AULA

6

Funções Elementares do Cálculo Complexos 2

META:

Definir mais algumas funções elementares no campo dos complexos.

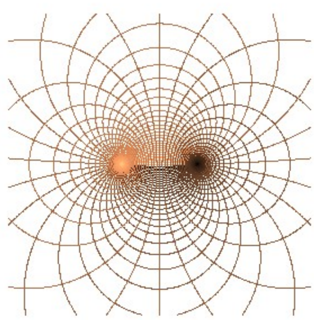
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir mais algumas funções elementares no campo dos complexos e provar algumas de suas propriedades.

PRÉ-REQUISITOS

Aula 01 de Variáveis Complexas.



6.1 Introdução

Caros alunos dando continuidade ao estudo de algumas funções de variáveis complexas estenderemos, nesta aula, as definições das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas ao domínio dos números complexos. Começaremos pelas funções trigonométricas, mais precisamente pela função seno.

6.2 Funções Trigonométricas

Começaremos pelas definições das funções seno e cosseno pois, serviram de base para definição das demais funções trigonométricas.

Como vimos anteriormente a fórmula de Eüler para variáveis complexas escreve-se assim:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{\theta \imath} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\imath \tag{6.63}$$

Trocando em **eqn. 6.63** θ por $-\theta$ e levando em conta que as funções seno e cosseno de reais são função par e função ímpar respectivamente, teremos:

$$\begin{cases} e^{\theta \imath} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\imath \\ e^{-\theta \imath} = \cos(\theta) - \sin(\theta)\imath \end{cases} \tag{6.64}$$

Subtraindo e adicionando as equações **eqn. 6.63** temos:

$$\begin{cases} \sin(\theta) = \dfrac{e^{\theta \imath} - e^{-\theta \imath}}{2\imath} = -\imath\dfrac{e^{\theta \imath} - e^{-\theta \imath}}{2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{e^{\theta \imath} - e^{-\theta \imath}}{2} \end{cases} \tag{6.65}$$

Desta forma é natural estender a definição das funções seno e cosseno no domínio dos complexos por:

Para a função seno

Definição 6.1. Para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos a função seno, calculada no ponto z, denotada $\sin(z)$ por:

$$\sin(z) \stackrel{\text{def}}{=} -\boldsymbol{\imath}\frac{e^{z\boldsymbol{\imath}} - e^{-z\boldsymbol{\imath}}}{2} \tag{6.66}$$

Para a função cosseno

Definição 6.2. Para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos a função cosseno, calculada no ponto z, denotada $\cos(z)$ por:

$$\cos(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{z\boldsymbol{\imath}} + e^{-z\boldsymbol{\imath}}}{2} \tag{6.67}$$

As definições das funções tangente, cotangente, secante e cosecante no campo no campo dos números reais são feitas à partir das funções seno e cosseno. No campo dos números complexos segue como as mesmas definições. A saber:
Para a função tangente:

Definição 6.3. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função tangente calculada no ponto z, denotada $\tan(z)$ é definida por:

$$\tan(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \tag{6.68}$$

Para a função cotangente:

Definição 6.4. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função cotangente calculada no ponto z, denotada $\cot(z)$ é definida por:

$$\cot(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \tag{6.69}$$

Para a função secante:

Definição 6.5. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função secante calculada no ponto z, denotada $\sec(z)$ é definida por:

$$\sec(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos(z)} \tag{6.70}$$

Para a função cosecante:

Definição 6.6. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função cosecante calculada no ponto z, denotada $\csc(z)$ é definida por:

$$\csc(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin(z)} \tag{6.71}$$

Alternativamente, a exemplo das funções seno e cosseno, podemos definir as funções tangente, cotangente, secante e cosecante usando a função exponencial. A saber:

$$\begin{aligned} \tan(z) &= -\imath\frac{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}{e^{z\imath} + e^{-z\imath}} \\ \cot(z) &= \imath\frac{e^{z\imath} + e^{-z\imath}}{e^{z\imath} - e^{-z\imath}} \\ \sec(z) &= \frac{2}{e^{z\imath} + e^{-z\imath}} \\ \csc(z) &= \frac{2\imath}{e^{z\imath} - e^{-z\imath}} \end{aligned} \tag{6.72}$$

