AULA 5

Funções Elementares do Cálculo Complexos 1

META:

Definir algumas funções elementares no campo dos complexos.

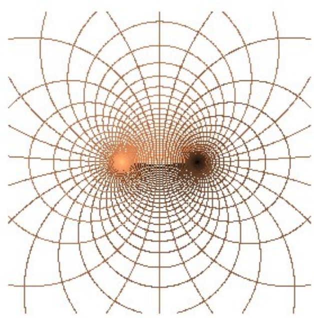
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir algumas funções elementares no campo dos complexos e provar algumas de suas propriedades.

PRÉ-REQUISITOS

Aula 01 de Variáveis Complexas.



5.1 Introdução

Caros alunos iniciaremos o estudo de algumas funções de variáveis complexas. Estenderemos, nesta aula, as definições das funções exponencial e logaritmo ao domínio dos números complexos e estudaremos algumas de suas propriedades.

5.2 Função Exponencial

Se uma função $f(\bullet)$ de variável complexa $z = x + u\imath$ se reduzirá, no campo dos reais, a velha e conhecida função exponencial devemos exigir que:

$$f(x + 0\imath) = e^x$$

para todo real x. Com isto em mente vamos à definição.

Definição 5.1. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função exponencial calculada no ponto $z = x + y\imath$, denotada $\exp(z)$ é definida por:

$$\exp(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos(y) + \sin(y)\imath) \tag{5.52}$$

OBS 5.1. Claramente a definição acima concorda com o que esperamos inicialmente da função exponencial pois,

$$\exp(x + 0\imath) \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos(0) + \sin(0)\imath) = e^x.$$

As partes real e imaginária da função exponencial são:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos(y) \\ v(x, y) &= e^x \sin(y) \end{aligned} \tag{5.53}$$

Daí, derivando **eqn 6.64.1** e **eqn 6.64.2** com relação a x e com relação a y temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin(y)\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin(y)\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos(y)\end{aligned} \tag{5.54}$$

Das equações **eqn 6.65** podemos verificar facilmente que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned} \tag{5.55}$$

Logo as equações de Cauchy-Riemman são satisfeitas. E da continuidade das derivadas das equações **eqn 6.65** temos que a função exponencial $\exp(\bullet)$ é holomorfa.

OBS 5.2. Como e^x esta definida $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\cos(y)$ e $\sin(y)$ estão definidas $\forall y \in \mathbb{R}$ temos que $\exp(z)$ está definida $\forall z \in \mathbb{C}$ i.e. $Dom(\exp) = \mathbb{C}$.

Por outro lado, como $Img(e^x \cos(y)) = \mathbb{R}$ e $Img(e^x \sin(y)) = \mathbb{R}$ poderíamos pensar que a imagem da função exponencial seria todo o plano complexo. Porém, como $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e as funções $\cos(y)$ e $\sin(y)$ não se anulam ao mesmo tempo em nenhum $y \in \mathbb{R}$ temos que $exp(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Daí, $Img(\exp) = \mathbb{C}^*$.

5.3 Propriedades da Função Exponencial

Listaremos, aqui, algumas das propriedades da função exponencial no campo dos complexos. Algumas das propriedades da função exponencial no campo dos reais valem para o campo dos complexos. Adicionalmente, teremos algumas outras propriedades da função

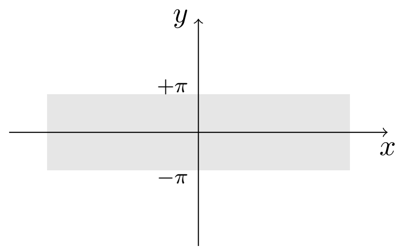


Figura 5.1: Domínio da função exponencial

exponencial que valem apenas no campo dos complexos (a exemplo da periodicidade).

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$
- $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \exp(kz) = (\exp(z))^k$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z + 2\pi\boldsymbol{\imath}) = \exp(z)$

OBS 5.3. A última propriedade vale apenas no campo dos complexos e nos diz que a função exponencial é periódica de período imaginário $2\pi\boldsymbol{\imath}$. Com isso a função exponencial no campo dos complexos é uma função multiforme. Em outras palavras uma função não injetora. Para recuperar o caráter injetor podemos restringir o domínio de definição da função exponencial à faixa $Dom(\exp(z)) = \mathbb{R} \times [-\pi, +\pi)$ (ver **figura 5.1**). Quanto a imagem continua a mesma $Img(\exp(z)) = \mathbb{C}^*$ i.e. todo o plano complexo exceto a origem.

