

PLANEJAMENTO FATORIAL 2⁴

14
aula

META

Fornecer ao aluno alternativas para a estimativa dos erros experimentais em um fatorial 2⁴, na ausência de repetições.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:

- elaborar um planejamento fatorial 2⁴, definindo as variáveis e seus níveis;
- definir os experimentos;
- calcular os efeitos principais e os efeitos de interação de ordem 2, 3 e 4;
- analisar os valores dos efeitos e usar os efeitos de ordem alta para a estimativa do erro experimental;
- usar, alternativamente a repetições, os gráficos normais para a avaliação dos efeitos mais significativos.

PRÉ-REQUISITOS

Planejamentos fatoriais em geral; estimativa de erros nos planejamentos fatoriais.

Tabela I. Planejamento fatorial

Ensaio	Concentração (M)	Tipo de ácido	Volume (mL)	Tempo (h)
1	15	H ₂ SO ₄	15	12
2	25	H ₂ SO ₄	15	12
3	15	HCl	15	12
4	25	HCl	15	12
5	15	H ₂ SO ₄	25	12
6	25	H ₂ SO ₄	25	12
7	15	HCl	25	12
8	25	HCl	25	12
9	15	H ₂ SO ₄	15	36
10	25	H ₂ SO ₄	15	36
11	15	HCl	15	36
12	25	HCl	15	36
13	15	H ₂ SO ₄	25	36
14	25	H ₂ SO ₄	25	36
15	15	HCl	25	36
16	25	HCl	25	36
17	20	H ₂ SO ₄	20	24
18	20	H ₂ SO ₄	20	24
19	20	H ₂ SO ₄	20	24
20	20	HCl	20	24
21	20	HCl	20	24
22	20	HCl	20	24

Planejamento fatorial 2x4 - reprodução - (Fonte: <http://www.scielo.br>).

Neste ponto, vamos supor que uma última variável tivesse que ser incluída no planejamento fatorial de modo que ele se transformasse em um planejamento 2^4 . Assim, façamos de conta que a variável tempo não foi excluída e que vamos adicionar

INTRODUÇÃO

mais uma. Novamente ressaltamos que os planejamentos com diversas variáveis não devem necessariamente ser extensões de planejamentos mais simples, podendo, portanto, ser elaborados como planejamento original. Apenas os apresentamos aqui para ilustrar o processo de triagem de variáveis. Muito bem! Esclarecido novamente este ponto, vamos nesta aula verificar a elaboração deste tipo de planejamento, suas limitações e como devem ser tratados os dados.

Tabela 2. Efeitos do planejamento fatorial 2^4 , calculados com 95% de confiança

		Estimativa
M	Média global	85,8 ± 0,6
Efeitos principais		
CA	Concentração do ácido (%)	19,0 ± 1,3
TA	Tipo de ácido	-7,5 ± 1,3
VA	Volume de ácido (mL)	2,5 ± 1,3
T	Tempo de contato	-5,0 ± 1,3
Efeito de interação de dois fatores		
	CA x TA	12,4 ± 1,3
	CA x VA	0,1 ± 1,3
	CA x T	-5,4 ± 1,3
	TA x VA	6,6 ± 1,3
	TA x T	14,4 ± 1,3
	VA x T	-1,2 ± 1,3
Efeito de interação de três fatores		
123	CA x TA x VA	-1,3 ± 1,3
124	CA x TA x T	-3,6 ± 1,3
134	CA x VA x T	-2,5 ± 1,3
234	TA x VA x T	9,9 ± 1,3
Efeito de interação de quatro fatores		
	CA x TA x VA x T	0,6 ± 1,3
	t x s	5,5939

Planejamento fatorial 2^4 II- reprodução (Fonte: <http://www.scielo.br>)

Certamente neste ponto o aluno estará pensando que o planejamento do tipo 2⁴ nos obriga a realizar 16 ensaios, tendo já visto que nos planejamentos fatoriais completos o número de ensaios é dado por 2ⁿ, sendo *n* o número de variáveis. Se resolvermos seguir o que manda o figurino e fazer tudo em duplicata, acabaremos com 32 ensaios, que é um número muito elevado. Imagine que para a realização dos ensaios um equipamento muito caro deva ser usado, e que seu laboratório dispõe somente de uma unidade instrumental. Então, você vai ter que fazer 1 ensaio de cada vez. Se cada ensaio for demorado, isto implicaria em um tempo total proibitivo. A consequência disto é que, nestes tipos de planejamento, podemos abrir mão da realização de repetições e utilizar certos artifícios na hora de interpretar os dados como, por exemplo, usando os efeitos de interação de ordens altas ou alternativamente, a chamada análise por gráficos normais, como veremos adiante.

