$\begin{aligned}
&\Pr(X \leq k) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,05
\end{aligned}$$

Como a área (probabilidade) à esquerda de $\frac{k-3}{2}$ é menor que $0,5$, isso significa que $\frac{k-3}{2}$ tem de ser negativo. Veja a **Figura 15.6**. A abscissa simétrica a $\frac{k-3}{2}$ é $-\frac{k-3}{2} = \frac{3-k}{2}$. Então, a área acima dessa abscissa também é 0,05.

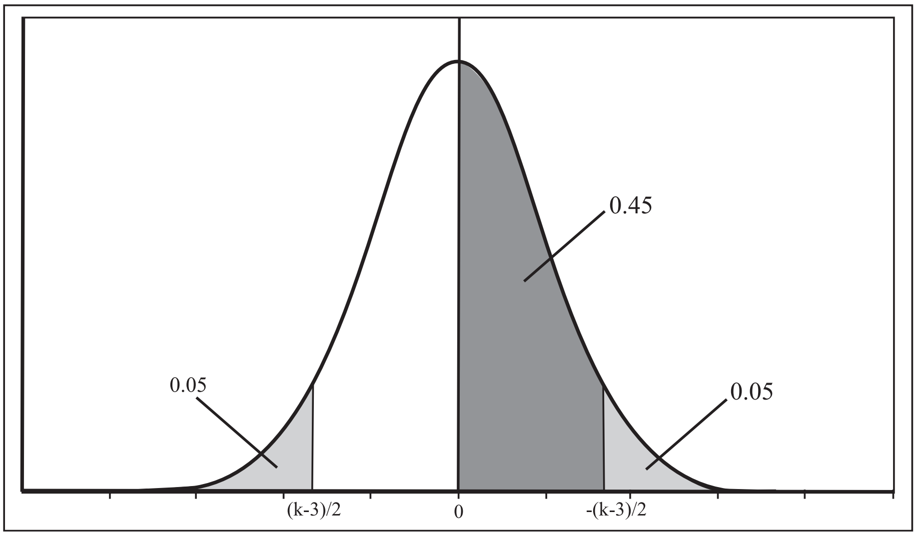

Figura 15.6: Solução do Exemplo 15.9.

Logo,

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq -\frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq \frac{3-k}{2}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{3-k}{2}\right) = 0,45 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{3-k}{2}\right) = 0,45
\end{aligned}$$

O valor mais próximo de 0,45 no corpo da **Tabela 1** é 0,44950, que corresponde à abscissa 1,64, e isso nos dá que

$$\frac{3-k}{2} = 1,64 \Rightarrow k = -0,28$$

Exemplo 15.10

Se $X \sim N(3;4)$ calcule k tal que $\Pr(|\,X-3\,| \leq k) = 0,95$.

Usando as propriedades da função módulo (veja a **Figura 11.2** da Aula 11), temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\Pr(|\,X-3\,| \leq k) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(-k \leq X-3 \leq k) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(3-k \leq X \leq k+3) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{3-k-3}{2} \leq \frac{X-3}{2} \leq \frac{k+3-3}{2}\right) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{-k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95
\end{aligned}
$$

Veja a **Figura 15.7**. Podemos ver que

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\frac{-k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{-k}{2} \leq Z \leq 0\right) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&2 \times \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,475 \Longleftrightarrow \\
&\mathrm{tab}\left(\frac{k}{2}\right) = 0,475 \Longleftrightarrow \\
&\frac{k}{2} = 1,96 \Longleftrightarrow \\
&k = 3,92
\end{aligned}
$$

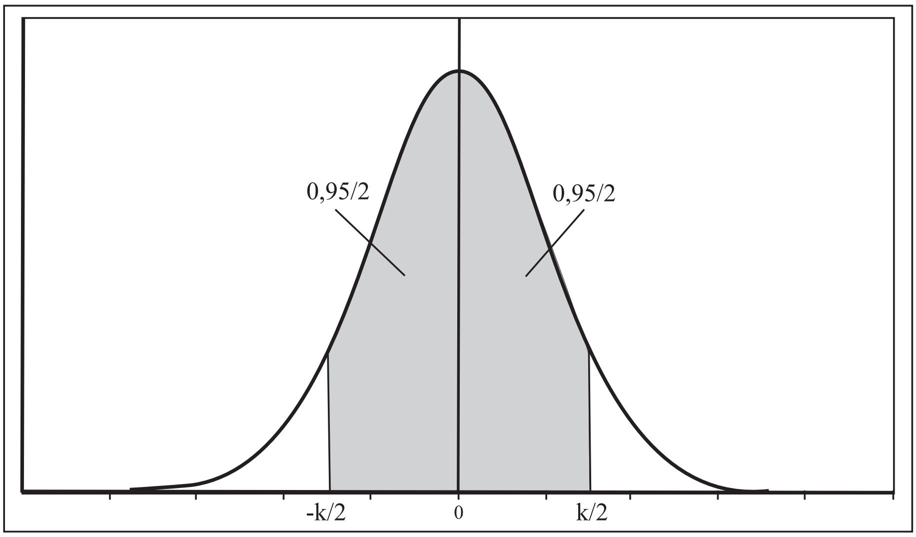

Figura 15.7: Exemplo 15.10.

Exemplos de aplicação da distribuição normal

A distribuição normal é um modelo probabilístico que se aplica a diversas situações práticas. Finalizaremos esta aula com alguns exemplos práticos, mas na terceira parte do curso você verá mais aplicações no contexto da inferência estatística, em que decisões têm de ser tomadas com base nos resultados obtidos a partir de uma amostra.

Exemplo 15.11

O saldo médio dos clientes de um banco é uma v.a. normal com média R$ 2.000, 00 e desvio padrão R$ 250,00. Os clientes com os 10% maiores saldos médios recebem tratamento VIP, enquanto aqueles com os 5% menores saldos médios serão "convidados" a mudar de banco.

