AULA 2

Limites de Funções de Variáveis Complexas

META:

Introduzir o conceito de limite de funções de variáveis complexas.

OBJETIVOS:

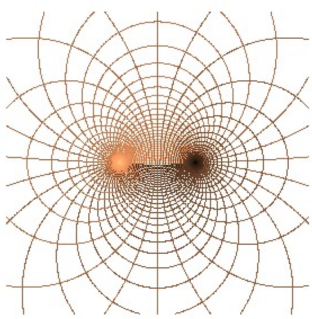
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir limites de funções de variáveis complexas e

determinar o limite de algumas funções de variáveis complexas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula01 de Variáveis Complexas e os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo II.



2.1 Introdução

Caros alunos o tema de nossa aula de hoje é "Limites de Funções de Variáveis Complexas". Antes de entrarmos no tema central no entanto, faremos um pequeno passeio pela topologia do plano complexo. A rigor, as noções topológicas aqui expostas não se restringem ao plano complexo. Estes conceitos, em especial o de bola aberta serão usados nas definições de limite e continuidade de funções complexas.

2.2 Topologia do Plano Complexo

Vamos iniciar nossa aula com as definições, com alguns pequenos comentários, de alguns conceitos topológicos. Começando por:

Definição 2.1. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto do plano complexo e $r > 0$ um real positivo. definimos a bola aberta de centro em z_0 e raio r por:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$$

OBS 2.1. Apesar do nome bola aberta, a representação geométrica de uma bola aberta de centro em $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ é (ver **figura 2.1**), no plano complexo $\mathbb{C}$, é o interior um disco cujo centro é z_0 e cujo raio é r.

Podemos definir também, a bola fechada incluindo as bordas i.e.

Definição 2.2. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto do plano complexo e $r > 0$ um real positivo. definimos a bola fechada de centro em z_0 e raio r por:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq r\}$$

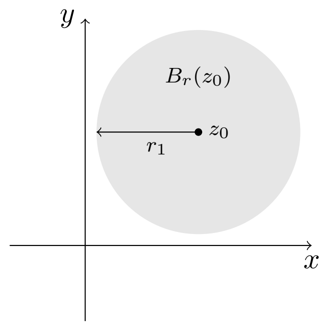


Figura 2.1: Bola Aberta no Plano Complexo

Definição 2.3. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo. Dizemos que D é um conjunto aberto se, somente se: Para todo $z \in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subset D$.

OBS 2.2. Em un conjunto aberto cada ponto é centro de alguma bola aberta inteiramente contida no conjunto. Em particular cada bola aberta em C é por sua vez um conjunto aberto. Também é aberto o plano complexo $\mathbb{C}$. E o conjunto vazio $\emptyset$ é aberto, pois satisfaz a definição de conjunto vazio.

Definição 2.4. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo. Dizemos que D é um conjunto fechado se, somente se se complementar $\complement_{\mathbb{C}}(D)$ em relação a $\mathbb{C}$ for aberto.

OBS 2.3. Bolas fechadas são conjuntos fechados. Também é fechado o plano complexo $\mathbb{C}$, visto que seu complementar, o conjunto vazio $\emptyset$, é um conjunto aberto.

Definição 2.5. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in D$. Dizemos que z é um ponto interior de D se, somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subset D$.

OBS 2.4. Todos os pontos de um conjunto D aberto são pontos interiores de D.

Definição 2.6. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in C$. Dizemos que z é um ponto exterior de D se, somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subset \complement_{\mathbb{C}}(D)$.

Definição 2.7. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in C$. Dizemos que z é um ponto de fronteira de D se, somente se para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(z) \cap D \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(z) \cap \complement_{\mathbb{C}}(D) \neq \emptyset$.

Definição 2.8. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in C$. Dizemos que z é um ponto de acumulação de D se, somente se para todo $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \cap D \neq \emptyset$.

OBS 2.5. Todos os pontos de um conjunto D aberto são pontos de acumulação. Todos os pontos de fronteira de um conjunto D são pontos de acumulação.

2.3 Funções de Variáveis Complexas

Consideraremos aqui funções de variáveis complexas, que questão de economia serão chamadas simplesmente funções complexas.

