Variáveis Complexas

José Carlos Leite

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Variaveis Complexas

Elaboração de Conteúdo
José Carlos Leite

Projeto Gráfico
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central
Universidade Federal de Sergipe

Leite, José Carlos
L533v Variáveis complexas / José Carlos Leite. – São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Funções de variáveis complexas. 2. Álgebra. 3. Equações. 4. Cálculo integral. I. Título.

CDU 517.55

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

SUMÁRIO

AULA 1

Álgebra dos Números Complexos

META:

Apresentar a álgebra dos números complexos.

OBJETIVOS:

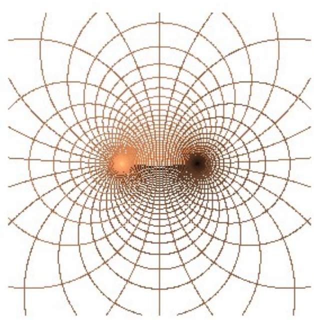
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir e efetuar as operações algébricas no corpo $\mathbb{C}$.

Calcular raízes e potências em $\mathbb{C}$.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo III.



1.1 Introdução

Caros alunos iniciamos aqui nosso curso de Variáveis Complexas com o tema "Álgebra dos Números Complexos". Vamos aqui estabelecer as bases algébricas dos números complexos como um corpo não ordenado i.e. as operações de soma e produto definidas para os números complexos têm as mesmas propriedades que as da soma e produto de números reais.

1.2 Um Pouquinho de História

É interessante notar que a descoberta dos números complexos não foi devida a solução de equações do segundo grau $x^2 + ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}$ e sim devido a descoberta da solução para a equação cúbica em sua forma geral $x^3+ax^2+bx+c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Historicamente a idéia de números complexos apareceu com o Matemático italiano Gerolamo Cardano, que os chamou de fictícius. Scipione del Ferro, Matemático italiano, por volta de 1510, encontrou uma forma geral para a solução da equação cúbica incompleta da forma $x^3 + px + q = 0$ porém, morreu sem publica-la. Seu aluno Antonio Maria Fior. conhecendo a solução, propôe um desafio a outro Matemático italiano Nicoló Fontana, apelidado de Tartaglia. Tartaglia, muito embora não conhecesse a solução dos problemas, conseguiu deduzir a fórmula para equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$ quanto para $x^3 + px^2 + q = 0$ e venceu a disputa. Tartaglia, com a mudança de variáveis $y = x - \dfrac{a}{3}$ reduziu a equação geral da cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à forma $y^3 + py + q = 0$ cuja solução já tinha demonstrado ser

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números. Bombelli, estudando a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ por inspeção verificou que $x = 4$ era solução. Dividindo $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$ encontrou $x^2 + 4x + 1 = 0$ cujas soluções são reais porém, substituindo na fórmula de Tartaglia encontramos $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Por um lado a fórmula de Tartaglia estava correta por outro $\sqrt{-121}$ era, até então, visto com impossível. A idéia de Bombelli foi a de que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ respectivamente. Após, um bocado de conta (vale a pena refaze-las) encontrou $a = 2$ e $b = 1$ e estavam descoberto os números complexos.

1.3 Números Complexos

Vamos agora por a mão na massa começando pela início. Isto é, definindo o que vem a ser números complexos.

Definição 1.1. Um número complexo $z = (x, y)$ é um par ordenado onde $x, y \in \mathbb{R}$ com soma e produto dados por: $\forall z_1, z_1$, $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1.z_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{cases}$$

OBS 1.1. Denotamos $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os números complexos munido das estruturas aditiva e multiplicativa dadas acima.

A igualdade de números complexos é derivada da igualdade de pares ordenados i.e.

Definição 1.2. Seja $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ dois números complexos. $z_1 = z_2$ se, somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

OBS 1.2. Apesar de ser definido como par ordenado de números complexos, os números complexos não tem paralelo com $\mathbb{R}^2$ pois, em $\mathbb{R}^2$ não existe estrutura multiplicativa como nos complexos.