1. Quanto você precisa de saldo médio para se tornar um cliente VIP?
2. Abaixo de qual saldo médio o cliente será "convidado" a mudar de banco?

Solução
Seja $X =$ "saldo médio"; é dado que $X \sim N(2000; 250^2)$.

1. Temos que determinar o valor de k tal que $\Pr(X \geq k) = 0,10$. Note que isso equivale a calcular o 90º percentil da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser 0,90; logo, k tem de ser maior que a média.

$$\begin{aligned}
&\Pr(X \geq k) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-2000}{250} \geq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-2000}{250} \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(Z \leq 0) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,90 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,90 - 0,50 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{k-2000}{250}\right) = 0,40 \Longleftrightarrow \\
&\frac{k-2000}{250} = 1,28 \Longleftrightarrow k = 2320
\end{aligned}$$

Os clientes com saldo médio maior ou igual a R$ 2.320,00 terão tratamento VIP.

2. Temos de determinar o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,05$. Note que isso equivale a calcular o 5º percentil da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser 0,05; logo, k tem de ser menor que a média.

$$\begin{aligned}
&\Pr(X \leq k) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-2000}{250} \leq \frac{k-2000}{250}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq -\frac{k-2000}{250}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq \frac{2000-k}{250}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{2000-k}{250}\right) = 0,45 \Longleftrightarrow \\
&\frac{2000-k}{250} = 1,64 \Longleftrightarrow k = 1590
\end{aligned}$$

Os clientes com saldo médio inferior a R$ 1.590,00 serão "convidados" a mudar de banco.

Exemplo 15.12

Uma máquina de empacotar determinado produto oferece variações de peso que se distribuem segundo uma distribuição normal com desvio padrão de 20 gramas. Em quanto deve ser regulado o peso médio desses pacotes para que apenas 10% deles tenham menos que 500 gramas?

Solução

Esse é um exemplo clássico de aplicação da distribuição normal. Seja X o peso dos pacotes em gramas. Então, $X \sim N(\mu; 400)$. Temos de ter $\Pr(X \leq 500) = 0,10$. Note que o peso médio tem de ser superior a 500 g.

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X \leq 500) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{20} \leq \frac{500-\mu}{20}\right) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \leq \frac{500-\mu}{20}\right) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq -\frac{500-\mu}{20}\right) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq \frac{\mu-500}{20}\right) = 0,10 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{\mu-500}{20}\right) = 0,40 \Longleftrightarrow \\
&\frac{\mu-500}{20} = 1,28 \Longleftrightarrow \\
&\mu = 525,6
\end{aligned}
$$

A máquina tem de ser regulada com um peso médio de 525,6g para que apenas 10% dos pacotes tenham peso inferior a 500g.

Exemplo 15.13

Uma máquina fabrica tubos metálicos cujos diâmetros podem ser considerados uma variável aleatória normal com média 200mm e desvio padrão 2mm. Verifica-se que 15% dos tubos estão sendo rejeitados como grandes e 10% como pequenos.

1. Quais são as tolerâncias de especificação para esse diâmetro?

2. Mantidas essas especificações, qual deverá ser a regulagem média da máquina para que a rejeição por diâmetro grande seja nula? Nesse caso, qual será a porcentagem de rejeição por diâmetro pequeno?

Solução

Seja $D =$ diâmetro dos tubos. Então $D \sim N(200, 2^2)$.

1. Sejam k_I e k_S as especificações inferior e superior, respectivamente. Isso significa que tubos com diâmetro menor que k_I são rejeitados como pequenos e tubos com diâmetro maior que k_S são rejeitados como grandes.

$$
\begin{aligned}
&\Pr(D < k_I) = 0,10 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{D-200}{2} < \frac{k_I - 200}{2}\right) = 0,10 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{k_I - 200}{2}\right) = 0,10 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > -\frac{k_I - 200}{2}\right) = 0,10 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{200 - k_I}{2}\right) = 0,10 \Rightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z < \frac{200 - k_I}{2}\right) = 0,40 \Rightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{200 - k_I}{2}\right) = 0,40 \Rightarrow \\
&\frac{200 - k_I}{2} = 1,28 \Rightarrow k_I = 197,44
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(D > k_S) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(\frac{D-200}{2} > \frac{k_S - 200}{2}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(0 \leq Z < \frac{k_S - 200}{2}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{k_S - 200}{2}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
\frac{k_S - 200}{2} &= 1,03 \Rightarrow k_S = 202,06
\end{aligned}
$$

Logo, tubos com diâmetro menor que 197,44 são rejeitados como pequenos e tubos com diâmetros maiores que 202,06 são rejeitados como grandes.

2. Com a nova regulagem, temos que $D \sim N(\mu; 2^2)$ e μ deve ser tal que

$$
\begin{aligned}
&\Pr(D > 202,06) = 0 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{D-\mu}{2} > \frac{202,06-\mu}{2}\right) = 0 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{202,06-\mu}{2}\right) = 0 \Rightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{202,06-\mu}{2}\right) = 0,5 \Rightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{202,06-\mu}{2}\right) = 0,5 \Rightarrow \\
&\frac{202,06-\mu}{2} \simeq 4,5 \Rightarrow \mu \simeq 193,06
\end{aligned}
$$

Com essa média, a porcentagem de rejeição por diâmetro pequeno é

$$
\begin{aligned}
\Pr(D < 197,44) &= \Pr\left(\frac{D-193,06}{2} < \frac{197,44-193,06}{2}\right) \\
&= \Pr(Z < 2,19) \\
&= \Pr(Z \leq 0) + \Pr(0 < Z < 2,19) \\
&= 0,5 + \text{tab}(2,19) = 0,9857
\end{aligned}
$$

Com essa nova regulagem, a rejeição por diâmetro grande é nula, mas a rejeição por diâmetro pequeno é muito alta! Veja a **Figura 15.8**, na qual ficam claros os resultados obtidos.