6.3 Propriedades das Funções Trigonométricas

As propriedades das função trigonométricas são as mesmas no campo dos reais quanto no campo dos complexos. A seguir listaremos algumas e faremos a demonstração de uma delas.

i) $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

ii) $\forall z \in \mathbb{C}, \sec^2(z) - \tan^2(z) = 1$

iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \cot^2(z) - \csc^2(z) = 1$

iv) $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(-z) = -\sin(z)$

v) $\forall z \in \mathbb{C}, \cos(-z) = \cos(z)$

vi) $\forall z \in \mathbb{C}, \tan(-z) = -\tan(z)$

vii) $\forall z, w \in \mathbb{C}, \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

viii) $\forall z, w \in \mathbb{C}, \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

ix) $\forall z, w \in \mathbb{C}, \tan(z+w) = \dfrac{\tan(z)+\tan(w)}{1+\tan(z)\tan(w)}$

x) $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sin(2z)}{2}\right)$

xi) $\forall z \in \mathbb{C}, \sin^2(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sin(2z)}{2}\right)$

Demonstraremos aqui que: $\forall z, w \in \mathbb{C}, \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

Demonstração:

Das definições das funções $\sin(\bullet)$ e $\cos(\bullet)$ temos:

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \frac{e^{(z+w)\imath} + e^{-(z+w)\imath}}{2} \\ \cos(z) &= \frac{e^{z\imath} + e^{-z\imath}}{2} \\ \cos(w) &= \frac{e^{w\imath} + e^{-w\imath}}{2} \\ \sin(z) &= -\imath\frac{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}{2} \\ \sin(z) &= -\imath\frac{e^{w\imath} - e^{-w\imath}}{2} \end{aligned} \tag{6.73}$$

Fazendo o produto das equações **eqn 6.73.2** e **eqn 6.73.3** temos:

$$\begin{aligned} \cos(z)\cos(w) &= \frac{e^{z\imath} + e^{-z\imath}}{2}\frac{e^{w\imath} + e^{-w\imath}}{2} \\ &= \frac{(e^{z\imath} + e^{-z\imath})(e^{w\imath} + e^{-w\imath})}{4} \\ &= \frac{e^{z\imath}e^{w\imath} + e^{-z\imath}e^{w\imath} + e^{z\imath}e^{-w\imath} + e^{-z\imath}e^{-w\imath}}{4} \\ &= \frac{e^{(z+w)\imath} + e^{(w-z)\imath} + e^{(z-w)\imath} + e^{-(z+w)\imath}}{4} \end{aligned} \tag{6.74}$$

Fazendo o produto das equações **eqn 6.73.4** e **eqn 6.73.5** temos:

$$\begin{aligned}
\sin(z)\sin(w) &= \imath^2 \frac{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}{2} \frac{e^{w\imath} - e^{-w\imath}}{2} \\
&= -\frac{(e^{z\imath} - e^{-z\imath})(e^{w\imath} - e^{-w\imath})}{4} \\
&= -\frac{e^{z\imath}e^{w\imath} - e^{-z\imath}e^{w\imath} - e^{z\imath}e^{-w\imath} + e^{-z\imath}e^{-w\imath}}{4} \\
&= \frac{-e^{(z+w)\imath} + e^{(w-z)\imath} + e^{(z-w)\imath} - e^{-(z+w)\imath}}{4}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Subtraindo as equações **eqn 6.74** e **eqn 6.75** temos:

$$\begin{aligned}
\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) &= \frac{2e^{(z+w)\imath} + 2e^{-(z+w)\imath}}{4} \\
&= \frac{e^{(z+w)\imath} + e^{-(z+w)\imath}}{2}
\end{aligned} \tag{6.76}$$

comparando as equações **eqn 6.73.1** e **eqn 6.76** temos:

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \; \Box \tag{6.77}$$

6.4 Funções Trigonométricas Inversas

As funções trigonométricas inversas podem ser deduzidas das expressões de definição das funções trigonométricas. Aqui faremos a dedução de uma delas. A saber:

i) $\sin^{-1}(z) = \frac{1}{\imath}\log(z + \sqrt{1-z^2})$

ii) $\cos^{-1}(z) = \frac{1}{\imath}\log(z + \sqrt{z^2-1})$

iii) $\tan^{-1}(z) = \frac{1}{2\imath}\log\left(\frac{1+z\imath}{1-z\imath}\right)$

iv) $\cot^{-1}(z) = \frac{1}{2\imath}\log\left(\frac{z+\imath}{z-\imath}\right)$

v) $\sec^{-1}(z) = \frac{1}{\imath}\log\left(\frac{z+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$

vi) $\csc^{-1}(z) = \dfrac{1}{\imath}\log\left(\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$

Demonstraremos aqui que: $\sin^{-1}(z) = \dfrac{1}{\imath}\log(z+\sqrt{1-z^2})$.

Demonstração:

Da definição de função inversa temos:

$$\sin(w) = z \leftrightarrow w = \sin^{-1}(z)$$

Da definição da função $\sin(w)$ temos:

$$\sin(w) = \frac{e^{w\imath} - e^{-w\imath}}{2\imath} = z \tag{6.78}$$

por outro lado, fazendo na equação **eqn 6.78** $\xi = e^{w\imath}$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\xi - \xi^{-1}}{2\imath} &= z \\ \xi - \xi^{-1} &= 2z\imath \end{aligned} \tag{6.79}$$

Fazendo o produto da equação **eqn 6.79** por ξ temos:

$$\begin{aligned} \xi^2 - 1 &= 2z\imath\xi \\ \xi^2 - 2z\imath\xi - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Resolvendo a equação do segundo grau **eqn 6.80** para ξ temos:

$$\xi = z\imath + \sqrt{1-z^2} \tag{6.81}$$

Onde sabemos que $\sqrt{1-z^2}$ é uma função multivalorada. Por outro lado, como $\xi = e^{w\imath}$ da equação **eqn 6.81** temos:

$$e^{w\imath} = z\imath + \sqrt{1-z^2} \tag{6.82}$$

Invertendo a função exponencial em **eqn 6.82**, levando em conta que $e^{w\imath} = e^{(w-2k\pi)\imath}$ e que $w = \sin^{-1}(z)$ temos:

$$\begin{aligned} w\imath &= 2k\pi\imath + \log(z\imath + \sqrt{1-z^2}) \\ \sin^{-1}(z) &= 2k\pi + \frac{1}{\imath}\log(z\imath + \sqrt{1-z^2}) \end{aligned} \tag{6.83}$$

Vemos então que a função $\sin^{-1}(z)$ tem infinitos valores porém, escolhendo o ramo principal onde $\sin^{-1}(0) = 0$ temos $k = 0$ e da equação **eqn 6.83** podemos escrever:

$$\sin^{-1}(z) = \frac{1}{\imath}\log(z\imath + \sqrt{1-z^2})\ \square$$

6.5 Derivada das Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas estendidas ao campo dos complexos têm as seguintes derivadas:

i) $\cos'(z) = -\sin(z)$

ii) $\sin'(z) = \cos(z)$

iii) $\tan'(z) = \sec^2(z)$

iv) $\cot'(z) = -\csc^2(z)$

v) $\sec'(z) = \sec(z)\tan(z)$

vi) $\csc'(z) = -\csc(z)\cot(z)$

Faremos a demonstração apenas de um ítem acima. A saber:

Derivada da Função Seno: $\sin'(z) = \cos(z)$.

PROVA: Usando a definição da função seno $\sin(\bullet)$, a definição da função coseno $\cos(\bullet)$, a derivada da função exponencial $\exp(\bullet)$ e a regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned} \sin'(z) = \frac{d}{dz}\frac{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}{2\imath} & \\ &= \frac{\imath e^{z\imath} + \imath e^{-z\imath}}{2\imath} \\ &= \frac{e^{z\imath} + e^{-z\imath}}{2} \\ &= \cos(z)\ \square \end{aligned} \tag{6.84}$$

6.6 Funções Hiperbólicas

Começaremos pelas definições das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico pois, serviram de base para definição das demais funções hiperbólicas. Como no campo dos números reais as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas à partir da função exponencial, sua extensão ao campo dos números complexo utiliza a mesma forma. A saber:
Para a função seno hiperbólico.

