AULA

3

Derivação Complexa

META:

Introduzir o conceito de derivada de funções de variáveis complexas.

OBJETIVOS:

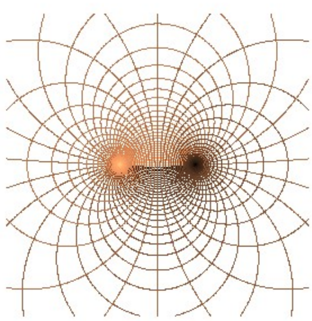
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir derivada de funções de variáveis complexas e

determinar a derivada de algumas funções de variáveis complexas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula02 de Variáveis Complexas e os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo II.



3.1 Introdução

Caros alunos em nossa aula de hoje veremos a Derivação Complexa. Em muitos aspectos a derivação complexa tem as mesmas propriedades da derivação real. Em outros porém a derivação complexa é peculiar e estas peculiaridades serão parte do tema de nossa aula.

3.2 Derivação Complexa

Iniciaremos pela definição de derivada de uma função complexa.

Definição 3.1. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ aberto, $z_0 \in D$ e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa. Definimos a derivada de $f(\bullet)$ no ponto z_0, denotada $f'(z_0)$, por:

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{3.7}$$

OBS 3.1. Está implícito na definição acima que a derivada de $f(\bullet)$ é dada pela expressão à direita se, somente se o limite existe. Podemos expressar também o limite usando uma nova variável $\Delta z = z - z_0$, $z = z_0 + \Delta z$, onde Δz é escolhido de modo que tenhamos $z \in D$.

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{3.8}$$

OBS 3.2. Para que a derivada de $f(\bullet)$ exista em um ponto $z_0 \in D$ é necessário que o limite da definição seja independente da maneira como z se aproxima de z_0.

Vejamos, agora, dois exemplos:

Exemplo 3.1. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$. Calculemos sua derivada.

SOLUÇÃO: Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{(z_0+\Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z}\\
&= \frac{z_0^3 + 3z_0^2\Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z}\\
&= \frac{3z_0^2\Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z}\\
&= 3z_0^2 + 3z_0\Delta z + (\Delta z)^2
\end{aligned}$$

Passando o limite $\Delta z \to 0$ e usando a definição de derivada **eqn 3.8** temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}(3z_0^2 + 3z_0\Delta z + (\Delta z)^2)\\
f'(z_0) &= 3z_0^2 \ \square
\end{aligned}$$

Vamos ao segundo exemplo:

Exemplo 3.2. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = |z|^2$. Calculemos sua derivada.

SOLUÇÃO: Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{|z_0+\Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}\\
&= \frac{(z_0+\Delta z)\overline{(z_0+\Delta z)} - z_0\bar{z}_0}{\Delta z}\\
&= \frac{z_0\bar{z}_0 + \bar{z}_0\Delta z + z_0\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z_0\bar{z}_0}{\Delta z}\\
&= \frac{\bar{z}_0\Delta z + z_0\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}\\
&= \bar{z}_0 + z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{\Delta z}
\end{aligned}$$

Vamos passar o limite $\Delta z \to 0$ por dois caminhos distintos.

Caminho 1: Vamos fazer $\Delta z \to 0$ seguindo um caminho paralelo ao eixo real. Neste caso $\Delta z = \Delta x + 0\imath = \Delta x$, $\overline{\Delta z} = \Delta x - 0\imath = \Delta x$.

Daí, $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$. E passando o limite $\Delta z \to 0$ que é equivalente, neste caso a $\Delta x \to 0$ temos:

$$f'(z_0) = \bar{z}_0 + z_0$$

Caminho 2: Vamos fazer $\Delta z \to 0$ seguindo um caminho paralelo ao eixo imaginário. Neste caso $\Delta z = 0 + \Delta y\imath = \imath\Delta y$, $\overline{\Delta z} = 0 - \Delta y\imath = -\imath\Delta y$. Daí, $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$. E passando o limite $\Delta z \to 0$ que é equivalente, neste caso a $\Delta y \to 0$ temos:

$$f'(z_0) = \bar{z}_0 - z_0$$

Daí, $f(z) = |z|^2$ não é derivável em ponto nenhum do plano complexo, exceto em $z_0 = 0$. $\square$

3.3 Regras de Derivação Complexa

Se $f(\bullet)$ e $g(\bullet)$ são funções deriváveis em um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ então valem as seguintes regras de derivação:

1. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
2. $(f - g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0)$
3. $(f.g)'(z_0) = f(z_0).g'(z_0) + g(z_0).f'(z_0)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f(z_0).g'(z_0) - g(z_0).f'(z_0)}{g^2(z_0)}$ se $g(z_0) \neq 0$

Demonstraremos, agora, uma das regras de derivação complexa. A saber.