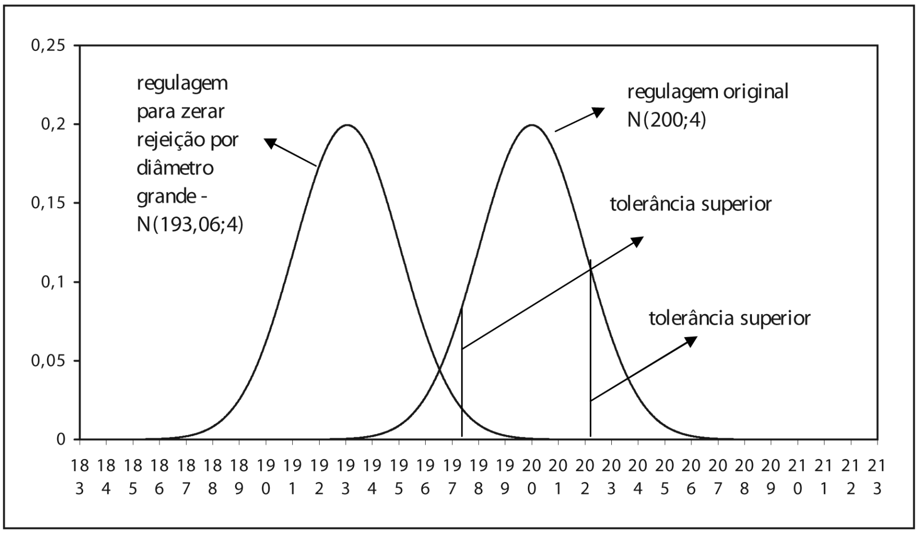

Figura 15.8: Solução do Exemplo 15.13.

Exemplo 15.14

Em um grande complexo industrial, o departamento de manutenção tem instruções para substituir as lâmpadas antes que se queimem. Os registros indicam que a duração das lâmpadas, em horas, tem distribuição normal, com média de 900 horas e desvio padrão de 75 horas. Quando devem ser trocadas as lâmpadas, de modo que no máximo 5% delas queimem antes de serem trocadas?

Solução

Seja T = "tempo de duração (em horas) das lâmpadas"; então, $T \sim N(900; 75^2)$.

Temos que determinar t tal que $\Pr(T \leq t) = 0,05$.

$$\begin{aligned}
&\Pr(T \leq t) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{T-900}{75} \leq \frac{t-900}{75}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq -\frac{t-900}{75}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq \frac{900-t}{75}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{900-t}{75}\right) = 0,45 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{900-t}{75}\right) = 0,45 \Leftrightarrow \\
&\frac{900-t}{75} = 1,64 \Longleftrightarrow \\
&t = 777
\end{aligned}$$

As lâmpadas devem ser trocadas com 777 horas de uso para que apenas 5% se queimem antes da troca.

Exercícios

1. Na distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:

   (a) $\Pr(X \leq \mu + 2\sigma)$

   (b) $\Pr(|X - \mu| \leq \sigma)$

   (c) $\Pr(|X - \mu| \leq 1,96\sigma)$

   (d) o número k tal que $\Pr(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 0,99$

   (e) o número k tal que $\Pr(X > k) = 0,90$.

2. Suponha que os tempos de vida de 2 marcas de aparelhos elétricos sejam variáveis aleatórias D_1 e D_2, onde $D_1 \sim N(42, 36)$ e $D_2 \sim N(45, 9)$. Se o aparelho deve ser usado por um período de 45 horas, qual marca deve ser preferida? E se for por um período de 49 horas?

3. Numa distribuição normal, 31% dos elementos são menores que 45 e 8% são maiores que 64. Calcular os parâmetros que definem a distribuição.

4. As vendas de um determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média de 500 unidades e desvio padrão de 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

5. Um produto alimentício é ensacado automaticamente, sendo o peso médio de 50kg por saco, com desvio padrão de 1,6kg. Os clientes exigem que, para cada saco fornecido com menos de 48kg, o fornecedor pague uma indenização de 5 u.m.

   (a) Para 200 sacos fornecidos, qual o custo médio com indenização?

   (b) Para que o custo calculado no item anterior caia para 50 u.m., qual deveria ser a nova regulagem média da máquina?

   (c) Como o fornecedor acha que, no custo global, é desvantajoso aumentar a regulagem da máquina, ele quer comprar uma nova máquina. Qual deveria ser o desvio padrão dessa máquina para que, trabalhando com peso médio de 50kg, em apenas 3% dos sacos se pague indenização?

6. Um teste de aptidão para o exercício de certa profissão exige uma seqüência de operações a serem executadas rapidamente uma após a outra. Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em, no máximo, 80 minutos. Admita que o tempo, em minutos, para completar a prova seja uma variável aleatória normal com média 90 minutos e desvio padrão 20 minutos.

   (a) Que porcentagem dos candidatos tem chance de ser aprovada?

   (b) Os 5% melhores receberão um certificado especial. Qual o tempo máximo para fazer jus a tal certificado?

7. O diâmetro X de rolamentos de esfera fabricados por certa fábrica tem distribuição normal com média 0,6140 e desvio padrão 0,0025. O lucro T de cada esfera depende do seu diâmetro e

   - $T = 0,10$ se a esfera é boa, isto é, $0,6100 < X < 0,6180$
   - $T = 0,05$ se a esfera é recuperável, isto é, $0,6080 < X < 0,6100$ ou $0,6180 < X < 0,6200$
   - $T = -0,10$ se a esfera é defeituosa, isto é, $X < 0,6080$ ou $X > 0,6200$

   Calcule as probabilidades de as esferas serem boas, recuperáveis e defeituosas, e o lucro médio.

8. Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de 6 meses. Ela produz televisores do tipo **A**, comum, e do tipo **B**, de luxo, com um lucro respectivo de 1.000 u.m. e 2.000 u.m. caso não haja restituição, e com prejuízo de 3.000 u.m. e 8.000 u.m., se houver restituição. Suponha que o tempo para ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal com médias de 9 meses e 12 meses e desvios padrões de 2 meses e 3 meses. Se tivesse que planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos tipo **A** ou tipo **B**?