Os números complexos possuem, entre outras, as seguintes propriedades:
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ simetria da soma

ii) $z_1.z_2 = z_2.z_1$ simetria da multiplicação

iii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z2 + z_3)$ associatividade da soma

iv) $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ associatividade da multiplicação

v) $(0, 0)$ é o neutro aditivo

vi) $(1, 0)$ é o neutro multiplicativo

vii) se $z = (x, y)$ então $-z = (-x, -y)$ é o simétrico aditivo.

viii) se $z = (x, y) \neq (0, 0)$ então $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ é o simétrico multiplicativo

ix) $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$ distributividade da multiplicação sobre a soma

OBS 1.3. Fazendo as seguintes identificações: $1 = (1, 0)$ e $\imath = (0, 1)$ podemos escrever um número complexo $z = (x, y)$ como

$z = x + y\imath$, que é uma forma mais simples de se manipular desde que ponhamos $\imath^2 = -1$. Nesta forma a soma e a multiplicação ficam dadas por: se $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + y_1\imath$ e $z_2 = x_2 + y_2\imath$ então

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\imath$$
$$z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)\imath$$

Definição 1.3. Seja $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos as partes reais e partes imaginária de z, denotadas $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente, por:

$$Re(z) = x \;\; e \;\; Im(z) = y$$

OBS 1.4. Dado um número complexo $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$, podemos representa-lo graficamente como um ponto do plano xy. Desta forma dando sentido à próxima definição.

Definição 1.4. Dado um número complexo $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$, definimos o módulo de z, denotado $|z|$, por:

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.1}$$

Um conceito importante a ser em seguida definido é o de conjugado. A saber:

Definição 1.5. Seja $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos o conjugado de z, denotado $\bar{z}$ por:

$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - y\imath$$

OBS 1.5. O módulo e o conjugado estão relacionados por: $|z|^2 = z.\bar{z}$.

Algumas propriedades do módulo:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

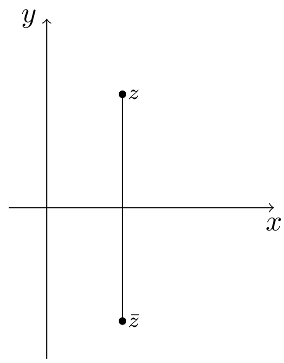


Figura 1.1: Conjugado de um número complexo

i) $z_1| \geq 0$

ii) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

iv) se $z = x + y\imath$ então $|z| \geq |x|$ e $|z| \geq |y|$

Algumas propriedades do conjugado:

$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

iii) $x = Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

iv) $y = Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2\imath}$

Como podemos associar um número complexo $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ a um ponto do plano xy, podemos usar coordenadas polares e definir uma nova forma de representação d números complexos. A saber:

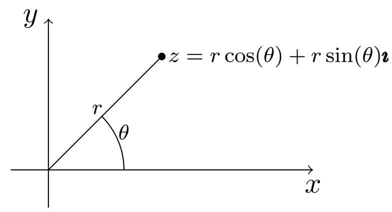


Figura 1.2: Forma polar de um número complexo

Definição 1.6. Seja $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ um número complexo. Fazendo $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ a representação:

$$z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\imath$$

é dita representação polar do número z.

OBS 1.6. O módulo de z é dado por:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \end{aligned}$$

Definição 1.7. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$ em sua forma polar $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\imath$ definimos o argumento de z, denotado $arg(z)$ por: $arg(z) = \theta$.

OBS 1.7. O argumento de um número complexo tem uma infinidade de valores já que $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta), \forall k \in \mathbb{Z}$ e $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), \forall k \in \mathbb{Z}$. qualquer dos $\theta + 2k\pi$ pode ser um argumento.

OBS 1.8. Se $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\imath$ e $w = \varrho\cos(\phi) + \varrho\sin(\phi)\imath$.