Definição 6.7. Para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos a função seno hiperbólico, calculada no ponto z, denotada $\sinh(z)$ por:

$$\sinh(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{6.85}$$

Para a função cosseno hiperbólico.

Definição 6.8. Para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos a função cosseno hiperbólico, calculada no ponto z, denotada $\cosh(z)$ por:

$$\cosh(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{6.86}$$

As definições das funções tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica e cosecante hiperbólica no campo no campo dos números reais são feitas à partir das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. No campo dos números complexos segue como as mesmas definições. A saber:
Para a função tangente hiperbólica:

Definição 6.9. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função tangente calculada no ponto z, denotada $\tanh(z)$ é definida por:

$$\tanh(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \tag{6.87}$$

Para a função cotangente hiperbólica:

Definição 6.10. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função cotangente hiperbólica calculada no ponto z, denotada $\coth(z)$ é definida por:

$$\coth(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \tag{6.88}$$

Para a função secante hiperbólica:

Definição 6.11. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função secante hiperbólica calculada no ponto z, denotada $\operatorname{sech}(z)$ é definida por:

$$\operatorname{sech}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cosh(z)} \tag{6.89}$$

Para a função cosecante hiperbólica:

Definição 6.12. Para todo $z \in \mathbb{C}$ a função cosecante hiperbólica calculada no ponto z, denotada $\operatorname{csch}(z)$ é definida por:

$$\operatorname{csch}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sinh(z)} \tag{6.90}$$

Alternativamente, a exemplo das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, podemos definir as funções tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica e cosecante hiperbólica usando a função exponencial. A saber:

$$\begin{aligned} \tan(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \\ \cot(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \\ \sec(z) &= \frac{2}{e^z + e^{-z}} \\ \csc(z) &= \frac{2}{e^z - e^{-z}} \end{aligned} \tag{6.91}$$

6.7 Propriedades das Funções Hiperbólicas

As propriedades das função hiperbólicas são as mesmas no campo dos reais quanto no campo dos complexos. A seguir listaremos algumas e faremos a demonstração de uma delas.

i) $\forall z \in \mathbb{C}, \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

ii) $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{sech}^2(z) + \tanh^2(z) = 1$

iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \coth^2(z) - \operatorname{csch}^2(z) = 1$

iv) $\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(-z) = -\sinh(z)$

v) $\forall z \in \mathbb{C}, \cosh(-z) = \cosh(z)$

vi) $\forall z \in \mathbb{C}, \tanh(-z) = -\tanh(z)$

vii) $\forall z, w \in \mathbb{C}, \cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$

viii) $\forall z, w \in \mathbb{C}, \sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$

ix) $\forall z, w \in \mathbb{C}, \tanh(z+w) = \dfrac{\tanh(z) + \tanh(w)}{1 + \tanh(z)\tanh(w)}$

Demonstraremos aqui que: $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{sech}^2(z) + \tanh^2(z) = 1$.

Demonstração:

Das definições das funções $\sinh(\bullet)$ e $\cosh(\bullet)$ temos:

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned} \tag{6.92}$$

Elevando ao quadrado as equações **eqn 6.92.1** e **eqn 6.92.2** e levando-se em conta que $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ temos:

$$\begin{aligned} \cosh^2(z) &= \frac{e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} \\ \sinh(z)^2 &= \frac{e^{2z} - 2e^z e^{-2z} + e^{-z}}{4} = \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} \end{aligned} \tag{6.93}$$

Subtraindo as equações **eqn 6.93.1** e **eqn 6.93.2**

$$\begin{aligned}\cosh^2(z) - \sinh(z)^2 &= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4} \\ &= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}+2-e^{-2z}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned} \tag{6.94}$$