9. A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode ser representada por uma distribuição normal com média de 5kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso da seguinte forma: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

10. Considere uma v.a. $X \sim N(3, 25)$:

    (a) Calcule $\Pr(-3 \leq X \leq 3)$

    (b) Calcule $\Pr(-2 \leq X \leq 8)$

    (c) Encontre o valor de k tal que $\Pr(X > k) = 0,05$.

    (d) Encontre o valor de k tal que $\Pr(X > k) = 0,80$.

11. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a mediana e o intervalo interquartil de X.

12. O 90º percentil de uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$ é 50, enquanto o 15º percentil é 25. Encontre os valores dos parâmetros da distribuição.

13. Uma enchedora automática enche garrafas de acordo com uma distribuição normal de média 1.000 ml. Deseja-se que no máximo 1 garrafa em 100 saia com menos de 990ml. Qual deve ser o maior desvio padrão tolerável?

Solução dos Exercícios

1. (a)

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \leq \mu + 2\sigma) &= \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Pr(Z \leq 2) \\
&= 0,5 + \text{tab}(2) = 0,97725
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\Pr(|X-\mu| \leq \sigma) &= \Pr(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) \\
&= \Pr\left(-\frac{\sigma}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\sigma}{\sigma}\right) \\
&= \Pr(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 2 \times \text{tab}(1) = 0,68268
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\Pr(|X-\mu| \leq 1,96\sigma) &= \Pr(-1,96\sigma \leq X - \mu \leq 1,96\sigma) \\
&= \Pr\left(-1,96\frac{\sigma}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1,96\frac{\sigma}{\sigma}\right) \\
&= \Pr(-1,96 \leq Z \leq 1,96) \\
&= 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 1,96) \\
&= 2 \times \text{tab}(1,96) = 0,95
\end{aligned}
$$

(d)

$$\begin{aligned}
&\Pr(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 0,99 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \\
&\Pr(-k \leq Z \leq k) = 0,99 \Longleftrightarrow \\
&\Pr(0 \leq Z \leq k) = 0,495 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}(k) = 0,495 \Longleftrightarrow \\
&k = 2,58
\end{aligned}$$

(e) Deve-se notar aqui o seguinte fato; como a probabilidade à direita de k é 0,90, maior que 0,5, então k tem de estar à esquerda da média. Veja a **Figura 15.9**.

$$\begin{aligned}
&\Pr(X > k) = 0,90 \Leftrightarrow \\
&\Pr(X \leq k) = 0,10 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq -\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq \frac{\mu-k}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu-k}{\sigma}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{\mu-k}{\sigma}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \\
&\frac{\mu-k}{\sigma} = 1,28 \Leftrightarrow \\
&\mu - k = 1,28\sigma \Leftrightarrow k = \mu - 1,28\sigma
\end{aligned}$$

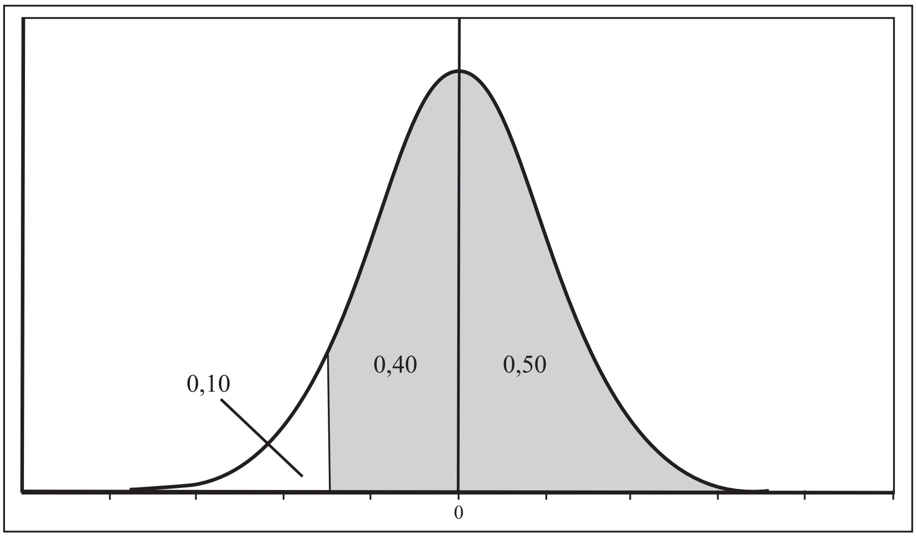

Figura 15.9: Solução do Exercício 15.1.

2. O aparelho a ser usado tem que ser aquele que apresenta a maior probabilidade de funcionar pelo menos durante o tempo necessário.

   Caso 1: O tempo necessário é de 45 horas.

$$
\begin{aligned}
\Pr(D_1 \geq 45) &= \Pr\left(\frac{D_1 - 42}{6} \geq \frac{45 - 42}{6}\right) \\
&= \Pr(Z \geq 0,5) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 0,5) \\
&= 0,5 - \mathrm{tab}(0,5) \\
&= 0,3085
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(D_2 \geq 45) &= \Pr\left(\frac{D_2 - 45}{3} \geq \frac{45 - 45}{3}\right) \\
&= \Pr(Z \geq 0) = 0,5
\end{aligned}
$$

   Logo, o aparelho 2 tem maior probabilidade de funcionar durante as 45 horas necessárias e, por isso, nesse caso, deve ser o escolhido.

Caso 2: O tempo necessário é de 49 horas.

$$
\begin{aligned}
\Pr(D_1 \geq 49) &= \Pr\left(\frac{D_1 - 42}{6} \geq \frac{49 - 42}{6}\right) \\
&= \Pr(Z \geq 1,17) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,17) \\
&= 0,5 - \text{tab}(1,17) = 0,1210
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(D_2 \geq 49) &= \Pr\left(\frac{D_2 - 45}{3} \geq \frac{49 - 45}{3}\right) \\
&= \Pr(Z \geq 1,33) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,33) \\
&= 0,5 - \text{tab}(1,33) = 0,0918
\end{aligned}
$$

Logo, o aparelho 1 tem maior probabilidade de funcionar durante as 49 horas necessárias e, portanto, deve ser o escolhido nesse caso.

