

# PLANEJAMENTO FATORIAL 2<sup>3</sup>

# 12 aula

## META

Mostrar aos alunos que os planejamentos fatoriais podem ser expandidos com respeito ao número de fatores

## OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:  
elaborar um planejamento fatorial 2<sup>3</sup>, definindo as variáveis e respostas;  
planejar os experimentos;  
calcular os efeitos principais e de interação através das médias e do algoritmo da matriz-vetores

## PRÉ-REQUISITOS

Planejamento fatorial 2<sup>2</sup>:  
elaboração e interpretação.

Tabela 1. Planejamento fatorial

Ensaio	Concentração (M)	Tipo de ácido	Volume (mL)	Tempo (h)
1	15	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	15	12
2	25	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	15	12
3	15	HCl	15	12
4	25	HCl	15	12
5	15	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	25	12
6	25	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	25	12
7	15	HCl	25	12
8	25	HCl	25	12
9	15	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	15	36
10	25	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	15	36
11	15	HCl	15	36
12	25	HCl	15	36
13	15	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	25	36
14	25	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	25	36
15	15	HCl	25	36
16	25	HCl	25	36
17	20	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	20	24
18	20	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	20	24
19	20	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	20	24
20	20	HCl	20	24
21	20	HCl	20	24
22	20	HCl	20	24

Planejamento fatorial três variáveis e dois níveis - reprodução  
(Fonte: <http://www.chemkeys.com>).

Considere que um pesquisador fez um planejamento fatorial  $2^2$  e, ao conhecer melhor o problema, verificou que há outra(s) variável(is) que pode(m) ser relevante(s). Uma característica importante dos planejamentos fatoriais é que eles podem ser

## INTRODUÇÃO

expandidos ou mesmo contraídos em relação aos fatores, ou seja, experimentos adicionais podem ser realizados para desvendar o efeito de outras variáveis. Esta é uma característica versátil, que possibilita a reavaliação dos resultados ao final do processo e a ampliação do estudo sem a necessidade de refazer toda a série de experimentos.

Tabela 3-Planejamento fatorial  $2^3$  para otimização das condições de degradação do corante Laranja Reativo 16 por processo envolvendo ferro metálico (Resposta: % de degradação do corante avaliada por espectroscopia UV-Vis)

Variável	Nível (-)	Nível (0)	Nível (+)
pH	2	3	4
[H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> ] mg L <sup>-1</sup>	0	50	100
[Fe <sup>0</sup> ] g L <sup>-1</sup>	0	0,5	1,0

Experimento	Variáveis			Resposta
	H <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	Fe <sup>0</sup>	pH	
1	-	-	-	3
2	+	-	-	5
3	-	+	+	56
4	+	+	-	96
5	-	-	+	1
6	+	-	+	1
7	-	+	+	5
8	+	+	+	14
9	0	0	0	86
10	0	0	0	83
11	0	0	0	85

Efeitos principais: H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>:  $(-3+5-56+96-1+1+5+14)/4 = 13 \pm 1,5$   
 [Fe<sup>0</sup>]:  $(-3-5+56+96-1-1+5+14)/4 = 40 \pm 1,5$   
 pH:  $(-3-5-56-96+1+1+5+14)/4 = -35 \pm 1,5$   
 Efeito de segunda ordem: H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> x [Fe<sup>0</sup>]:  $(+3-5-56+96+1-1+5+14)/4 = 12 \pm 1,5$   
 [Fe<sup>0</sup>] x pH:  $(+3+5-56-96-1-1+5+14)/4 = -32 \pm 1,5$

Planejamento fatorial 2<sup>3</sup> para otimização das condições de degradação do corante - reprodução (Fonte: <http://www.scielo.br>).

Vamos supor que no estudo realizado do efeito do catalisador e da temperatura sobre o rendimento de uma reação (nosso exemplo da aula anterior), chegue-se à conclusão de que o tempo de reação também seja uma variável importante. No primeiro planejamento havíamos fixado o tempo reacional em 5 horas, pois estávamos interessados em acessar apenas os efeitos de catalisador e de temperatura. Havia dados prévios que sugeriam que 5 horas seriam suficientes para o progresso da reação, mas, ocorreu que, durante a realização da série de experimentos, alguns deles tiveram que ser refeitos, pois a pessoa se atrasou e acabou interrompendo a reação em tempos mais longos. Porém, como se tratava de uma pessoa curiosa, acabou fazendo a determinação da quantidade formada do produto para poder comparar depois com o ensaio originalmente planejado, pois não era uma etapa trabalhosa. Ao final, comparando o resultado das repetições feitas no tempo de 5 horas com aquele ensaio que acabou ficando mais tempo, percebeu que o resultado era diferente, ou seja, aparentemente sofrendo um efeito do tempo.