A elaboração do planejamento segue de acordo com os moldes vistos até agora, ou seja, começamos definindo as variáveis e seus respectivos os valores (níveis).

PLANEJAMENTO 2⁴

PLANEJAMENTO 2⁴

Fatores	Níveis	
	(-)	(+)
Temperatura: (T)	40	80
Tempo: (H)	5	15
Catalisador: (C)	A	B
pH	7,0	4,0

Em seguida, numeramos os ensaios e construímos uma tabela onde combinamos os sinais dos níveis alternadamente para cada fator. A tabela resultante vem a seguir.

Ensaio	T	H	C	pH	Rendimento(%)
1	-	-	-	-	54
2	+	-	-	-	85
3	-	+	-	-	49
4	+	+	-	-	62
5	-	-	+	-	64
6	+	-	+	-	94
7	-	+	+	-	56
8	+	+	+	-	70
9	-	-	-	+	52
10	+	-	-	+	87
11	-	+	-	+	49
12	+	+	-	+	64
13	-	-	+	+	64
14	+	-	+	+	94
15	-	+	+	+	58
16	+	+	+	+	73

RESULTADO

Os efeitos podem ser calculados pela matriz-vetores correspondente ao planejamento. Vamos omiti-la aqui por uma questão de espaço mas sua construção é análoga à dos planejamentos mais simples. É uma matriz 16x16, com a primeira coluna ocupada somente por sinais positivos, seguida pelas colunas dos efeitos principais das 4 variáveis, que são iguais às colunas da tabela de planejamento (tabela anterior). As demais colunas são correspondem aos efeitos conjuntos, cujos sinais são obtidos pela multiplicação dos sinais das colunas principais (colunas de cada variável). O resultado do cálculo dos efeitos é apresentado a seguir:

Média					
Y	67,188				
Efeitos Principais					
T	22,875	H	-14,125		
C	0,875	pH	0,875		
Efeitos de interação 2					
TH	-3,625	TC	-0,625	TpH	0,375
HC	-0,625	HpH	0,875	CpH	0,375
CpH	0,375				
Efeitos de interação 3					
THC	0,875	THpH	-0,125		
TCpH	-0,625	HCpH	0,375		
Efeitos de interação 4					
THCpH	0,375				

ESTIMATIVA DO ERRO

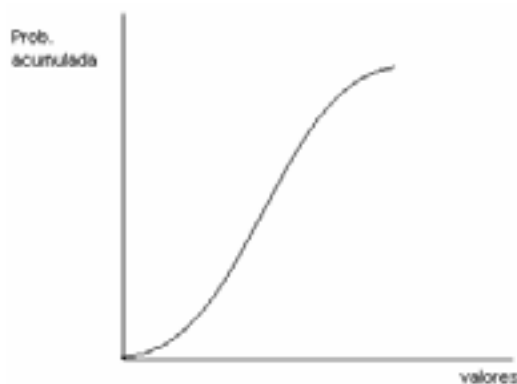
Para a estimativa do erro fazemos algumas considerações. Primeiramente, se compararmos os efeitos principais com os efeitos de ordem 2, 3 e 4, veremos que os efeitos de menor ordem tendem a ser mais significativos, ou seja, terem valores maiores. Por exemplo, os efeitos principais podem atingir valores até perto de 23, enquanto os efeitos de ordem 2 não passam de valores próximos a 9 (podemos ignorar o sinal aqui pois ele somente indica se o efeito é na direção de aumentar ou de diminuir o rendimento). Os efeitos de ordem 3 vão até no máximo 0,875 e o efeito de ordem 4 vai até 0,375. Com isso, uma suposição que vamos tentar fazer é de que o modelo possa ser descrito de modo razoavelmente satisfatório apenas incluindo os efeitos de ordem 1 e 2 e que os demais efeitos sejam usados para se fazer uma estimativa do erro experimental existente nos valores dos efeitos. Estes valores serão usados da seguinte maneira: assumindo que os efeitos de ordem 3 e 4 não existem, os valores calculados se devem às flutuações aleatórias inerentes ao processo. Se elevarmos cada um deles ao quadrado, teremos uma estimativa da variância de cada efeito e a média dos cinco valores fornece uma estimativa conjunta. Notem que entram todos os valores dos efeitos de ordem 3 e 4 ao quadrado.