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X < 45) = 0,31 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{45 - \mu}{\sigma}\right) = 0,31 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{45 - \mu}{\sigma}\right) = 0,31 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > -\frac{45 - \mu}{\sigma}\right) = 0,31 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{\mu - 45}{\sigma}\right) = 0,31 \Rightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - 45}{\sigma}\right) = 0,19 \Rightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{\mu - 45}{\sigma}\right) = 0,19 \Rightarrow \\
&\frac{\mu - 45}{\sigma} = 0,5 \qquad (15.2)
\end{aligned}
$$

Note que a abscissa $\frac{45-\mu}{\sigma}$ tem de ser negativa, daí a inversão de sinal!

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X > 64) = 0,08 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{64-\mu}{\sigma}\right) = 0,08 \Rightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{64-\mu}{\sigma}\right) = 0,42 \Rightarrow \\
&\mathrm{tab}\left(\frac{64-\mu}{\sigma}\right) = 0,42 \Rightarrow \\
&\frac{64-\mu}{\sigma} = 1,41
\end{aligned} \tag{15.3}
$$

Temos duas equações e duas incógnitas. Da primeira equação tiramos que:

$$\mu = 45 + 0,5\sigma$$

Substituindo na segunda, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{64-(45+0,5\sigma)}{\sigma} &= 1,41 \Rightarrow \\
64 - 45 - 0,5\sigma &= 1,41\sigma \Rightarrow \\
1,91\sigma &= 19 \Rightarrow \sigma \simeq 10
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$\mu = 45 + 0,5 \times 10 = 50$$

4. Seja X = número de unidades vendidas. Então, $X \sim N(500, 50^2)$. Se a empresa fabricou 600 unidades no mês em estudo, a probabilidade de não poder atender à demanda é

$$
\begin{aligned}
\Pr(X > 600) &= \Pr\left(\frac{X-500}{50} > \frac{600-500}{50}\right) \\
&= \Pr(Z > 2) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2) \\
&= 0,5 - \mathrm{tab}(2) = 0,0228
\end{aligned}
$$

5. Seja $X =$ peso do saco em kg. Então, $X \sim N(50; 1,6^2)$.

   (a) Para um saco qualquer, a probabilidade de se pagar indenização é

$$\begin{aligned}\Pr(X < 48) &= \Pr\left(\frac{X-50}{1,6} < \frac{48-50}{1,6}\right) \\ &= \Pr(Z < -1,25) \\ &= \Pr(Z > 1,25) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,25) \\ &= 0,5 - \text{tab}(1,25) = 0,1056\end{aligned}$$

   Seja $Y =$ número de sacos, em um conjunto de 200, com peso menor que 48kg. Então, $T \sim bin(200; 0,1056)$ e o número médio de sacos com peso menor que 48 é $200 \times 0,1056$ e a indenização total será de $5 \times 200 \times 0,1056 = 105,6$ u.m.

   (b) Para reduzir o custo para 50 u.m. temos de ter

$$5 \times 200 \times \Pr(\text{pagar indenização em um saco}) = 50 \Rightarrow$$

$$\Pr(X < 48) = 0,05$$

   Mas

$$\begin{aligned}&\Pr(X < 48) = 0,05 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(\frac{X-\mu}{1,6} < \frac{48-\mu}{1,6}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(Z < \frac{48-\mu}{1,6}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(Z > -\frac{48-\mu}{1,6}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu-48}{1,6}\right) = 0,45 \Leftrightarrow \\ &\text{tab}\left(\frac{\mu-48}{1,6}\right) = 0,45 \Leftrightarrow \\ &\frac{\mu-48}{1,6} = 1,64 \Leftrightarrow \mu = 50,624 \text{ kg}\end{aligned}$$

   Veja a **Figura 15.10** para ilustração das probabilidades envolvidas:

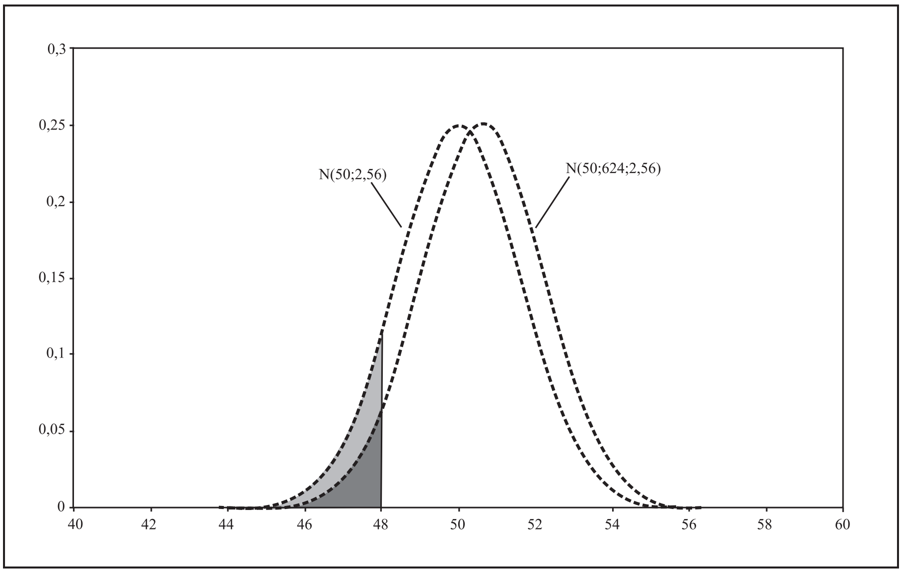

Figura 15.10: Solução do Exercício 15.5 - letras (a) e (b).