É preciso deixar claro que um planejamento fatorial já pode ter início com mais de 2 fatores, ou seja, não necessariamente tem que se começar por um planejamento  $2^2$  para depois incluir outras variáveis. Assim sendo, nosso experimentalista planejou a expansão do planejamento inicial para incluir o fator tempo e, com isso, o planejamento passou a ser do tipo  $2^3$ , com 8 ensaios.

**PLANEJAMENTO  $2^3$**

PLANEJAMENTO 2<sup>3</sup>

Fatores	Níveis	
	(+)	(+)
Temperatura (T)	40	80
Tempo (H)	5	15
Catalisador (C)	A	B

A tabela de planejamento foi modificada acrescentando-se mais quatro linhas e mais uma coluna. Nesta coluna adicional são incluídos os níveis da variável adicional: nível baixo nas quatro primeiras linhas e nível alto nas quatro últimas. Nas duas primeiras colunas, os níveis presentes nas quatro primeiras linhas são replicados nas quatro seguintes.

	T	C	H	Rendimento (%)		Média y
1	-	-	-	59(6)	61(13)	60
2	+	-	-	74(2)	70(4)	72
3	-	+	-	50(1)	58(16)	54
4	+	+	-	69(5)	67(10)	68
5	-	-	+	50(8)	54(12)	52
6	+	-	+	81(9)	85(14)	83
7	-	+	+	46(3)	44(11)	45
8	+	+	+	79(7)	81(15)	80

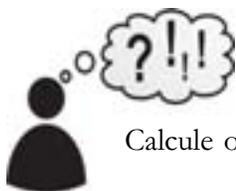
Obs.: os números entre parênteses correspondem à ordem de realização dos ensaios.

Como os experimentos do planejamento 2<sup>2</sup> foram feitos usando-se o tempo de 5h (nível (-)), os ensaios 1 a 4 já estão prontos. Será necessário realizar os ensaios 5-8. Aqui também é preciso que fique claro que, se o nível (-) do tempo no novo planejamento 2<sup>3</sup> for diferente de 5h, todos os ensaios do planejamento 2<sup>3</sup> terão que ser feitos.

## CÁLCULO DOS EFEITOS

Para calcularmos os efeitos principais, vamos exemplificar com a temperatura. Para termos acesso a este efeito, precisamos fazer a diferença entre os resultados de ensaios que tenham os níveis idênticos para as demais variáveis e que tenham níveis diferentes de temperatura (fazendo sempre o ensaio com nível (+) de temperatura menos o ensaio com nível (-)). Por exemplo, os ensaios 1 e 2 têm ambos níveis (-) de catalisador e de tempo. Assim, fazemos a subtração das respostas médias para estes ensaios. Repetimos esta operação para os pares de ensaios 3 e 4, 5 e 6, 7 e 8. Depois fazemos a médias destes quatro valores e teremos o efeito principal da temperatura. Veja o resultado disso na tabela abaixo.

Varição no rendimento devido à mudança de temperatura	Tempo (H)	Catalisador (C)
$y_2 - y_1 = 72 - 60 = 12$	5	A
$y_4 - y_3 = 68 - 54 = 14$	15	A
$y_5 - y_6 = 83 - 52 = 31$	5	B
$y_8 - y_7 = 80 - 45 = 35$	15	B
<b>Efeito principal T = 23</b>		



## ATIVIDADES

Calcule os efeitos principais do catalisador e do tempo.

### a) Catalisador

Para calcularmos o efeito do catalisador, precisamos fazer a diferença dos rendimentos médios de ensaios que tenham mesmos níveis de temperatura e tempo, mas níveis distintos de catalisador e depois fazer a média. Estes ensaios são: 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8.

Varição no rendimento devido à mudança de catalisador	Tempo (H)	Temperatura (T)
$y_3 - y_1 = 54 - 60 = -6$	5	40
$y_4 - y_2 = 68 - 72 = -4$	5	80
$y_7 - y_5 = 45 - 54 = -7$	15	40
$y_8 - y_6 = 80 - 83 = -3$	15	80
<b>Efeito principal C = -5</b>		

### b) Tempo

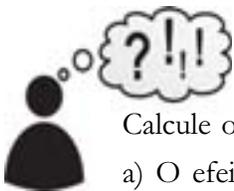
Para o efeito do tempo, precisamos calcular a média das diferenças entre os rendimentos médios dos seguintes pares de ensaios: 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8.