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo. Uma função complexa f é uma regra que associa cada ponto z de D a um número complexo denotado w. O número w é chamado de o valor de f no ponto z ou imagem de z por f e denotado $f(z)$ i.e.

$$w = f(z)$$

OBS 2.6. Adotaremos também, a notação usual de funções i.e. para indicar uma função f de domínio $D \subset \mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ usamos $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$.

Também, com o objetivo de simplificação e a menos que seja indicado o contrário, o domínio de D de f será um conjunto aberto.

OBS 2.7. Desde que a imagem de uma função complexa é um número complexo, podemos ter uma forma alternativa de representar funções complexas pondo $z = x + y\imath$ e

$$f(z) = f(x + y\imath) = u(x, y) + v(x, y)\imath$$

onde as funções $u : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ e $v : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ são ditas componentes real e imaginária de f respectivamente.

Exemplo 2.1. Para a função $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$ suas componentes são $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ e $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ i.e. $f(\bullet)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(z) = f(x + y\imath) &= (x + y\imath)^3 \\ &= (x + y\imath).(x + y\imath).(x + y\imath) \\ &= ((x^2 - y^2) + 2xy\imath).(x + y\imath) \\ &= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)\imath \end{aligned}$$

2.4 Limites de Funções de Variáveis Complexas

Começaremos diretamente pela definição de limite.

Definição 2.9. Seja $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa de domínio D aberto e $z_0 \in D$. Dizemos que $L \in \mathbb{C}$ é o limite de $f(z)$ quando z tende a z_0, denotado $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ se, somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$ temos $f(z) \in B_\varepsilon(L)$

OBS 2.8. A definição acima, traduzindo em palavras, quer dizer que se L é o limite de $f(z)$ quando z se aproxima de z_0 a imagem a imagem $f(z)$ está em uma bola arbitrariamente pequena $B_\varepsilon(L)$ de centro em L.

Para ilustrar o cálculo de limites usando a definição, veremos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por: $f(z) = \begin{cases} z^3 & , z \neq \imath \\ 0 & , z = \imath \end{cases}$.
Determinar o limite de $f(z)$ quando z tende a $\imath$.
SOLUÇÃO: Como $\imath^3 = -\imath$ suspeitamos que $\lim\limits_{z \to \imath} f(z) = -\imath$. Vamos comprovar, usando a definição de limite.
Para cada real positivo $\varepsilon > 0$, existe um real positivo $\delta > 0$ tal que:
$\forall z \in B_\delta(\imath) - \{\imath\}$ temos: $f(z) \in B_\varepsilon(-\imath)$.
Podemos, de forma mais conveniente, descrever a situação acima em termos de módulo da seguinte forma:
$\forall z | 0 < |z - \imath| < \delta$ temos: $|z^3 + \imath| < \varepsilon$.
Para ter isso escrevermos:

$$\begin{aligned} |z^3 + \imath| &= |z^3 - \imath^3| \\ &= |(z - \imath)(z^2 + z\imath + \imath^2)| \\ &\leq |z - \imath|.|z^2 + z\imath + \imath^2| < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se, temporariamente, limitarmos z de modo que $|z - \imath| < 1$ teremos:

$$\begin{aligned} |z| - |\imath| \leq |z - \imath| &< 1 \\ |z| - 1 &< 1 \\ |z| &< 2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Daí, teremos a seguinte limitação:

$$\begin{aligned} |z^2 + z\imath + \imath^2| &< |z^2 + |z\imath| + |\imath^2| \\ &< |z|^2 + |z||\imath| + |\imath|^2 \\ &< 7 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bom, agora podemos provar o limite:

$\forall \varepsilon >, \exists \delta > 0, \delta = \min\{1, \varepsilon/7\} | \forall z, 0 < |z - \imath| < \delta$.

Como $|z - \imath| < \delta$ e $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ temos que valem ao mesmo tempo as seguintes desigualdades:

$|z - \imath| < 1$ e $|z - \imath| < \varepsilon/7$.

Da primeira desigualdade garantimos a desigualdade **eqn 2.3.3** que por sua vez garante a desigualdade **eqn 2.4.3**.