(c) Com a média fixada em 50, o que se pretende agora é controlar a variabilidade do processo, medida pelo desvio padrão, ou seja, o peso dos pacotes agora é $X \sim N(50, \sigma^2)$. A regra para indenização continua a mesma; logo,

$$\begin{aligned}
&\Pr(X < 48) = 0,03 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-50}{\sigma} < \frac{48-50}{\sigma}\right) = 0,03 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z < -\frac{2}{\sigma}\right) = 0,03 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{2}{\sigma}\right) = 0,03 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,47 \Leftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0,47 \Leftrightarrow \\
&\frac{2}{\sigma} = 1,88 \Leftrightarrow \sigma = 1,064
\end{aligned}$$

Na **Figura 15.11** temos o gráfico que ilustra as 2 probabilidades.

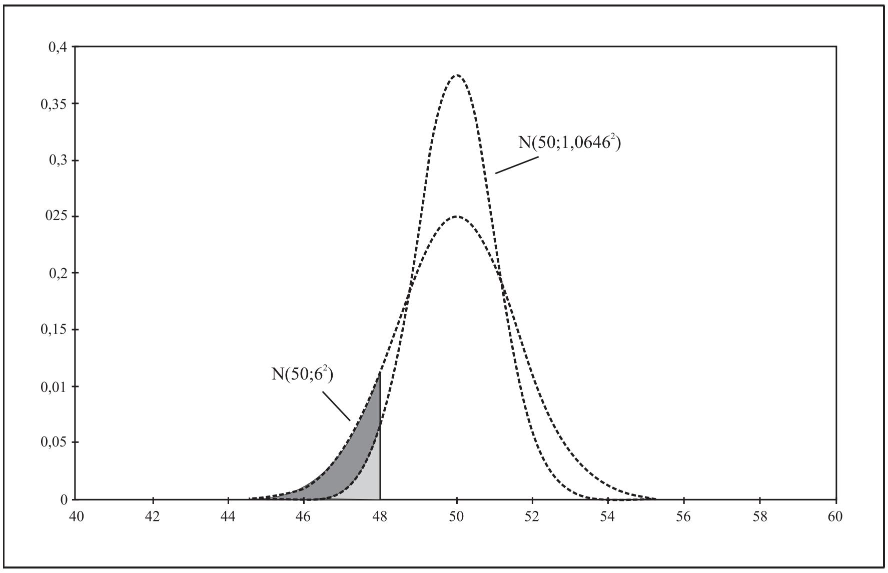

Figura 15.11: Solução do Exercício 15.5 - letra (c).

6. Seja T = tempo de execução, em minutos. Então, $T \sim N(90, 20^2)$.

   (a)

$$\begin{aligned}
\Pr(T \leq 80) &= \Pr\left(\frac{T-90}{20} \leq \frac{80-90}{20}\right) \\
&= \Pr(Z \leq -0,5) \\
&= \Pr(Z \geq 0,5) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 0,5) \\
&= 0,5 - \text{tab}(0,5) = 0,3085
\end{aligned}$$

   (b) Os melhores têm de ter tempo menor, ou seja, queremos determinar k tal que

$$\begin{aligned}
&\Pr(T \leq k) = 0,05 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{T-90}{20} \leq \frac{k-90}{20}\right) = 0,05 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z \leq \frac{k-90}{20}\right) = 0,05 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq -\frac{k-90}{20}\right) = 0,05 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z \geq \frac{90-k}{20}\right) = 0,05 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{90-k}{20}\right) = 0,45 \Rightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{90-k}{20}\right) = 0,45 \Rightarrow \\
&\frac{90-k}{20} = 1,64 \Rightarrow k = 57,2
\end{aligned}$$

Então, para fazer jus ao certificado especial, o candidato tem de executar a tarefa em, no máximo, 57,2 minutos.

7. Seja $D =$ diâmetro dos rolamentos de esfera. Então, $D \sim N(0,6140; 0,0025^2)$.

   Vamos denotar por B, R e F os eventos "esfera boa", "esfera recuperável" e "esfera defeituosa", respectivamente.

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr(0,610 < D < 0,618) \\
&= \Pr\left(\frac{0,610-0,614}{0,0025} < \frac{D-0,614}{0,0025} < \frac{0,618-0,614}{0,0025}\right) \\
&= \Pr(-1,6 < Z < 1,6) \\
&= 2 \times \Pr(0 \leq Z < 1,6) = 2 \times \text{tab}(1,6) = 0,8904
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(R) &= \Pr\left[(0,608 < D < 0,610) \cup (0,618 < D < 0,620)\right] \\
&= \Pr(0,608 < D < 0,610) + \Pr(0,618 < D < 0,620) \\
&= \Pr\left(\frac{0,608-0,614}{0,0025} < \frac{D-0,614}{0,0025} < \frac{0,610-0,614}{0,0025}\right) + \\
&= \Pr\left(\frac{0,618-0,614}{0,0025} < \frac{D-0,614}{0,0025} < \frac{0,620-0,614}{0,0025}\right) \\
&= \Pr(-2,4 < Z < -1,6) + \Pr(1,6 < Z < 2,4) \\
&= 2 \times \Pr(1,6 < Z < 2,4) \\
&= 2 \times [\text{tab}(2,4) - \text{tab}(1,6)] \\
&= 2 \times [0,4918 - 0,4452] = 0,0932
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(F) &= \Pr[(D < 0,608) \cup (D > 0,620)] \\
&= \Pr(D < 0,608) + \Pr(D > 0,620) \\
&= \Pr\left(\frac{D-0,614}{0,0025} < \frac{0,608-0,614}{0,0025}\right) + \Pr\left(\frac{D-0,614}{0,0025} > \frac{0,620-0,614}{0,0025}\right) \\
&= \Pr(Z < -2,4) + \Pr(Z > 2,4) \\
&= 2 \times \Pr(Z > 2,4) \\
&= 2 \times [0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2,4)] \\
&= 2 \times [0,5 - \text{tab}(2,4)] = 0,0164
\end{aligned}$$