Fazendo o produto $z.w$ temos:

$$
\begin{aligned}
z.w &= (r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\boldsymbol{\imath}).(\varrho\cos(\phi) + \varrho\sin(\phi)\boldsymbol{\imath}) \\
&= r\varrho(\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)) \\
&+ r\varrho(\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi))\boldsymbol{\imath} \\
&= r\varrho\cos(\theta+\phi) + r\varrho\sin(\theta+\phi)
\end{aligned}
$$

OBS 1.9. Da observação acima tiramos: Se $z = r\cos(\theta)+r\sin(\theta)\boldsymbol{\imath}$ e $w = \varrho\cos(\phi) + \varrho\sin(\phi)\boldsymbol{\imath}$ então

$$arg(z.w) = arg(z) + arg(w)$$

a fórmula acima pode ser interpretada assim: se $arg(z)$ é um argumento de z e $arg(w)$ é um argumento de w então $arg(z)+arg(w)$ é um argumento de $z.w$ e um argumento de $z.w$ pode ser decomposto na soma de um argumento de z mais um argumento de w.

1.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que embora definidos inicialmente como pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, os números complexos possuem um estrutura multiplicativa que torna $\mathbb{C}$ diferente de $\mathbb{R}^2$.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 01 constam os seguintes tópicos:

Álgebra dos Números Complexos

Definição

Um número complexo $z = (x, y)$ é um par ordenado onde $x, y \in \mathbb{R}$

com soma e produto dados por: $\forall z_1, z_1,\ z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1.z_1 \overset{\text{def}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{cases}$$

Algumas Propriedades

Os números complexos possuem, entre outras, as seguintes propriedades:

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ simetria da soma

ii) $z_1.z_2 = z_2.z_1$ simetria da multiplicação

iii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z2 + z_3)$ associatividade da soma

iv) $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ associatividade da multiplicação

v) $(0, 0)$ é o neutro aditivo

vi) $(1, 0)$ é o neutro multiplicativo

vii) se $z = (x, y)$ então $-z = (-x, -y)$ é o simétrico aditivo.

viii) se $z = (x, y) \neq (0, 0)$ então $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ é o simétrico multiplicativo

ix) $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$ distributividade da multiplicação sobre a soma

Definição

Fazendo as seguintes identificações: $1 = (1, 0)$ e $\imath = (0, 1)$ podemos escrever um número complexo $z = (x, y)$ como $z = x + y\imath$

Seja $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos as partes reais e partes imaginária de z, denotadas $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente, por: $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

Definição

Dado um número complexo $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$, definimos o módulo de z, denotado $|z|$, por: $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição

Seja $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos o conjugado de z, denotado $\bar{z}$ por: $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - y\imath$.

Algumas Propriedades do Módulo

Algumas propriedades do módulo:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

i) $z_1| \geq 0$

ii) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

iv) se $z = x + y\imath$ então $|z| \geq |x|$ e $|z| \geq |y|$

Algumas Propriedades do Conjugado

Algumas propriedades do conjugado:

$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

iii) $x = Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

iv) $y = Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2\imath}$

Definição

Seja $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$ um número complexo. Fazendo $x = r\cos(\theta)$

e $y = r\sin(\theta)$ a representação: $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\imath$ é dita representação polar do número z.

Produto na Forma Polar

Se $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\imath$ e $w = \varrho\cos(\phi) + \varrho\sin(\phi)\imath$. Fazendo o produto $z.w$ temos:

$$z.w = r\varrho\cos(\theta + \phi) + r\varrho\sin(\theta + \phi)$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula introduziremos o conceito de funções de variáveis complexas e o conceito de limites no corpo dos números complexos. Veremos também, algumas propriedades dos limites de funções complexas.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 1.1. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos. Mostre que $z_1.z_2 = z_2.z_1$.

Comentário: Use as propriedades comutativas dos números reais.

ATIV. 1.2. Sejam $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\imath$. Mostre que:

$$z^n = r^n\cos(n\theta) + r^n\sin(n\theta)\imath$$

Comentário: Use o princípio da indução.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.

CERI, Cristina e MONTEIRO, Marta S. A História dos Números Complexos. http://www.ime.usp.br/ martha/caem/complexos.pdf. Acessado em 02/06/2011.