Por outro lado, da segunda desigualdade temos:

$$\begin{aligned} |z - \imath| &< \frac{\varepsilon}{7} \\ |z - \imath|.7 &< \varepsilon \end{aligned} \tag{2.5}$$

Das desigualdades **eqn 2.5** e **eqn 2.4.3** temos:

$$\begin{aligned} |z - \imath|.|z^2 + z\imath + \imath^2| &< \varepsilon \\ |(z - \imath).(z^2 + z\imath + \imath^2)| &< \varepsilon \\ |z^3 - \imath^3| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{2.6}$$

Daí, temos:

$$\forall \varepsilon >, \exists \delta > 0, \delta = \min\{1, \varepsilon/7\} | \forall z, 0 < |z - \imath| < \delta \to |z^3 + \imath| < \varepsilon$$

Que podemos sintetizar como:

$$\lim_{z \to \imath} f(z) = -\imath$$

Teorema 2.1. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. Se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ então $w_0 = w_1$.*

OBS 2.9. O teorema acima garante que se existe o limite de $f(\bullet)$ em um ponto z_0 então este limite é único.

Teorema 2.2. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa de componentes $f(z) = f(x+y\imath) = u(x,y)+v(x,y)\imath$, $z_0 = x_0+y_0\imath \in D$ e $w_0 = u_0+v_0\imath \in \mathbb{C}$. Então $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ se, somente se: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0$ e $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$.*

Temos também o seguinte teorema que sintetiza algumas das propriedades referentes a operações com limites.

Teorema 2.3. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f, g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas e $z_0 \in D$ tais que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f_0$ e $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = g_0$ então:*

i) $\lim\limits_{z\to z_0}(f+g)(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = f_0 + g_0$

ii) $\lim\limits_{z\to z_0}(f-g)(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) - \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = f_0 - g_0$

iii) $\lim\limits_{z\to z_0}(f.g)(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z). \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = f_0.g_0$

iv) $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} = \dfrac{f_0}{g_0}$ *se* $g_0 \neq 0$

OBS 2.10. As propriedades dos limites de funções complexas resumida no **teorema 2.3** nostra basicamente que limites de funções complexas têm as mesmas propriedades que funções de valores reais quanto a operações com limites.

2.5 Continuidade de Funções complexas

E vamos à definição de imediato.

Definição 2.10. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $F : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. Dizemos que $f(\bullet)$ é contínua se, somente se:

$$\lim_{z \to z_)} f(z) = f(z_0)$$

OBS 2.11. A equação da definição acima sintetiza três requisitos para a continuidade de uma função em um ponto. Primeiro a função tem que ser definida no ponto. Segundo o limite $\lim\limits_{z \to z_)} f(z)$ existe. E terceiro é requerida a igualdade $\lim\limits_{z \to z_)} f(z) = f(z_0)$.

OBS 2.12. Se a função $f(\bullet)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio D dizemos simplesmente que $f(\bullet)$ é uma função contínua.

O seguinte teorema caracteriza algumas das propriedades referentes a funções contínuas.

Teorema 2.4. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f, g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ e duas funções complexas contínuas em D e $z_0 \in D$ então:*

i) $(f + g)(z)$ *é contínua em* z_0

ii) $(f - g)(z)$ *é contínua em* z_0

iii) $(f.g)(z)$ *é contínua em* z_0

iv) $\dfrac{f}{g}(z)$ *é contínua em* z_0 *se* $g(z) \neq 0, \forall z \in D$

OBS 2.13. As propriedades acima decorrem imediatamente das propriedades das operações com limites.

Teorema 2.5. *Sejam $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, abertos de $\mathbb{C}$, $f : D_2 \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ e $g : D_1 \subset \mathbb{C} \mapsto D_2 \subset \mathbb{C}$ duas funções complexas contínuas em D_2 e D_1 respectivamente e $z_0 \in D_1$ então:*

$$\lim_{z \to z_0} (f \circ g)(z) = f(g(z_0))$$

OBS 2.14. O teorema acima diz em outras palavras que a composta de funções contínua é também uma função contínua.