Faremos aqui a demonstração de apenas uma das propriedades da função exponencial. A saber:

Demonstração da Primeira Propriedade: Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dados por: $z_1 = x_1 + y_1\imath$ e $z_2 = x_2 + y_2\imath$. Daí, temos:

$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\exp(z_2) &= e^{x_1}(\cos(y_1) + \sin(y_1)\imath)e^{x_2}(\cos(y_2) + \sin(y_2)\imath) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1)\cos(y_2) + \sin(y_1)\cos(y_2)\imath \\
&+ \sin(y_2)\cos(y_1)\imath - \sin(y_1)\sin(y_2)) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2) \\
&+ (\sin(y_1)\cos(y_2) + \sin(y_2)\cos(y_1))\imath) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + \sin(y_1 + y_2)\imath) \\
&= \exp(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

OBS 5.4. Para um $z \in \mathbb{C}$ puramente real $z = x + 0\imath$ temos:

$$\exp(z) = \exp(x + 0\imath) = e^x(\cos(0) + \sin(0)\imath) = e^x$$

Como potência de base e as propriedades da função exponencial não entram em conflito com as propriedades usuais das potências. E para um $z \in \mathbb{C}$ puramente imaginário $z = 0 + y\imath$ temos:

$$\exp(z) = \exp(0 + y\imath) = e^0(\cos(y) + \sin(y)\imath) = \cos(y) + \sin(y)\imath$$

Desta forma podemos introduzir a notação devida a Eüler:

$$\exp(y\imath) = e^{y\imath} = \cos(y) + \sin(y)\imath$$

e teremos um nova forma de escrever um número complexo. Senão vejamos: Dado $z \in \mathbb{C}$, $z = x + y\imath$ em sua forma polar $z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath)$. Tomaremos $a = ln(r)$ e podemos escrever o número complexo z de diversas formas. A saber:

$$z = x + y\imath = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\imath) = re^{\theta\imath} = e^{a+\theta\imath}$$

5.4 Derivada da Função Exponencial

Do exposto na seção anterior, sabemos que a função exponencial $exp(\bullet)$ é holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$ e portanto sua derivada pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
\exp'(z) &= \frac{\partial}{\partial x}\exp(x + y\imath) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos(\theta) + e^x\sin(\theta)\imath) \\
&= e^x\cos(\theta) + e^x\sin(\theta)\imath \\
&= \exp(x + y\imath) \\
&= \exp(z)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

OBS 5.5. Vemos pois que a função exponencial no campo dos complexos tem a mesma derivada que a função exponencial no campo dos reais i.e. $\exp'(z) = \exp(z)$.

5.5 Função Logaritmo

O fato da função exponencial ser periódica de período imaginário $2\pi\imath$ transforma-se em um problema ao se definir a função logaritmo como a inversa da função exponencial pois tira da função exponencial a propriedade de função injetora que a função exponencial no campo dos reais tem.

Definição 5.2. Definimos a função ´logaritmo em um ponto $z \in \mathbb{C}$, $z = re^{\theta\imath}$, $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [-\pi, +\pi)$, por:

$$log(z) \stackrel{\text{def}}{=} ln(r) + (\theta + 2k\pi)\imath,\ k \in \mathbb{Z} \tag{5.57}$$

A função logaritmo assim definida é uma função multiforme com infinitos valores associados a cada ponto $z \in \mathbb{C}$. Cada valor de $k \in$

$\mathbb{Z}$ corresponde a um ramo da função logaritmo. O ramo principal corresponde a $k = 0$ i.e.

$$log(z) \stackrel{\text{def}}{=} ln(r) + \theta\imath \tag{5.58}$$

OBS 5.6. Vemos então que a função logaritmo restrita a cada ramo é uma função injetora. Em particular o ramo principal **6.69**.

5.6 Propriedades da Função Logaritmo

Listaremos, aqui, algumas das propriedades da função logaritmo no campo dos complexos. Algumas das propriedades da função logaritmo no campo dos reais valem para o campo dos complexos.

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exp(\log(z)) = z$

Faremos aqui a demonstração de apenas uma das propriedades da função logaritmo. A saber:

Demonstração da Primeira Propriedade: Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ dados por: $z_1 = r_1 e^{\theta_1 \imath}$ e $z_2 = r_2 e^{\theta_2 \imath}$. Daí, temos:

$$\begin{aligned}
\log(z_1.z_2) &= \log(r_1 e^{\theta_1 \imath}.r_2 e^{\theta_2 \imath}) \\
&= \log(r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)\imath}) \\
&= \ln(r_1 r_2) + (\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi)\imath, \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= \ln(r_1) + \ln(r_2) + (\theta_1 + 2m\pi) + (\theta_2 + 2n\pi)\imath, \forall m, n \in \mathbb{Z} \\
&= (\ln(r_1) + (\theta_1 + 2m\pi)) + (\ln(r_2) + (\theta_2 + 2n\pi)\imath), \forall m, n \in \mathbb{Z} \\
&= \log(z_1) + \log(z_2)
\end{aligned}$$

OBS 5.7. Na demonstração acima, a passagem do passo 3 para o passo 4 é justificada pois, para cada $k \in \mathbb{Z}$ podemos escrever $k = m + n$ de infinitas maneiras.

OBS 5.8. A propriedade 3 diz que a função logaritmo $\log(\bullet)$ é a inversa à direita da função exponencial $\exp(\bullet)$ porém, não é inversa à esquerda. Tomando $z = x + y\imath$ temos:

$$\begin{aligned}
\log(\exp(z)) &= \log(e^x.e^{y\imath}) \\
&= \ln(e^x) + (y + 2k\pi)\imath, \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= x + y\imath + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= z + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\
&\neq z
\end{aligned}$$

devido ao caráter de função multivalorada do logaritmo definido por **eqn 6.68** porém, se nos restringirmos ao ramo principal a função $\log(\bullet)$ é também inversa à esquerda da função exponencial $\exp(\bullet)$.

