

Variáveis Complexas

José Carlos Leite



São Cristóvão/SE
2011

Variáveis Complexas

Elaboração de Conteúdo

José Carlos Leite

Projeto Gráfico

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

Capa

Hermeson Alves de Menezes

Copyright © 2011, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Leite, José Carlos

L533v Variáveis complexas / José Carlos Leite. – São Cristóvão:
Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Funções de variáveis complexas. 2. Álgebra. 3. Equações.
4. Cálculo integral. I. Título.

CDU 517.55

Presidente da República
Dilma Vana Rousseff

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

Diretor de Educação a Distância
João Carlos Teatini Souza Clímaco

coordenador-adjunto da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antonioli

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

Núcleo de Avaliação
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Assessoria de Comunicação
Guilherme Borba Gouy

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Paulo Souza Rabelo (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Raquel Rosário Matos (Matemática)
Ayslan Jorge Santos da Araujo (Administração)
Carolina Nunes Goes (História)
Viviane Costa Felicíssimo (Química)
Gleise Campos Pinto Santana (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)
Lívia Carvalho Santos (Presencial)
Adriana Andrade da Silva (Presencial)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Alves de Menezes (Coordenador)
Marcio Roberto de Oliveira Mendonça

Neverton Correia da Silva
Nicolás Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

SUMÁRIO

Aula 1: Álgebra dos Números Complexos	13
1.1 Introdução	14
1.2 Um Pouquinho de História	14
1.3 Números Complexos	15
1.4 Conclusão	20
RESUMO	20
PRÓXIMA AULA	23
ATIVIDADES	23
LEITURA COMPLEMENTAR	24
Aula 2: Limites de Funções de Variáveis Complexas	25
2.1 Introdução	26
2.2 Topologia do Plano Complexo	26
2.3 Funções de Variáveis Complexas	28
2.4 Limites de Funções de Variáveis Complexas	29
2.5 Continuidade de Funções complexas	32
2.6 Conclusão	34
RESUMO	34
PRÓXIMA AULA	37
ATIVIDADES	37
LEITURA COMPLEMENTAR	38
Aula 3: Derivação Complexa	39
3.1 Introdução	40
3.2 Derivação Complexa	40
3.3 Regras de Derivação Complexa	42

3.4	Equações de Cauchy-Riemann	44
3.5	Conclusão	50
	RESUMO	50
	PRÓXIMA AULA	51
	ATIVIDADES	52
	LEITURA COMPLEMENTAR	52

Aula 4: Mais Alguns Aspectos da Derivação Complexa

	53	
4.1	Introdução	54
4.2	Funções Holomorfas	54
4.3	Forma Polar das Equações de Cauchy-Riemann	58
4.4	Funções Harmônicas	61
4.5	Conclusão	64
	RESUMO	64
	PRÓXIMA AULA	65
	ATIVIDADES	66
	LEITURA COMPLEMENTAR	66

Aula 5: Funções Elementares do Cálculo Complexos 1

	69	
5.1	Introdução	70
5.2	Função Exponencial	70
5.3	Propriedades da Função Exponencial	71
5.4	Derivada da Função Exponencial	74
5.5	Função Logaritmo	74
5.6	Propriedades da Função Logaritmo	75
5.7	Derivada da Função Logaritmo	76
5.8	Conclusão	78

RESUMO	78
PRÓXIMA AULA	80
ATIVIDADES	80
LEITURA COMPLEMENTAR	81

Aula 6: Funções Elementares do Cálculo Complexos 2

83

6.1 Introdução	84
6.2 Funções Trigonométricas	84
6.3 Propriedades das Funções Trigonométricas	86
6.4 Funções Trigonométricas Inversas	88
6.5 Derivada das Funções Trigonométricas	90
6.6 Funções Hiperbólicas	91
6.7 Propriedades das Funções Hiperbólicas	93
6.8 Funções Hiperbólicas Inversas	94
6.9 Derivada das Funções Hiperbólicas	96
6.10 Conclusão	97
RESUMO	98
PRÓXIMA AULA	101
ATIVIDADES	101
LEITURA COMPLEMENTAR	101

Aula 7: Integração Complexa 103

7.1 Introdução	104
7.2 Integração Complexa	104
7.3 Integrais de Linha Reais	105
7.4 Relação entre Integrais de Linha Complexa e Real	106
7.5 Integral Indefinida	109
7.6 Conclusão	109