$$V(\text{efeito}) = (1/5)[(0,875)^2 + \dots + (0,375)^2] = 0,54.$$

ANÁLISE POR GRÁFICOS NORMAIS

Suponha que uma dada variável aleatória tenha distribuição normal, com uma curva de distribuição em forma de sino. Lembre-se que, se considerarmos um determinado valor x_1 desta variável, a área da cauda à esquerda de x_1 representa a probabilidade acumulada do valor x_1 , ou seja, a probabilidade de que se observe um valor menor ou igual a x_1 . Uma observação importante é que à medida que x se desloca para a direita, a probabilidade aumenta, ou seja, a probabilidade cumulativa é uma função de x e tende a 1 (a área sob a curva) conforme x tende ao infinito.

O procedimento para usar os valores de efeitos para o cálculo dos erros envolve algumas suposições. Primeiramente consideramos que os erros seguem uma distribuição normal. Neste caso, qualquer conjunto de valores aleatórios que seguem tal distribuição pode ser incluído dentro da curva com forma de sino (a curva que já conhecemos desde algumas aulas atrás). Em virtude da aleatoriedade, cada um destes elementos representa uma porcentagem da probabilidade total. Por exemplo, se forem 10 valores, cada um deles irá representar uma fração de 10% da probabilidade total. Além disso, por simplicidade, vamos supor que cada um deles esteja situado bem no meio de cada uma destas frações, de modo que x_1 esteja situado em 5%, x_2 em 15% e assim por diante até que x_{10} esteja em 95%. A forma de um gráfico representando a probabilidade em função dos valores x_n seria uma sigmoidal.



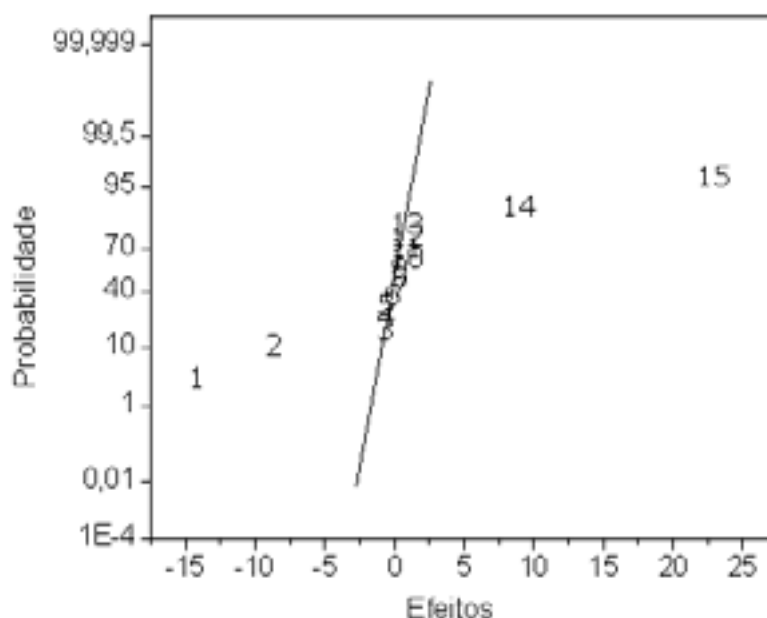
Existe um tipo de papel, chamado de papel de probabilidade normal, que possui uma escala apropriada para transformar a curva sigmoidal em uma reta, caso o modelo normal seja seguido pelo conjunto de dados. Voltando ao nosso problema, caso os efeitos observados sigam uma distribuição normal com média populacional aproximadamente igual a zero, eles poderão ser considerados como erros. Na tabela abaixo, estão os valores de efeitos que calculamos para nosso planejamento 2⁴ e cada um deles foi associado a um valor de probabilidade acumulada.