Se $f(\bullet)$ e $g(\bullet)$ são funções deriváveis em um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ então vale a seguinte regra de derivação:
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f(z_0).g'(z_0) - g(z_0).f'(z_0)}{g^2(z_0)}$ se $g(z_0) \neq 0$.

PROVA: Para simplificar trocaremos Δz por λ. Usando a definição de derivada complexa temos:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(z_0+\lambda)-\left(\frac{f}{g}\right)(z_0)}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{f(z_0+\lambda)}{g(z_0+\lambda)}-\frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{f(z_0+\lambda)g(z_0)-f(z_0)g(z_0+\lambda)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)}}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(z_0+\lambda)g(z_0)-f(z_0)g(z_0+\lambda)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)\lambda}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Adicionando o termo nulo $-f(z_0)g(z_0)+f(z_0)g(z_0)$ ao denominador da equação **eqn 3.9.4** acima temos:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(z_0+\lambda)g(z_0)-f(z_0)g(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)\lambda}\\
&- \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(z_0)g(z_0+\lambda)-f(z_0)g(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{g(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)}\frac{f(z_0+\lambda)-f(z_0)}{\lambda}\\
&- \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)}\frac{g(z_0+\lambda)-g(z_0)}{\lambda}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{g(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)}\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(z_0+\lambda)-f(z_0)}{\lambda}\\
&- \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)}\lim_{\lambda\to 0}\frac{g(z_0+\lambda)-g(z_0)}{\lambda}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Como as funções $f(\bullet)$ e $g(\bullet)$ são deriváveis, são também contínuas e da definição de derivada complexa temos:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{g(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)} = \frac{g(z_0)}{gr(z_0)}$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(z_0)}{g(z_0+\lambda)g(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g^2(z_0)}$$
$$f'(z_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(z_0+\lambda)-f(z_0)}{\lambda}$$
$$g'(z_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(z_0+\lambda)-g(z_0)}{\lambda}$$

Logo a última equação **eqn 3.10.3** passa a:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{g(z_0)}{g^2(z_0)}f'(z_0) - \frac{f(z_0)}{g^2(z_0)}g'(z_0)\\ &= \frac{g(z_0)f'(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \ \square\end{aligned}$$

3.4 Equações de Cauchy-Riemann

Nesta seção estabeleceremos condições necessárias e suficiente para garantir a existência da derivada de uma função de variáveis complexas em um ponto do plano complexo.

Teorema 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e suponhamos que $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + v(x,y)\imath$ e $f'(z)$ existam na vizinhança de um ponto $z_0 = x_0 + y_0\imath \in \mathbb{C}$. Então as derivadas parciais de primeira ordem de u e v com relação a x e a y existem e satisfazem:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{3.11}$$

PROVA: Da hipótese do teorema $f(z) = u(x,y)+v(x,y)\imath$ e $f'(z)$ estão definidas em uma vizinhança do ponto $z_0 = x_0 + y_0\imath \in \mathbb{C}$. Da definição de derivada temos:

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{3.12}$$

Podemos tomar dois casos (caminhos):

Caso 1 podemos fazer $z \to z_0$ seguindo o caminho $z = x + y_0\imath$, $z - z_0 = x + y_0\imath - (x_0 + y_0\imath) = x - x_0$ que é equivalente a $x \to x_0$ e temos:

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y_0) + v(x, y_0)\imath - u(x_0+, y_0) - v(x_0, y_0)\imath}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \imath\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

Passando o limite $z \to z_0$ (de forma equivalente) $x \to x_0$ temos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\imath\end{aligned} \tag{3.13}$$

Caso 2 podemos fazer $z \to z_0$ seguindo o caminho $z = x_0 + y\imath$, $z - z_0 = x_0 + y\imath - (x_0 + y_0\imath) = (y - y_0)\imath$ que é equivalente a $y \to y_0$ e temos:

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0, y) + v(x_0, y)\imath - u(x_0+, y_0) - v(x_0, y_0)\imath}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{(y - y_0)\imath} + \imath\frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{(y - y_0)\imath} \\ &= -\imath\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{(y - y_0)}\end{aligned}$$

Passando o limite $z \to z_0$ (de forma equivalente) $x \to x_0$ temos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y\to y_0} -\imath\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{(y - y_0)} \\ f'(z_0) &= -\imath\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\imath\end{aligned} \tag{3.14}$$

Comparando as equações **eqn 3.13.3** e **eqn 3.14.3** temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\imath = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\imath$$

Da igualdade de números complexos temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \ \square$$

Antes de provar a suficiência, provaremos um lema que será muito útil.

Lema 3.1. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais e D, contínuas em $(x_0, y_0) \in D$. Então:*

$$f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta + \xi\lambda + \zeta\eta$$

onde $\xi \to 0$ e $\zeta \to 0$ quando $\lambda \to 0$ e $\eta \to 0$.

PROVA: Começamos por escrever a diferença $f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0)$ como:

$$\begin{aligned} f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) &= f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0+\eta) \\ &\quad + f(x_0, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Do teorema do valor médio para funções de uma variável real existe $t \in (0,1)$ tal que:

$$f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0+\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t\lambda, y_0+\eta)\lambda$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em D a diferença:

$$\xi(\lambda, \eta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t\lambda, y_0+\eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

tende a zero quando $\lambda \to 0$ e $\eta \to 0$. Daí, temos:

$$f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0+\eta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \xi\right)\lambda \tag{3.16}$$

Do mesmo modo temos:

$$f(x_0, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \zeta\right)\eta \qquad (3.17)$$

portanto das equações **eqn 3.15**, **eqn 3.16** e **eqn 3.17** temos

$$f(x_0+\lambda, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta + \xi\lambda + \zeta\eta$$

e fica provado o lema. □

Vamos, agora, provar a suficiência.

Teorema 3.2. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e suponhamos que $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ seja uma função complexa tal que as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ existam em D e são contínuas em $z_0 = x_0 + y_0\imath$. Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em z_0,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

então f é derivável em z_0.

PROVA: Como, da hipótese, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ são contínuas, aplicando o lema a $u(x, y)$, temos:

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x_0 + \lambda, y_0 + \eta) - u(x_0, y_0)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\lambda + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\eta + \xi_1\lambda + \zeta_1\eta\end{aligned} \qquad (3.18)$$

onde $\xi_1 \to 0$ e $\zeta_1 \to 0$ quando $\lambda \to 0$ e $\eta \to 0$.

Do mesmo modo, Como, da hipótese, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ são contínuas, aplicando o lema a $v(x, y)$, temos:

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x_0 + \lambda, y_0 + \eta) - v(x_0, y_0)\\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\lambda + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\eta + \xi_2\lambda + \zeta_2\eta\end{aligned} \qquad (3.19)$$

onde $\xi_2 \to 0$ e $\zeta_2 \to 0$ quando $\lambda \to 0$ e $\eta \to 0$. Das equações **eqn 3.18** e **eqn 3.19** temos:

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta u + \Delta v \imath \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\imath\right)\lambda + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\imath\right)\eta + \xi\lambda + \zeta\eta\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde omitimos o argumento (x_0, y_0) das derivadas parciais e $\xi = \xi_1 + \xi_2$ e $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$.

Das equações de Cauchy-Riemann podemos reescrever a equação **eqn 3.20** como:

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\imath\right)\lambda + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\imath\right)\eta + \xi\lambda + \zeta\eta \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\imath\right)(\lambda + \eta\imath) + \xi\lambda + \zeta\eta\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dividindo a equação **eqn 3.21** por $\Delta z = \lambda + \eta\imath$ temos:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\imath\right) + \frac{\xi\lambda + \zeta\eta}{\lambda + \eta\imath} \tag{3.22}$$

Antes de fazer $\Delta z \to 0$ em **eqn 3.22** temos que mostrar que $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\xi\lambda + \zeta\eta}{\lambda + \eta\imath} = 0$. Para isto tomando o módulo da expressão e usando a desigualdade triangular temos:

$$\left|\frac{\xi\lambda + \zeta\eta}{\lambda + \eta\imath}\right| \leq |\xi|\left|\frac{\lambda}{\lambda + \eta\imath}\right| + |\zeta|\left|\frac{\eta}{\lambda + \eta\imath}\right| \tag{3.23}$$