Varição no rendimento devido à mudança de tempo	Temperatura (T)	Catalisador (C)
$y_5 - y_1 = 52 - 60 = -8$	40	A
$y_6 - y_2 = 83 - 72 = 11$	80	A
$y_7 - y_3 = 45 - 54 = -9$	40	B
$y_8 - y_4 = 80 - 68 = 12$	80	B
<b>Efeito principal H = 1,5</b>		

## CÁLCULO DOS EFEITOS DE INTERAÇÃO

Para obter o efeito de temperatura e catalisador, por exemplo, ao invés de olharmos para o efeito principal da temperatura (que é uma média) vamos comparar os efeitos da temperatura variando-se o tempo para um mesmo catalisador. Vamos ver que o efeito da temperatura depende do tempo reacional, para o mesmo catalisador. Fazemos a média dos efeitos observados para ambos catalisadores e, em seguida, a diferença entre as médias. Isto é exemplificado abaixo.

Catalisador (C)	Efeito médio da temperatura
(+)B	33
(-)A	13
diferença	20
<b>TxC</b>	$20/2=10$



### ATIVIDADES

Calcule os efeitos de interação TC e CH.

- a) O efeito de interação tempo-catalisador é calculado fazendo-se a média dos efeitos de temperatura para tempos iguais:

TEmpo (H)	Efeito médio da temperatura
(+)	24,5
(-)	21,5
diferença	3
<b>TxH</b>	$3/2=1,5$

b) efeito catalisador-tempo

<b>TEmpo (H)</b>	<b>Efeito médio do catalisador</b>
(+)	-5
(-)	-5
diferença	0
<b>CxH</b>	$0/2=0$

Examinando os efeitos de interação, podemos chegar à conclusão de que a interação temperatura-tempo é mais significativa do que as interações entre o tipo de catalisador e a temperatura, bem como o tipo de catalisador e o tempo, que foi nulo.

### USANDO MATRIZ-VETORES

Para calcularmos os efeitos em um planejamento fatorial  $2^3$ , tivemos um trabalho mais razoável do que para o fazermos para o planejamento  $2^2$ . Neste caso, o uso do algoritmo matricial é bem-vindo. Vamos ver como seria seu uso. Inicialmente precisamos construir uma matriz semelhante àquela que vimos na última aula, porém com ordem  $8 \times 8$ . A primeira coluna terá somente sinais positivos e as três colunas seguintes são as próprias colunas da tabela do planejamento, que nos permitirão calcular os efeitos principais dos fatores 1, 2 e 3. As quatro colunas seguintes serão as colunas dos efeitos de interação dois a dois: 12, 13 e 23. Conseqüentemente, seus sinais serão a multiplicação dos sinais das respectivas colunas de efeitos principais, ou seja, para a coluna 12 faremos a multiplicação dos sinais das colunas 1 e 2 e assim por diante. A última coluna será a multiplicação dos sinais das três colunas de efei-

tos principais: 1,2 e 3, correspondendo, portanto, ao efeito de interação ternário.

$$\begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 72 \\ 54 \\ 68 \\ 52 \\ 83 \\ 45 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 514 \\ 92 \\ -20 \\ 6 \\ 6 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64,25 \\ 23,0 \\ -5,0 \\ 1,5 \\ 1,5 \\ 10,0 \\ 0,0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Com o algoritmo, cada efeito será calculado de forma análoga ao que foi feito no caso do planejamento 2<sup>2</sup>, ou seja, multiplicamos a coluna correspondente pela matriz das respostas e neste caso dividimos o resultado por 4.

**Tabela 1.** Matriz de planejamento experimental segundo planejamento fatorial simples 2<sup>3</sup>, com repetição

Experimentos	Níveis das Variáveis		
	Concentração de Íons	Tempo de Agitação	Massa do Trocador
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Matriz de planejamento experimental – reprodução (Fonte: <http://www.scielo.br>).

Podemos concluir que além de propiciar uma maneira de variar todas as variáveis simultânea e organizadamente, os planejamentos fatoriais são altamente versáteis, propiciando que ao final de um planejamento com poucas variáveis o estudo possa ser

## CONCLUSÃO

expandido para um número maior de variáveis, sem perder os ensaios que já foram feitos. Esta é uma grande vantagem pois dispensa a necessidade de se começar sempre do zero. Ao mesmo tempo, os planejamentos podem ser feitos com mais variáveis desde o início e o valor dos efeitos principais nos permitem também avaliar quais as mais importantes e quais delas se combinam.

