AULA 4

Mais Alguns Aspectos da Derivação Complexa

META:

Introduzir o conceito de funções holomorfas.

OBJETIVOS:

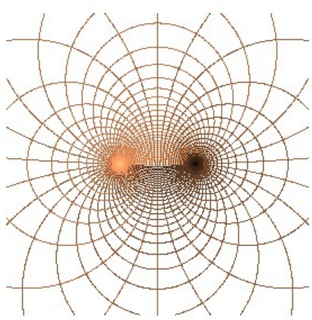
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir funções holomorfas e

determinar se uma dada função de variáveis complexas é holomorfa.

PRÉ-REQUISITOS

Aula03 de Variáveis Complexas e os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo II.



4.1 Introdução

Caros alunos em nossa aula de hoje veremos mais alguns aspectos da derivação de funções complexas. Em particular funções holomorfas e mostraremos algumas funções holomorfas. Veremos também, a ligação de funções harmônicas com a derivação complexa. Para concluir veremos a forma polar das equações de Cauchy-Riemann.

4.2 Funções Holomorfas

Iniciaremos pela definição de função holomorfa.

Definição 4.1. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in D$. Dizemos que $f(\bullet)$ é holomorfa em $z_0 \in D$ se, somente se existe $\delta > 0$ tal que $f'(z)$ existe para todo $z \in B_\delta(z_0)$.

e também,

Definição 4.2. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que $f(\bullet)$ é holomorfa em D se, somente se $f'(z)$ existe para todo $z \in D$.

OBS 4.1. Para que uma função seja holomorfa em um ponto não é suficiente que seja derivável neste ponto. É necessário que seja derivável em uma vizinhança do ponto em questão.

OBS 4.2. Dada uma função complexa $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $z = x + y\boldsymbol{\imath}$, $f(z) = u(x,y) + v(x,y)\boldsymbol{\imath}$. Como $\bar{z} = x - y\boldsymbol{\imath}$ podemos escrever: $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2\boldsymbol{\imath}}$. Dai, para $f(z)$ temos:

$$f(z) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\boldsymbol{\imath}}\right) + v\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\boldsymbol{\imath}}\right)\boldsymbol{\imath} \tag{4.25}$$

por outro lado, derivando as expressões para x e y em função de z e $\bar{z}$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial z} &= 1/2\\ \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} &= 1/2\imath\\ \frac{\partial y}{\partial z} &= 1/2\\ \frac{\partial i}{\partial \bar{z}} &= -1/2\imath\end{aligned} \tag{4.26}$$

Derivando a equação **4.25** com relação a $\bar{z}$, usando a regra da cadeia, as equações **4.26** e levando em conta que $\frac{1}{\imath} = -\imath$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)\imath\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2\imath}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2\imath}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\imath\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\imath + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\imath - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\imath\end{aligned} \tag{4.27}$$

Se $f(\bullet)$ for holomorfa satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em todos os pontos de D i.e. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Dai, da equação **4.27** concluímos que: se $f(\bullet)$ for holomorfa então $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$ em todo $z \in D$. Em outras palavras uma função é holomorfa quando não depende de $\bar{z}$.

OBS 4.3. As equações de Cauchy-Riemann oferecem uma condição suficiente pa identificação de funções holomorfas i.e. se em $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\imath$, $u(\bullet, \bullet)$, $v(\bullet, \bullet)$ e suas derivadas são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann então $f(\bullet)$ é uma função holomorfa.

Exemplo 4.1. A função $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ é uma função holomorfa. Senão vejamos:

É fácil verificar que:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1})$$

Dai, temos:

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}$$

Passando o limite $z \to z_0$ e usando a definição de derivada temos:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\
&= z_0^{n-1} + z_0^{n-2}z_0 + \cdots + z_0 z_0^{n-2} + z_0^{n-1} \\
&= \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1} + z_0^{n-1}}_{n \text{ vezes}} \\
&= nz_0^{n-1}
\end{aligned}$$

Daí, $f(z) = z^n$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ i.e. $f'(z)$ existe em todo o plano complexo.