2.6 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que as mesmas noções topológicas de $\mathbb{R}^2$ podem ser estendidas ao plano complexo e que limites de funções de valores complexos comportam-se tal e qual limites de funções de valores reais, possuindo basicamente as mesmas propriedades no que se refere às operações com limites.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 02 constam os seguintes tópicos:

Topologia do Plano Complexo

Definimos os seguintes conceitos topológicos no plano complexo:

Bola Aberta

Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto do plano complexo e $r > 0$ um real positivo. definimos a bola aberta de centro em z_0 e raio r por:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$$

Bola Fechada

Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto do plano complexo e $r > 0$ um real positivo. definimos a bola fechada de centro em z_0 e raio r por:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq r\}$$

Conjunto Aberto

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo. Dizemos que D é um conjunto aberto se, somente se: Para todo $z \in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subset D$.

Conjunto Fechado

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo. Dizemos que D é um conjunto fechado se, somente se se complementar $\complement_{\mathbb{C}}(D)$ em relação a $\mathbb{C}$ for aberto.

Ponto Interior

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in D$. Dizemos que z é um ponto interior de D se, somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subset D$.

Ponto Exterior

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in C$. Dizemos que z é um ponto exterior de D se, somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subset \complement_{\mathbb{C}}(D)$.

Ponto de Fronteira

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in C$. Dizemos que z é um ponto de fronteira de D se, somente se para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(z) \cap D \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(z) \cap \complement_{\mathbb{C}}(D) \neq \emptyset$.

Ponto de Acumulação

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto do plano complexo e $z \in C$. Dizemos que z é um ponto de acumulação de D se, somente se para todo $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z) \cap D \neq \emptyset$.

Funções Complexas

Podemos representar funções complexas de diversas formas como:

Para $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ podemos escrever:

$w = f(z)$ ou

Se $z = x + y\imath$ podemos escrever $f(z) = f(x + y\imath) = u(x, y) + v(x, y)\imath$ onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são ditas componentes de $f(\bullet)$.

Limites de Funções Complexas

Quanto a limites de funções complexas destacamos os seguintes tópicos:

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa de domínio D aberto e $z_0 \in D$. Dizemos que $L \in \mathbb{C}$ é o limite de $f(z)$ quando z tende a z_0, denotado $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ se, somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$ temos $f(z) \in B_\varepsilon(L)$

Teorema 1

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. Se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ então $w_0 = w_1$.

Teorema 2

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa de componentes $f(z) = f(x + y\imath) = u(x, y) + v(x, y)\imath$, $z_0 = x_0 + y_0\imath \in D$ e $w_0 = u_0 + v_0\imath \in \mathbb{C}$. Então $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ se, somente se: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$.

Teorema 3 (Operações com Limites)

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f, g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas e $z_0 \in D$ tais que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f_0$ e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g_0$ então:

i) $\lim\limits_{z \to z_0} (f + g)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_0 + g_0$

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} (f - g)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) - \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_0 - g_0$

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} (f.g)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z). \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_0.g_0$

iv) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{f_0}{g_0}$ se $g_0 \neq 0$

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $F : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. Dizemos que $f(\bullet)$ é contínua se, somente se:

$$\lim_{z \to z_{)}} f(z) = f(z_0)$$

Propriedades da Funções Contínuas

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f, g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas e $z_0 \in D$ tais que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f_0$ e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g_0$ então:

i) $\lim\limits_{z \to z_0} (f + g)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_0 + g_0$

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} (f - g)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) - \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_0 - g_0$

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} (f.g)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z). \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = f_0.g_0$

iv) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{f_0}{g_0}$ se $g_0 \neq 0$

PRÓXIMA AULA

A nossa próxima aula será dedicada à ”Derivação de Funções Complexas´´ onde veremos que a estrutura multiplicativa do corpo dos números complexos faz com que a derivação no plano complexo seja significativamente diferente da derivação em $\mathbb{R}^2$.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 2.1. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por: $f(z) = \begin{cases} z^2 & , z \neq \imath \\ 0 & , z = \imath \end{cases}$.
Mostrar que o limite de $f(z)$ quando z tende a $\imath$ é -1.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo, ele lhe servirá de guia.

ATIV. 2.2. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por: $f(z) = az^2 + bz + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Mostrar que $f(\bullet)$ é contínua em z_0.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo, ele lhe servirá de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.