RESUMO	109
PRÓXIMA AULA	110
ATIVIDADES	111
LEITURA COMPLEMENTAR	112
Aula 8: Teoremas de Cauchy	113
8.1 Introdução	114
8.2 Preliminares	114
8.3 Teoria de Cauchy	115
8.4 Fórmula Integral de Cauchy	123
8.5 Conclusão	129
RESUMO	129
PRÓXIMA AULA	130
ATIVIDADES	130
LEITURA COMPLEMENTAR	131
Aula 9: Convergência de Séries de Números Complexos	133
9.1 Introdução	134
9.2 Seqüências de Números Complexos	134
9.3 Alguns Teoremas	135
9.4 Séries de Números Complexos	138
9.5 Séries de Potência	141
9.6 Conclusão	145
RESUMO	145
PRÓXIMA AULA	148
ATIVIDADES	148
LEITURA COMPLEMENTAR	149

Aula 10: Séries de Laurent	151
10.1 Introdução	152
10.2 Séries de Laurent	152
10.3 Conclusão	160
RESUMO	160
PRÓXIMA AULA	160
ATIVIDADES	161
LEITURA COMPLEMENTAR	161
Aula 11: Singularidades de Funções de Variáveis Complexas	163
11.1 Introdução	164
11.2 Pontos Singulares de Funções Complexas	164
11.3 Classificação de Pontos Singulares Isolados	164
11.4 Conclusão	169
RESUMO	170
PRÓXIMA AULA	171
ATIVIDADES	172
LEITURA COMPLEMENTAR	172
Aula 12: Cálculo de Resíduos	173
12.1 Introdução	174
12.2 Resíduos	174
12.3 Conclusão	180
RESUMO	180
PRÓXIMA AULA	182
ATIVIDADES	182
LEITURA COMPLEMENTAR	182

Aula 13: Aplicações do Teorema dos Resíduos	183
13.1 Introdução	184
13.2 Algumas Aplicações do Teorema dos Resíduos	184
13.3 Conclusão	190
RESUMO	190
PRÓXIMA AULA	191
ATIVIDADES	191
LEITURA COMPLEMENTAR	192
Aula 14: Transformações Conformes	193
14.1 Introdução	194
14.2 Transformações Conformes	194
14.3 Exemplos de Algumas Transformações Conformes	197
14.3.1 Transformações de Möbius	198
14.3.2 Pontos fixos de uma Aplicação	199
14.4 Conclusão	201
RESUMO	201
PRÓXIMA AULA	202
ATIVIDADES	202
LEITURA COMPLEMENTAR	203
Aula 15: Transformações Conformes: Aplicações	205
15.1 Introdução	206
15.2 Problemas de Dirichlet e de Neumann	206
15.2.1 Problemas de Dirichlet	210
15.2.2 Problemas de Neumann	210
15.2.3 Aplicações ao Escoamento de Fluidos	211
15.2.4 Escoamento em Torno de Obstáculos	213
15.3 Conclusão	215

RESUMO	215
PRÓXIMA AULA	216
ATIVIDADES	217
LEITURA COMPLEMENTAR	217

Álgebra dos Números Complexos

META:

Apresentar a álgebra dos números complexos.

OBJETIVOS:

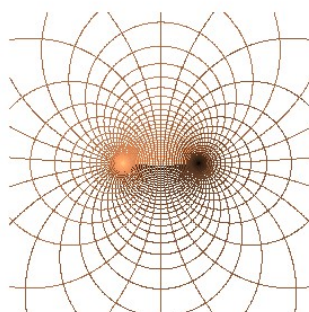
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir e efetuar as operações algébricas no corpo \mathbb{C} .

Calcular raízes e potências em \mathbb{C} .

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo III.



1.1 Introdução

Caros alunos iniciamos aqui nosso curso de Variáveis Complexas com o tema “Álgebra dos Números Complexos”. Vamos aqui estabelecer as bases algébricas dos números complexos como um corpo não ordenado i.e. as operações de soma e produto definidas para os números complexos têm as mesmas propriedades que as da soma e produto de números reais.

1.2 Um Pouquinho de História

É interessante notar que a descoberta dos números complexos não foi devida a solução de equações do segundo grau $x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ e sim devido a descoberta da solução para a equação cúbica em sua forma geral $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Historicamente a idéia de números complexos apareceu com o Matemático italiano Gerolamo Cardano, que os chamou de fictícios. Scipione del Ferro, Matemático italiano, por volta de 1510, encontrou uma forma geral para a solução da equação cúbica incompleta da forma $x^3 + px + q = 0$ porém, morreu sem publicá-la. Seu aluno Antonio Maria Fior, conhecendo a solução, propõe um desafio a outro Matemático italiano Nicoló Fontana, apelidado de Tartaglia. Tartaglia, muito embora não conhecesse a solução dos problemas, conseguiu deduzir a fórmula para equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$ quanto para $x^3 + px^2 + q = 0$ e venceu a disputa. Tartaglia, com a mudança de variáveis $y = x - \frac{a}{3}$ reduziu a equação geral da cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à forma $y^3 + py + q = 0$ cuja solução já tinha demonstrado ser

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números. Bombelli, estudando a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ por inspeção verificou que $x = 4$ era solução. Dividindo $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$ encontrou $x^2 + 4x + 1 = 0$ cujas soluções são reais porém, substituindo na fórmula de Tartaglia encontramos $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Por um lado a fórmula de Tartaglia estava correta por outro $\sqrt{-121}$ era, até então, visto com impossível. A idéia de Bombelli foi a de que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ respectivamente. Após, um bocado de conta (vale a pena refazer-las) encontrou $a = 2$ e $b = 1$ e estavam descoberto os números complexos.