Por outro lado.

Exemplo 4.2. A função $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$ não é holomorfa em ponto nenhum de $\mathbb{C}$. Pois, da observação acima temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2\frac{\bar{z}}{z} \neq 0, \;\; z \neq 0$$

Por outro lado no ponto $z = 0$ temos:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2}$$

Se a derivada existe em $z = 0$ ela terá que ser independente do caminho com que $z \to 0$. Vamos escolher três caminhos distintos:

Caminho 1: ao longo do eixo real x. Daí, $z = x + 0\imath$, $\bar{z} = x - 0\imath$ e $z \to 0$ equivale a $x \to 0$.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - 0\imath)^2}{(x + 0\imath)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Caminho 2: ao longo do eixo imaginário y. Daí, $z = 0 + y\imath$, $\bar{z} = 0 - y\imath$ e $z \to 0$ equivale a $y \to 0$.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(0 - y\imath)^2}{(0 + y\imath)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-y^2}{-y^2} = 1$$

Como a avaliação da derivada de $f(\bullet)$ no ponto zero seguindo os caminhos 1 e 3 são iguais temos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z = 0$ pois, as equações de Cauchy-Riemann são obtidas de derivações seguindo os eixos real e imaginário. No entanto para o caminho 3 temos:

Caminho 3: ao longo da reta $y = x$. Daí, $z = x + x\imath$, $\bar{z} = x - x\imath$ e $z \to 0$ equivale a $x \to 0$.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - x\imath)^2}{(x + x\imath)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 - \imath)^2}{x(1 + \imath)^2} = \frac{(1 - \imath)^2}{(1 + \imath)^2} = -1$$

Vemos daí, que $f(\bullet)$ também não é derivável em $z = 0$.

Vamos agora a mais uma definição.

Definição 4.3. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é uma função inteira se holomorfa em todo $\mathbb{C}$.

OBS 4.4. A função $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, conforme o exemplo acima é uma função inteira.

Vamos encerrar esta seção com um teorema que será usado mais tarde.

Teorema 4.1. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função holomorfa em D e $z_0 \in D$ então:*

$$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$$

onde $\lim_{z \to z_0} \eta = 0$.

PROVA: Definindo η por:

$$\eta = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z - 0)$$

temos que:

$$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$$

Por outro lado, como $f(\bullet)$ é holomorfa em D é , em particular, holomorfa em z_0 e:

$$\lim_{z \to z_0} \eta = \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z - 0) \right\} = f'(z_0) - f'(z_0) = 0 \ \square$$

4.3 Forma Polar das Equações de Cauchy-Riemann

Podemos expressar as equações de Cauchy-Riemann usando coordenadas polares (forma polar de números complexos). A saber:

Teorema 4.2. *As equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, são dadas por:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{4.28}$$

PROVA: Em coordenadas polares temos: $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ e suas inversas: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. derivando temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos(\theta)}{r} = \cos(\theta)\\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin(\theta)}{r} = \sin(\theta)\\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos(\theta)}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}\\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Usando a regra da cadeia para funções de duas variáveis reais e as equações **eqn 4.29** para a função $u(\bullet,\bullet)$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin(\theta)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Do mesmo modo para a função $v(\bullet,\bullet)$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\
&= \frac{\partial v}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin(\theta)\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\\
&= \frac{\partial v}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Da equação de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, usando as equações **eqn 4.30.1** e **eqn 4.31.2** temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos(\theta) - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin(\theta) = 0 \tag{4.32}$$

Da mesma forma, da equação de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, usando as equações **eqn 4.30.2** e **eqn 4.31.1** temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin(\theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos(\theta) = 0 \tag{4.33}$$

Fazendo o produto da equação **eqn 4.32** por $\cos(\theta)$ e da equação **eqn 4.33** por $\sin(\theta)$ e somando temos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \tag{4.34}$$

Fazendo o produto da equação **eqn 4.32** por $\sin(\theta)$ e da equação **eqn 4.33** por $\cos(\theta)$ e subtraindo temos:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \tag{4.35}$$

As equações **eqn 4.34** e **eqn 4.35** constituem-se a forma polar das equações de Cauchy-Riemann. $\square$

OBS 4.5. Veremos aqui como derivar uma função complexa dada na forma polar.