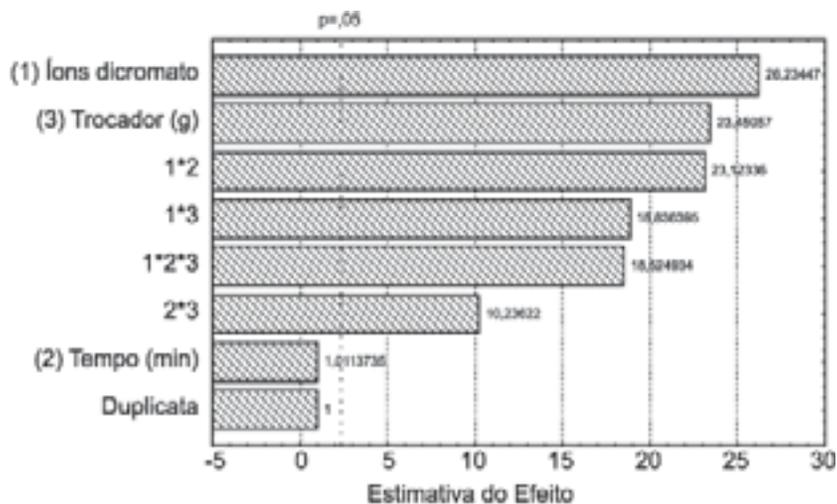


Figura 1. Pareto do teste t para o intervalo de confiança de 95%

Estimativa do Efeito – reprodução (Fonte: <http://www.scielo.br>).

## RESUMO



Nesta aula vamos acompanhar a aplicação de planejamentos fatoriais a um problema com um número maior de variáveis, no caso, 2<sup>3</sup>. Vale comentar que apenas vamos ilustrar isto, partindo de um planejamento do tipo 2<sup>2</sup> e expandindo-o para que se torne um planejamento 2<sup>3</sup>, mas que se pode começar o planejamento diretamente com 3, 4 ou 5 variáveis. Nas próximas aulas, contudo, veremos que um número muito grande de fatores traz uma série de limitações, mas deixemos cada problema para sua hora.

Considere que um pesquisador fez um planejamento fatorial 2<sup>2</sup> e, ao conhecer melhor o problema, verificou que há outra(s) variável(is) que pode(m) ser relevante(s). Uma característica importante dos planejamentos fatoriais é que eles podem ser expandidos ou mesmo contraídos em relação aos fatores, ou seja, experimentos adicionais podem ser realizados para desvendar o efeito de outras variáveis. Para aumentar o número de variáveis relevantes podemos aproveitar os ensaios que já foram feitos no planejamento inicial e incluir os ensaios que faltam. Por exemplo, se já estudamos o catalisador e a temperatura, mas agora queremos também estudar o efeito do tempo, consideramos com razão que esta variável havia sido mantida constante nos 4 primeiros ensaios. Os ensaios que faltam seriam uma réplica dos 4 primeiros em termos de catalisador e temperatura, mas agora seriam feitos em um tempo diferente. Claro que o pesquisador pode querer mudar tudo, estudando níveis diferentes para todos os fatores e, neste caso, teria de começar do zero.

Portanto, tanto a matriz de planejamento quanto o algoritmo matricial para o cálculo dos efeitos seguem um protocolo análogo ao do planejamento 2<sup>2</sup>. A diferença é que na hora de usar a matriz-vetores, precisamos dividir o resultado de cada soma por 4. Interessantemente é que no exemplo que escolhemos acabamos verificando que a variável que foi adicionada posteriormente acabou se mostrando pouco significativa, com um valor de efeito principal bastante baixo.

## PRÓXIMA AULA



Caro aluno, na próxima aula destacaremos a interpretação dos resultados do planejamento que mostramos aqui.

---

## SINERGISMO

Sinergismo é um efeito combinado de dois agentes que, quando sozinhos, têm um efeito muito menos pronunciado. Isto é observado comumente na farmacologia, quando, por exemplo, se existem dois fármacos que, quando administrados de forma conjunta, produzem um efeito resultante muito mais significativo do que uma simples soma dos efeitos isolados. Diz-se também que o efeito de um deles potencializa o outro.

---

## REFERÊNCIAS

- BOX, G. E. P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S. **Statistics for experimenters. An introduction to design, data analysis and model building.** New York: Wiley, 1978.
- BUSSAB, W. O.; MORETIN, P. A. **Estatística básica.** São Paulo: Ed. Atual, 1985.
- BARROS NETO, B.; SCARMINIO, I. E.; BRUNS, R. E. **Planejamento e otimização de experimentos.** Editora da Unicamp: Campinas, 1995.