5.7 Derivada da Função Logaritmo

Antes de calcular a derivada da função logaritmo vejamos como reescrever a equações que determinam a derivada de uma função $f(\bullet)$ complexa em coordenadas polares, vista na aula anterior, pondo $z = re^{\theta\imath}$. Da aula anterior se $f(z) = f(r(\cos(\theta)+\sin(\theta)\imath)) = u(r,\theta) + v(r,\theta)\imath$ temos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

para as equações de Cauchy-Riemann e

$$\begin{aligned} f'(z) &= (\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\imath).\left(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\imath\right) \\ &= \frac{1}{r\imath}(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\imath).\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\imath\right) \end{aligned}$$

Para a derivada de $f(\bullet)$. Pondo $z = re^{\theta\imath}$ podemos reescrever as equações acima como:

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-\theta\imath}.\left(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\imath\right) \\ &= \frac{1}{\imath re^{\theta\imath}}.\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta)\imath\right) \end{aligned}$$

As partes real e imaginária da função logaritmo são:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \ln(r) \\ v(r,\theta) &= \theta + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{5.59}$$

Daí, derivando **eqn 6.70.1** e **eqn 6.70.2** com relação a x e com relação a y temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 1 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Das equações **eqn 6.71** podemos verificar facilmente que:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \ln(r) \\ v(r,\theta) &= \theta + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{5.61}$$

Logo as equações de Cauchy-Riemman são satisfeitas. E da continuidade das derivadas das equações **eqn 6.71** temos que a função logaritmo $\log(\bullet)$ é holomorfa.

Quanto a derivada da função logaritmo com $u(r,\theta) = \ln(r)$ e

$v(r, \theta) = \theta + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\begin{aligned}
\ln'(z) &= e^{-\theta\boldsymbol{\imath}}.\left(\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\boldsymbol{\imath}\right) \\
&= e^{-\theta\boldsymbol{\imath}}.\left(\frac{\partial}{\partial r}\ln(r) + \frac{\partial}{\partial r}(\theta + 2k\pi)\boldsymbol{\imath}\right) \\
&= \frac{1}{r}e^{-\theta\boldsymbol{\imath}} \qquad (5.62) \\
&= \frac{1}{re^{\theta\boldsymbol{\imath}}} \\
&= \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

OBS 5.9. Vemos pois que a função logaritmo no campo dos complexos tem a mesma derivada que a função logaritmo no campo dos reais i.e. $\ln'(z) = \dfrac{1}{z}$.

5.8 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que a função exponencial e a função logaritmo podem ser estendidas de modo intuitivo no domínio dos números complexos mantendo suas propriedades originais praticamente intactas.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 05 constam os seguintes tópicos:

Função Exponencial

Definimos a função exponencial da seguinte forma:

Definição: Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função exponencial calculada no ponto $z = x + y\boldsymbol{\imath}$, denotada $\exp(z)$ é definida por:

$$\exp(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos(y) + \sin(y)\boldsymbol{\imath})$$

Algumas Propriedades da Função Exponencial

A função exponencial assim definida tem as seguintes propriedades:

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$
- $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \exp(kz) = (\exp(z))^k$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z + 2\pi\boldsymbol{\imath}) = \exp(z)$

Derivada da Função Exponencial

A derivada da função exponencial $\exp(\bullet)$ no campo dos complexos é dada por:

$$\exp'(z) = \exp(z)$$

Função Logaritmo

Definimos a função logaritmo da seguinte forma:

Definição: Definimos a função logaritmo em um ponto $z \in \mathbb{C}$, $z = re^{\theta\boldsymbol{\imath}}$, $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [-\pi, +\pi)$, por:

$$log(z) \stackrel{\text{def}}{=} ln(r) + (\theta + 2k\pi)\boldsymbol{\imath},\ k \in \mathbb{Z}$$

Algumas Propriedades da Função Logaritmo

A função logaritmo assim definida tem as seguintes propriedades:

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \log\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$

- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exp(\log(z)) = z$

Derivada da Função Logaritmo

A derivada da função logaritmo $\log(\bullet)$ no campo dos complexos é dada por:

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula vamos continuaremos o estudo da extensão da definição de algumas funções do campo real para o campo complexo. Em particular as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 5.1. Considere a função exponencial $\exp(\bullet)$ no campo dos complexos e mostre que:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \exp(kz) = (\exp(z))^k$$

Comentário: Use o princípio da indução.

ATIV. 5.2. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e defina a função:

$$z^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\lambda \log(z)), \forall z \in \mathbb{C}$$

Mostre, que se tomarmos o ramo principal de $\log(\bullet)$ a função assim definida é holomorfa e sua derivada é dada por:

$$\frac{d}{dz}z^{\lambda} = \lambda z^{\lambda-1}$$

Comentário: Use a regra da cadeia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.