Com relação ao lucro, temos a seguinte fdp

t	0,10	0,05	-0,10
$\Pr(T=t)$	0,8904	0,0932	0,0164

Logo,

$$E(T) = 0,10 \times 0,8904 + 0,05 \times 0,0932 - 0,10 \times 0,0164 = 0,09206$$

8. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

T_A : tempo, em meses, para ocorrência de defeito nos televisores tipo A

T_B : tempo, em meses, para ocorrência de defeito nos televisores tipo B

L_A : lucro com televisores tipo A

L_B : lucro com televisores tipo B

Temos que

$$\begin{aligned} T_A &\sim N(9, 2^2) \\ T_B &\sim N(12, 3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(T_A > 6) &= \Pr\left(\frac{T_A - 9}{2} > \frac{6-9}{2}\right) \\ &= \Pr(Z > -1,5) \\ &= \Pr(-1,5 < Z < 0) + \Pr(Z \geq 0) = \\ &= \Pr(0 < Z < 1,5) + 0,5 \\ &= \text{tab}(1,5) + 0,5 = 0,9332 \end{aligned}$$

Logo, para os televisores do tipo A, a probabilidade de restituição por defeito grave é $1 - 0,9332 = 0,0668$.

$$\begin{aligned} \Pr(T_B > 6) &= \Pr\left(\frac{T_B - 12}{3} > \frac{6-12}{3}\right) \\ &= \Pr(Z > -2,0) \\ &= \Pr(-2,0 < Z < 0) + \Pr(Z \geq 0) = \\ &= \Pr(0 < Z < 2,0) + 0,5 \\ &= \text{tab}(2,0) + 0,5 = 0,9772 \end{aligned}$$

Logo, para os televisores do tipo B, a probabilidade de restituição por defeito grave é $1 - 0,9772 = 0,0228$. Com esses resultados obtemos as seguintes distribuições para os lucros:

x	1000	-3000
$\Pr(L_A = x)$	0,9332	0,0668

x	2000	-8000
$\Pr(L_B = x)$	0,9772	0,0228

Logo, os lucros médios são:

$$\begin{aligned} E(L_A) &= 1000 \times 0,9332 - 3000 \times 0,0668 = 732,8 \\ E(L_B) &= 2000 \times 0,9772 - 8000 \times 0,0228 = 1772 \end{aligned}$$

Como o lucro esperado (lucro médio) com os televisores do tipo B é maior, deve-se investir nas vendas desse tipo de televisor.

9. Defina a v.a. X = peso dos coelhos. Então, $X \sim N(5; 0,8^2)$.

   Vamos denotar por a, b e c os limites para as classes de peso. Então

$$\begin{aligned} &\Pr(X < a) = 0,20 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(\frac{X-5}{0,8} < \frac{a-5}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(Z < \frac{a-5}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(Z > -\frac{a-5}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(Z > \frac{5-a}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow \\ &\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{5-a}{0,8}\right) = 0,30 \Leftrightarrow \\ &\text{tab}\left(\frac{5-a}{0,8}\right) = 0,30 \Leftrightarrow \\ &\frac{5-a}{0,8} = 0,84 \Leftrightarrow a = 4,328 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr(X < b) = 0,75 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-5}{0,8} < \frac{b-5}{0,8}\right) = 0,75 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{b-5}{0,8}\right) = 0,75 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{b-5}{0,8}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{b-5}{0,8}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \\
&\frac{b-5}{0,8} = 0,67 \Leftrightarrow b = 5,536
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr(X < c) = 0,90 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-5}{0,8} < \frac{c-5}{0,8}\right) = 0,90 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{c-5}{0,8}\right) = 0,90 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{c-5}{0,8}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{c-5}{0,8}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \\
&\frac{c-5}{0,8} = 1,28 \Leftrightarrow c = 6,024
\end{aligned}$$

Os coelhos são classificados como pequenos se o peso for menor que 4,328kg; como médios se o peso estiver entre 4,328 e 5,536kg; como grandes se o peso estiver entre 5,536 e 6,024kg e como extragrandes se o preso for maior que 6,024kg.

10. $X \sim N(3, 25)$:

(a)

$$\begin{aligned}
\Pr\left(-3 \leq X \leq 3\right) &= \Pr\left(\frac{-3-3}{5} \leq \frac{X-3}{5} \leq \frac{3-3}{5}\right) \\
&= \Pr(-1,2 \leq Z \leq 0) \\
&= \Pr(0 \leq Z \leq 1,2) \\
&= \text{tab}(1,2) = 0,38493
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr(-2 \leq X \leq 8) &= \Pr\left(\frac{-2-3}{5} \leq \frac{X-3}{5} \leq \frac{8-3}{5}\right) \\
&= \Pr(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= \Pr(-1 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 2 \times \text{tab}(1,0) = 0,68268
\end{aligned}$$

(c) Note que k tem de ser maior que a média.

$$\begin{aligned}
&\Pr(X > k) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-3}{5} > \frac{k-3}{5}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{k-3}{5}\right) = 0,05 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{5}\right) = 0,45 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{k-3}{5}\right) = 0,45 \Longleftrightarrow \\
&\frac{k-3}{5} = 1,64 \Longleftrightarrow k = 11,2
\end{aligned}$$

(d) Note que k tem de ser menor que a média.

$$\begin{aligned}
&\Pr(X > k) = 0,80 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-3}{5} > \frac{k-3}{5}\right) = 0,80 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{k-3}{5}\right) = 0,80 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{k-3}{5} \leq Z \leq 0\right) + \Pr(Z > 0) = 0,80 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq -\frac{k-3}{5}\right) + 0,5 = 0,80 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{3-k}{5}\right) = 0,30 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{3-k}{5}\right) = 0,30 \\
&\frac{3-k}{5} = 0,84 \Longleftrightarrow k = -1,2
\end{aligned}$$

11. Como a distribuição normal é simétrica, resulta que $Q_2 = \mu$ (a média, a mediana e a moda sempre coincidem numa distribuição simétrica unimodal).