Como $\left|\dfrac{\lambda}{\lambda + \eta\imath}\right| = \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \leq 1$ e $\left|\dfrac{\eta}{\lambda + \eta\imath}\right| = \dfrac{|\eta|}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \leq 1$ podemos reescrever **eqn 3.23** como:

$$0 \leq \left|\frac{\xi\lambda + \zeta\eta}{\lambda + \eta\imath}\right| \leq |\xi| + |\zeta| \tag{3.24}$$

Passando o limite $\Delta z \to 0$ em **eqn 3.24** lembrando que $\xi \to 0$ e $\zeta \to 0$ quando $\Delta z \to 0$ temos:

$$0 \leq \left|\frac{\xi\lambda + \zeta\eta}{\lambda + \eta\imath}\right| \leq 0$$

e portanto $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\xi\lambda + \zeta\eta}{\lambda + \eta\imath} = 0$ e passando o limite $\Delta z \to 0$ em **eqn 3.22** temos:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\imath$$

Portanto a derivada $f'(z_0)$ existe e é única. $\square$

Agora um exemplo de aplicação das equações de Cauchy-Riemann. Em seção anterior vimos que a função $f(z) = z^3$ era derivável usando para isso a definição de derivada complexa. Por outro lado podemos expressar a função em suas componentes reais e imaginárias da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(z) = z^3 = f(x + y\imath) &= (x + y\imath)^3 \\ &= (x + y\imath)^2 (x + y\imath) \\ &= (x^2 - y2 + 2xy\imath)(x + y\imath) \\ &= x^3 - 3xy^2 + (3x^2 y - y^3)\imath \end{aligned}$$

Temos então $u(x, y) = x^3 - 3xy^3$ e $v(x, y) = 3x^2 - y^3$. Derivando com relação a x e a y temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

Vemos pois, que as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

são satisfeitas para todo $z = x + y\imath \in \mathbb{C}$.

3.5 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que derivação de funções complexas em alguns aspectos é semelhante à derivação de funções reais enquanto que em outros aspectos diferem sensivelmente.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 03 constam os seguintes tópicos:

Derivação Complexa

Definição da derivação complexa:

DEFINIÇÃO: Sejam $D \subset \mathbb{C}$ aberto, $z_0 \in D$ e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa. Definimos a derivada de $f(\bullet)$ no ponto z_0, denotada $f'(z_0)$, por:

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Regras de Derivação Complexa

Para a derivação complexa temos, entre outras, as seguintes regras:

1. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

2. $(f - g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0)$

3. $(f.g)'(z_0) = f(z_0).g'(z_0) + g(z_0).f'(z_0)$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f(z_0).g'(z_0) - g(z_0).f'(z_0)}{g^2(z_0)}$ se $g(z_0) \neq 0$

Equações de Cauchy-Riemann

Os seguintes teoremas constituem condições necessária e suficiente (respectivamente) para a derivabilidade de uma função complexa:

TEOREMA: (condição necessária)

Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e suponhamos que $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\imath$ e $f'(z)$ existam na vizinhança de um ponto $z_0 = x_0 + y_0\imath \in \mathbb{C}$. Então as derivadas parciais de primeira ordem de u e v com relação a x e a y existem e satisfazem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

TEOREMA: (condição suficiente)

Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e suponhamos que $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ seja uma função complexa tal que as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ existam em D e são contínuas em $z_0 = x_0 + y_0\imath$. Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em z_0,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos mais alguns aspectos da derivação de funções complexas. Em particular funções holomorfas e a ligação de funções harmonicas com a derivação complexa.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades o cálculo de algumas integrais duplas.

ATIV. 3.1. Se $f(\bullet)$ e $g(\bullet)$ são funções deriváveis em um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ então vale a seguinte regra de derivação:
$(f.g)'(z_0) = f(z_0).g'(z_0) + g(z_0).f'(z_0)$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção a demonstração de uma das regras de derivação complexa, ela lhe servirá de guia.

ATIV. 3.2. Mostre que as componentes da função complexa $f(x+y\imath) = \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(y)\imath$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

Comentário: Reveja as derivadas das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.