Seja $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada na forma polar:

$$f(z) = f(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath)) = u(r,\theta) + v(r,\theta)\imath \tag{4.36}$$

Derivando a equação **eqn 4.36** com relação a r e usando em $f(\bullet)$ a regra da cadeia lembrando que $\dfrac{\partial}{\partial r}(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath)) = \cos(\theta) + \sin(\theta)\imath$ temos:

$$f'(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath)).(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath) = \frac{\partial u}{\partial r}(\theta) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\imath$$

Fazendo o produto da equação acima por $\cos(\theta) - \sin(\theta)\imath$ e lembrando que $(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath).(\cos(\theta) - \sin(\theta)\imath) = 1$ e $\cos(\theta) - \sin(\theta)\imath = \cos(-\theta) + \sin(-\theta)\imath$ temos:

$$f'(z) = (\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\imath).\left(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\imath\right) \tag{4.37}$$

Por outro lado, derivando a equação **eqn 4.36** com relação a θ e usando em $f(\bullet)$ a regra da cadeia lembrando que $\dfrac{\partial}{\partial \theta}(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath)) = r(-\sin(\theta) + \cos(\theta)\imath)$ temos:

$$f'(r(\cos(\theta)+\sin(\theta)\imath)).(r(-\sin(\theta)+\cos(\theta)\imath)) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)+\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\imath$$

Levando em conta que $\frac{1}{\imath} = -\imath$ temos: $r(-\sin(\theta) + \cos(\theta)\imath) = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath).\imath$ e a equação acima pode ser reescrita como:

$$f'(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath)).(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath))\imath = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta)\imath$$

Fazendo o produto da equação acima por $\frac{1}{r\imath}(\cos(\theta) - \sin(\theta)\imath)$ e lembrando que $(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath).(\cos(\theta) - \sin(\theta)\imath) = 1$ e $\cos(\theta) - \sin(\theta)\imath = \cos(-\theta) + \sin(-\theta)\imath$ temos:

$$f'(z) = \frac{1}{r\imath}(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\imath).\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta)\imath\right) \qquad (4.38)$$

4.4 Funções Harmônicas

Nesta seção veremos que as componentes de uma função complexa holomorfa são funções harmônicas. Começando pela definição

Definição 4.4. Seja $u : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que $u(\bullet, \bullet)$ é harmônica em D se, somente se suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem são contínuas em D e satisfazem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.39)$$

OBS 4.6. A equação **eqn 4.39** é conhecida com equação de Laplace no plano.

Seja $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa holomorfa em D. Veremos em uma aula mais adiante que neste caso tanto $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\imath$ quanto suas componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em D. Além de que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. A saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \qquad (4.40)$$

Daí, derivando **eqn 4.40.1** com relação a x e **eqn 4.40.2** com relação a y temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Levando em conta que as derivadas parciais de $u(\bullet, \bullet)$ e $v(\bullet, \bullet)$ são contínuas temos que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$. Daí, somando as equações **eqn 4.41.1** e **eqn 4.41.2** temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4.42}$$

Do mesmo modo podemos mostrar que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{4.43}$$

E portanto, $u(\bullet, \bullet)$ e $v(\bullet, \bullet)$ são funções harmônicas.

OBS 4.7. Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são componentes de uma função $f(z) = u(x, y) + v(x, y)\imath$ holomorfa em algum domínio $D \subset \mathbb{C}$ dizemos que u e v são funções harmônicas conjugadas.