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X < Q_1) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{Q_1-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{Q_1-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > -\frac{Q_1-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{\mu-Q_1}{\sigma}\right) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \le Z \le \frac{\mu-Q_1}{\sigma}\right) = 0,5 - 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{\mu-Q_1}{\sigma}\right) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\frac{\mu-Q_1}{\sigma} = 0,67 \Longleftrightarrow \\
&Q_1 = \mu - 0,67\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X > Q_3) = 0,25 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{Q_3-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{Q_3-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \le Z \le \frac{Q_3-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{Q_3-\mu}{\sigma}\right) = 0,25 \Longleftrightarrow \\
&\frac{Q_3-\mu}{\sigma} = 0,67 \Longleftrightarrow \\
&Q_3 = \mu + 0,67\sigma
\end{aligned}
$$

Logo,

$$IQ = Q_3 - Q_1 = (\mu + 0,67\sigma) - (\mu - 0,67\sigma) = 1,34\sigma$$

12. Temos que $P_{90} = 50$ e $P_{15} = 25$. Logo, a média tem de estar entre 25 e 50.

$$\begin{aligned}
P_{90} &= 50 \Rightarrow \\
\Pr(X &< 50) = 0,90 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0,90 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0,90 \Rightarrow \\
&\Pr(Z \leq 0) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0,90 \Rightarrow \\
&0,5 + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0,90 \Rightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0,40 \Rightarrow \\
&\mathrm{tab}\left(\frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0,40 \Rightarrow \\
&\frac{50-\mu}{\sigma} = 1,25 \Rightarrow \\
&\mu = 50 - 1,25\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{15} &= 25 \Rightarrow \\
\Pr(X &< 25) = 0,15 \Rightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,15 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,15 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > -\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0,15 \Rightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{\mu-25}{\sigma}\right) = 0,15 \Rightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu-25}{\sigma}\right) = 0,35 \Rightarrow \\
&\mathrm{tab}\left(\frac{\mu-25}{\sigma}\right) = 0,35 \Rightarrow \\
&\frac{\mu-25}{\sigma} = 1,04 \Rightarrow \\
&\mu = 25 + 1,04\sigma
\end{aligned}$$

Temos um sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} \mu = 50 - 1,25\sigma \\ \mu = 25 + 1,04\sigma \end{cases}$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned} 50 - 1,25\sigma &= 25 + 1,04\sigma \Longrightarrow \\ 25 &= (1,25 + 1,04)\,\sigma \Longrightarrow \sigma = 10,92 \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu = 50 - 1.25 \times 10.92 = 36,35$$

13. Seja X = "conteúdo da garrafa (em ml)". Então, $X \sim N(1000;\sigma^2$. Queremos que $\Pr(X < 990) \leq 0,01$. Seja σ_0 o valor do desvio padrão de X tal que $\Pr(X < 990) = 0,01$. Então, qualquer valor de σ tal que $\sigma < \sigma_0$ resulta em $\Pr(X < 990) < 0,01$. Veja a **Figura 15.12**; a cauda inferior da distribuição corresponde a $\Pr(X < 990)$ e quanto menor σ, menor essa probabilidade.

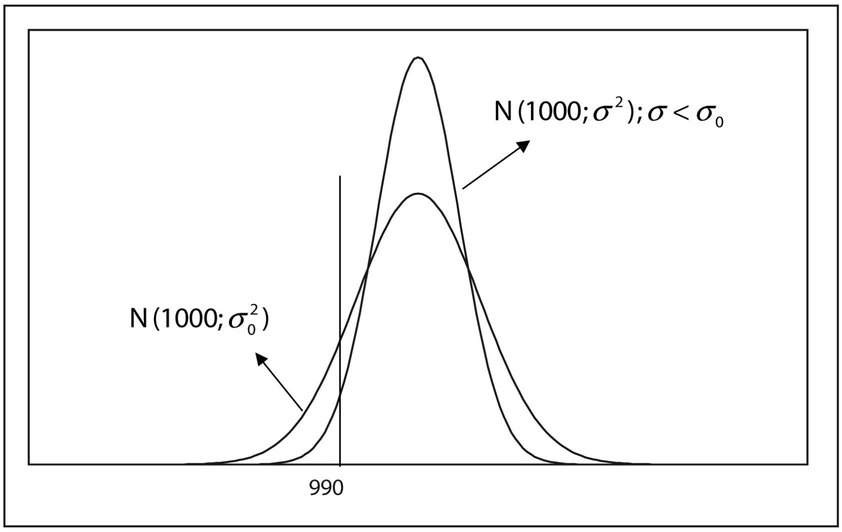

Figura 15.12

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X < 990) \leq 0,01 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(\frac{X - 1000}{\sigma} < \frac{990 - 1000}{\sigma}\right) \leq 0,01 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z < \frac{990 - 1000}{\sigma}\right) \leq 0,01 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > -\frac{990 - 1000}{\sigma}\right) \leq 0,01 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(Z > \frac{10}{\sigma}\right) \leq 0,01 \Longleftrightarrow \\
&\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.5 - 0.01 = 0,49 \Longleftrightarrow \\
&\mathrm{tab}\left(\frac{10}{\sigma}\right) \geq 0,49 \Longleftrightarrow \\
&\frac{10}{\sigma} \geq 2,33 \Longleftrightarrow \\
&\sigma \leq \frac{10}{2.33} = 4,2918
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] ANDERSON, David R.; SWEENEY, Dennis J.; WILLIAMS, Thomas A. *Estatística Aplicada à Administração e à Economia*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002

[2] MOORE, David S.; McCabe, George P.; DUCKWORTH, William M.; SCLOVE, Stanley L. *A Prática da Estatística Empresarial – Como Usar Dados para Tomar Decisões*. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006

[3] MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. *Estatística Básica*, 5a Edição. São Paulo: Saraiva, 2006

[4] TRIOLA, Mario F. *Introdução à Estatística*, 9a. Edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2005