Elemento	Efeitos	P. Acum.
1	-14,125	3,33
2	-8,625	10,00
3	-0,625	16,67
4	-0,625	23,33
5	-0,625	30,00
6	-0,125	36,67
7	0,375	43,33
8	0,375	50,00
9	0,375	56,67
10	0,875	63,33
11	0,875	70,00
12	0,875	76,67
13	0,875	83,33
14	8,875	90,00
15	22,875	96,67

O passo seguinte foi a construção do gráfico, que foi feito inserindo os valores dos efeitos no eixo x e os valores de probabilidade acumulada no eixo y. Neste último, foi utilizada uma escala de probabilidade normal (operação simples nos programas de planilha de cálculo). Vemos que os valores que ficaram em cima da reta seguem a distribuição normal podendo ser, portanto, considerados

como erros. Os valores que ficaram fora da reta correspondem, na tabela, aos efeitos realmente significativos. Se olharmos na tabela quais são estes valores, veremos que são exatamente os efeitos de ordem 1 e 2, que apresentaram os valores mais altos. Portanto, nossa consideração de que estes efeitos podem ser considerados como sendo os únicos significativos é confirmada.

Gráfico Normal:



Concluimos que quando é necessário estudar um número de variáveis cujos ensaios são relativamente numerosos e impediriam a realização de repetições, ainda assim podemos aplicar o

CONCLUSÃO

planejamento fatorial e conseguir estimar os erros associados aos efeitos. Para isto, podemos usar os efeitos de ordem alta como sendo representativos dos erros, hipótese que pode ser testada representando-os em um gráfico com escala normal. Se tais efeitos seguirem uma distribuição normal, podem ser considerados como variáveis aleatórias e de fato poderão ser utilizados para a estimativa dos erros.

RESUMO



Nesta aula, vamos partir da hipótese de que uma última variável tivesse que ser incluída no planejamento fatorial de modo que ele se transformasse em um planejamento 2^4 . Portanto, fazemos de conta que a variável tempo não foi excluída e que vamos adicionar mais uma. Neste caso, o planejamento do tipo 2^4 nos obriga a realizar 16 ensaios que, caso seja imperativo realizar repetições, irá envolver 32 ensaios. É comum em um laboratório haver apenas material disponível para que só se possa realizar um ensaio de cada vez. Se cada ensaio for longo, isto implicaria em um tempo total proibitivo. A consequência disto é que nestes tipos de planejamento pode ser necessário dispensar a realização de repetições e utilizar certos artifícios na hora de interpretar os dados como, por exemplo, considerar que os efeitos de interação de ordens altas são como representativos dos erros ou, alternativamente, a chamada análise por gráficos normais.

Como usual, o procedimento de planejar os experimentos, realizá-los e calcular os efeitos é o mesmo que já conhecemos. Para a estimativa do erro fazemos algumas considerações. Primeiramente, se compararmos os efeitos principais com os efeitos de ordem 2, 3 e 4, veremos que os efeitos de menor ordem tendem a ser mais significativos, ou seja, terem valores maiores. Com isso, uma suposição que podemos fazer é de que o modelo possa ser descrito de modo razoavelmente satisfatório apenas incluindo os efeitos de ordem 1 e 2 e que os demais efeitos sejam usados para se fazer uma estimativa do erro experimental existente nos valores dos efeitos. Estes valores serão usados da seguinte maneira: assumindo que os efeitos de ordem 3 e 4 não existem, os valores calculados se devem às flutuações aleatórias inerentes ao processo. Se elevarmos cada um deles ao quadrado, teremos uma estimativa da variância de cada efeito e a média dos cinco valores fornece uma estimativa conjunta.

Por outro lado, podemos representar os valores dos efeitos de ordem alta em um gráfico com escala normal e, se estes forem aleatórios, formarão uma reta.

FORMA SIGMOIDAL

Trata-se de uma forma de curva que lembra uma letra S com curvaturas suaves e é geralmente observada em gráficos.

PRÓXIMA AULA



Na próxima aula veremos o último tipo de planejamento fatorial de nosso curso, que envolve um número ainda mais alto de variáveis chamado de planejamento fatorial fracionário, em que nem todos os ensaios são feitos.

REFERÊNCIAS

- BOX, G. E. P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S. **Statistics for experimenters. An introduction to design, data analysis and model building.** New York: Wiley, 1978.
- BUSSAB, W. O.; MORETIN, P. A. **Estatística básica.** São Paulo: Ed. Atual, 1985.
- BARROS NETO, B.; SCARMINIO, I. E.; BRUNS, R. E. **Planejamento e otimização de experimentos.** Campinas: Editora da Unicamp, 1995.