Veremos agora um exemplo, de como partindo de uma função harmônica $u(x, y)$ determinar sua harmônica conjugada $v(x, y)$ e reconstruir a função holomorfa $f(z)$ cujos componentes são $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

Exemplo 4.3. Dada $u(x, y) = 2x(1 - y)$. Mostre que $u(x, y)$ é harmônica, determine sua harmônica conjugada $v(x, y)$ e a função holomorfa $f(z)$ cujos componentes são $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

SOLUÇÃO: derivando parcialmente $u(x, y)$ com relação a x e a

y duas vezes temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2(1-y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Somando as equações **eqn 4.44.2** e **eqn 4.44.4** temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Logo $u(x, y)$ é uma função harmônica.

Vejamos agora como utilizar as equações de Cauchy-Riemann para determinar a harmônica conjugada de $u(x, y)$. As equações de Cauchy-Riemann em coordenadas cartesianas são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.45}$$

Das equações **eqn 4.45.1** e **eqn 4.44.1** e integrando temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= 2(1-y) \\ v(x, y) &= \int 2(1-y)dy \\ &= 2y - y^2 + h(x) \end{aligned} \tag{4.46}$$

onde $h(x)$ é uma função a ser determinada.

Derivando a equação **eqn 4.46.3** com relação a x temos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = h'(x) \tag{4.47}$$

Substituindo as equações **eqn 4.47** e **eqn 4.44.3** em **eqn 4.45.2** e integrando temos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x \\ h(x) &= \int 2x dx \\ &= x^2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Substituindo a equação **eqn 4.48.3** em **eqn 4.46.3** temos:

$$v(x,y) = 2y + x^2 - y^2 \tag{4.49}$$

A equação **eqn 4.49** é a harmônica conjugada de $u(x,y)$. a função $f(z) = u(x,y) + v(x,y)\boldsymbol{\imath}$ é portanto holomorfa e é dada por:

$$f(z) = f(x + y\boldsymbol{\imath}) = 2x(1-y) + (2y + x^2 - y^2)\boldsymbol{\imath} \tag{4.50}$$

Fazendo em **eqn 4.49** $y = 0$ temos:

$$f(x + 0\boldsymbol{\imath}) = f(x) = 2x + x^2\boldsymbol{\imath}$$

Logo temos:

$$f(z) = 2z + \boldsymbol{\imath}z^2$$

4.5 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que derivação de funções complexas em alguns aspectos é semelhante à derivação de funções reais enquanto que em outros aspectos diferem sensivelmente.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 04 constam os seguintes tópicos:

Funções Holomorfas

Definição de Função Holomorfa em um ponto.

DEFINIÇÃO: Sejam $D \subset \mathbb{C}$ aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in D$. Dizemos que $f(\bullet)$ é holomorfa em $z_0 \in D$ se,somente se existe $\delta > 0$ tal que $f'(z)$ existe para todo $z \in B_\delta(z_0)$.

Definição de função holomorfa.

DEFINIÇÃO: Sejam $D \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que $f(\bullet)$ é holomorfa em D se,somente se $f'(z)$ existe para todo $z \in D$.

Definição de função inteira.

DEFINIÇÃO: Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é uma função inteira se holomorfa em todo $\mathbb{C}$.

Forma Polar das Equações de Cauchy-Riemann

As equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{4.51}$$

Derivação de Funções Complexas na Forma Polar

Derivação com relação a r:

$$f'(z) = (\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\boldsymbol{\imath}).\left(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\boldsymbol{\imath}\right)$$

Derivação com relação a θ:

$$f'(z) = \frac{1}{r\boldsymbol{\imath}}(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\boldsymbol{\imath}).\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\boldsymbol{\imath}\right)$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula vamos começar o estudo da extensão da definição de algumas funções do campo real para o campo complexo. Em particular as funções exponencial e sua inversa a função logaritmo.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 4.1. Dada $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$. Mostre que $u(x, y)$ é harmônica, determine sua harmônica conjugada $v(x, y)$ e a função holomorfa $f(z)$ cujos componentes são $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos eles lhes servirão de guia.

ATIV. 4.2. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(\bullet)$ é uma função holomorfa

Comentário: Use o fato de que $f(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é uma função holomorfa.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.
SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.
BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.