1.3 Números Complexos

Vamos agora por a mão na massa começando pela início. Isto é, definindo o que vem a ser números complexos.

Definição 1.1. Um número complexo $z = (x, y)$ é um par ordenado onde $x, y \in \mathbb{R}$ com soma e produto dados por: $\forall z_1, z_1, z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases}$$

OBS 1.1. Denotamos \mathbb{C} o conjunto de todos os números complexos munido das estruturas aditiva e multiplicativa dadas acima.

A igualdade de números complexos é derivada da igualdade de pares ordenados i.e.

Definição 1.2. Seja $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ dois números complexos. $z_1 = z_2$ se, e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

OBS 1.2. Apesar de ser definido como par ordenado de números complexos, os números complexos não tem paralelo com \mathbb{R}^2 pois, em \mathbb{R}^2 não existe estrutura multiplicativa como nos complexos.

Os números complexos possuem, entre outras, as seguintes propriedades:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

- i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ simetria da soma
- ii) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ simetria da multiplicação
- iii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ associatividade da soma
- iv) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ associatividade da multiplicação
- v) $(0, 0)$ é o neutro aditivo
- vi) $(1, 0)$ é o neutro multiplicativo
- vii) se $z = (x, y)$ então $-z = (-x, -y)$ é o simétrico aditivo.
- viii) se $z = (x, y) \neq (0, 0)$ então $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ é o simétrico multiplicativo
- ix) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ distributividade da multiplicação sobre a soma

OBS 1.3. Fazendo as seguintes identificações: $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$ podemos escrever um número complexo $z = (x, y)$ como

$z = x + y\mathbf{i}$, que é uma forma mais simples de se manipular desde que ponhamos $\mathbf{i}^2 = -1$. Nesta forma a soma e a multiplicação ficam dadas por: se $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}$ e $z_2 = x_2 + y_2\mathbf{i}$ então

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{i} \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{i} \end{aligned}$$

Definição 1.3. Seja $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos as partes reais e partes imaginária de z , denotadas $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente, por:

$$Re(z) = x \text{ e } Im(z) = y$$

OBS 1.4. Dado um número complexo $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, podemos representá-lo graficamente como um ponto do plano xy . Desta forma dando sentido à próxima definição.

Definição 1.4. Dado um número complexo $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, definimos o módulo de z , denotado $|z|$, por:

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.1)$$

Um conceito importante a ser em seguida definido é o de conjugado. A saber:

Definição 1.5. Seja $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos o conjugado de z , denotado \bar{z} por:

$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - y\mathbf{i}$$

OBS 1.5. O módulo e o conjugado estão relacionados por: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Algumas propriedades do módulo:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

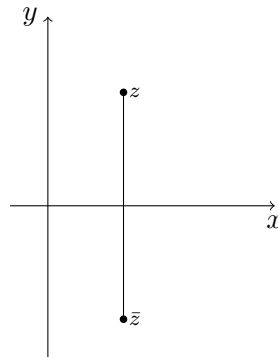


Figura 1.1: Conjugado de um número complexo

i) $|z_1| \geq 0$

ii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

iv) se $z = x + y\mathbf{i}$ então $|z| \geq |x|$ e $|z| \geq |y|$

Algumas propriedades do conjugado:

$$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$$

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii) $x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

iv) $y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}$

Como podemos associar um número complexo $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ a um ponto do plano xy , podemos usar coordenadas polares e definir uma nova forma de representação dos números complexos. A saber:

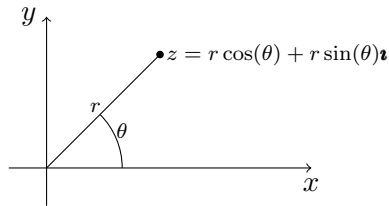


Figura 1.2: Forma polar de um número complexo

Definição 1.6. Seja $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ um número complexo.

Fazendo $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ a representação:

$$z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$$

é dita representação polar do número z .

OBS 1.6. O módulo de z é dado por:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \end{aligned}$$

Definição 1.7. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$ em sua forma polar $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$ definimos o argumento de z , denotado $\arg(z)$ por: $\arg(z) = \theta$.

OBS 1.7. O argumento de um número complexo tem uma infinidade de valores já que $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. qualquer dos $\theta + 2k\pi$ pode ser um argumento.

OBS 1.8. Se $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$ e $w = \rho \cos(\phi) + \rho \sin(\phi)\mathbf{i}$.

Fazendo o produto $z.w$ temos:

$$\begin{aligned}z.w &= (r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}).(\rho \cos(\phi) + \rho \sin(\phi)\mathbf{i}) \\ &= r\rho(\cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi)) \\ &\quad + r\rho(\cos(\theta) \sin(\phi) + \sin(\theta) \cos(\phi))\mathbf{i} \\ &= r\rho \cos(\theta + \phi) + r\rho \sin(\theta + \phi)\mathbf{i}\end{aligned}$$

OBS 1.9. Da observação acima tiramos: Se $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$ e $w = \rho \cos(\phi) + \rho \sin(\phi)\mathbf{i}$ então

$$\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w)$$

a fórmula acima pode ser interpretada assim: se $\arg(z)$ é um argumento de z e $\arg(w)$ é um argumento de w então $\arg(z) + \arg(w)$ é um argumento de $z.w$ e um argumento de $z.w$ pode ser decomposto na soma de um argumento de z mais um argumento de w .

1.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que embora definidos inicialmente como pares ordenados de \mathbb{R}^2 , os números complexos possuem uma estrutura multiplicativa que torna \mathbb{C} diferente de \mathbb{R}^2 .

RESUMO

No nosso resumo da Aula 01 constam os seguintes tópicos:

Álgebra dos Números Complexos

Definição

Um número complexo $z = (x, y)$ é um par ordenado onde $x, y \in \mathbb{R}$



com soma e produto dados por: $\forall z_1, z_2, z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases}$$

Algumas Propriedades

Os números complexos possuem, entre outras, as seguintes propriedades:

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ simetria da soma
- ii) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ simetria da multiplicação
- iii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ associatividade da soma
- iv) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ associatividade da multiplicação
- v) $(0, 0)$ é o neutro aditivo
- vi) $(1, 0)$ é o neutro multiplicativo
- vii) se $z = (x, y)$ então $-z = (-x, -y)$ é o simétrico aditivo.
- viii) se $z = (x, y) \neq (0, 0)$ então $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ é o simétrico multiplicativo
- ix) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ distributividade da multiplicação sobre a soma

Definição

Fazendo as seguintes identificações: $1 = (1, 0)$ e $\mathbf{i} = (0, 1)$ podemos escrever um número complexo $z = (x, y)$ como $z = x + y\mathbf{i}$

Seja $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos as partes

reais e partes imaginária de z , denotadas $Re(z)$ e $Im(z)$ respectivamente, por: $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

Definição

Dado um número complexo $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, definimos o módulo de z , denotado $|z|$, por: $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição

Seja $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ um número complexo. Definimos o conjugado de z , denotado \bar{z} por: $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - y\mathbf{i}$.

Algumas Propriedades do Módulo

Algumas propriedades do módulo:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{i) } |z_1| \geq 0$$

$$\text{ii) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{iii) } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\text{iv) se } z = x + y\mathbf{i} \text{ então } |z| \geq |x| \text{ e } |z| \geq |y|$$

Algumas Propriedades do Conjugado

Algumas propriedades do conjugado:

$$\forall z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$$

$$\text{i) } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\text{ii) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\text{iii) } x = Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\text{iv) } y = Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}$$

Definição

Seja $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ um número complexo. Fazendo $x = r \cos(\theta)$

e $y = r \sin(\theta)$ a representação: $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$ é dita representação polar do número z .

Produto na Forma Polar

Se $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$ e $w = \rho \cos(\phi) + \rho \sin(\phi)\mathbf{i}$. Fazendo o produto $z.w$ temos:

$$z.w = r\rho \cos(\theta + \phi) + r\rho \sin(\theta + \phi)\mathbf{i}$$

PRÓXIMA AULA



Em nossa próxima aula introduziremos o conceito de funções de variáveis complexas e o conceito de limites no corpo dos números complexos. Veremos também, algumas propriedades dos limites de funções complexas.

ATIVIDADES



Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 1.1. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos. Mostre que $z_1.z_2 = z_2.z_1$.

Comentário: Use as propriedades comutativas dos números reais.

ATIV. 1.2. Sejam $z = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)\mathbf{i}$. Mostre que:

$$z^n = r^n \cos(n\theta) + r^n \sin(n\theta)\mathbf{i}$$

Comentário: Use o princípio da indução.



LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.

CERI, Cristina e MONTEIRO, Marta S. A História dos Números Complexos. <http://www.ime.usp.br/martha/caem/complexos.pdf>. Acessado em 02/06/2011.