Dividindo a equação **eqn 6.94** por $\cosh^2(z)$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{\cosh^2(z)-\sinh(z)^2}{\cosh^2(z)} &= \frac{1}{\cosh^2(z)} \\ \frac{\cosh^2(z)}{\cosh^2(z)} - \frac{\sinh(z)^2}{\cosh^2(z)} &= \frac{1}{\cosh^2(z)} \\ 1 - \frac{\sinh(z)^2}{\cosh^2(z)} &= \frac{1}{\cosh^2(z)}\end{aligned} \tag{6.95}$$

Levando-se em conta a equação **eqn 6.95** e as definições das funções $\tanh(\bullet)$ e $\operatorname{sech}(\bullet)$ temos:

$$1 - \tanh^2(z) = \operatorname{sech}^2(z) \tag{6.96}$$

Que pode ser rearrumada para:

$$\operatorname{sech}^2(z) + \tanh^2(z) = 1 \ \square \tag{6.97}$$

6.8 Funções Hiperbólicas Inversas

As funções hiperbólicas inversas podem ser deduzidas das expressões de definição das funções hiperbólicas. Aqui faremos a dedução de uma delas. A saber:

i) $\sinh^{-1}(z) = \log(z + \sqrt{1+z^2})$

ii) $\cosh^{-1}(z) = \log(z + \sqrt{z^2-1})$

iii) $\tanh^{-1}(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

iv) $\coth^{-1}(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$

v) $\operatorname{sech}^{-1}(z) = \log\left(\dfrac{z+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$

vi) $\operatorname{csch}^{-1}(z) = \log\left(\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$

Demonstraremos aqui que: $\tanh^{-1}(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

Demonstração:

Da definição de função inversa temos:

$$\tanh(w) = z \leftrightarrow w = \tanh^{-1}(z)$$

Da definição da função $\tanh(w)$ temos:

$$\tanh(w) = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = z \tag{6.98}$$

por outro lado, fazendo na equação **eqn 6.98** $\xi = e^w$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\xi - \xi^{-1}}{\xi + \xi^{-1}} &= z \\ \xi - \xi^{-1} &= (\xi + \xi^{-1})z \end{aligned} \tag{6.99}$$

Fazendo o produto do numerador e do denominador da fração da equação **eqn 6.99** por ξ e rearrumando temos:

$$\begin{aligned} \xi^2 - 1 &= (\xi^2 + 1)z \\ (1-z)\xi^2 &= 1 + z = 0 \end{aligned} \tag{6.100}$$

Resolvendo a equação do segundo grau **eqn 6.100** para ξ temos:

$$\xi = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \tag{6.101}$$

Onde sabemos que $\sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}$ é uma função multivalorada. Por outro lado, como $\xi = e^w$ equação **eqn 6.101** temos:

$$e^w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \tag{6.102}$$

Invertendo a função exponencial, levando em conta que $e^w = e^{w-2k\pi\imath}$ e que $w = \tanh^{-1}(z)$ da equação **eqn 6.102** temos:

$$\begin{aligned} w &= 2k\pi\imath + ln\left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right) \\ \tanh^{-1}(z) &= 2k\pi\imath + ln\left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right) \end{aligned} \tag{6.103}$$

Vemos então que a função $\tanh^{-1}(z)$ tem infinitos valores porém, escolhendo o ramo principal onde $\tanh^{-1}(0) = 0$ temos $k = 0$ e usando propriedade da função logaritmo e na equação **eqn 6.103** podemos escrever:

$$\tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad \square$$

6.9 Derivada das Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas estendidas ao campo dos complexos têm as seguintes derivadas:

i) $\cosh'(z) = \sinh(z)$

ii) $\sinh'(z) = \cosh(z)$

iii) $\tanh'(z) = \text{sech}^2(z)$

iv) $\coth'(z) = -\csc^2(z)$

v) $\text{sech}'(z) = -\text{sech}(z)\tanh(z)$

vi) $\operatorname{csch}'(z) = -\operatorname{csch}(z)\coth(z)$

Faremos a demonstração apenas de um ítem acima. A saber:

Derivada da Função Coseno: $\cosh'(z) = \sinh(z)$.

PROVA: Usando a definição da função coseno hiperbólico $\cosh(\bullet)$, a definição da função seno hiperbólico $\sinh(\bullet)$, a derivada da função exponencial $\exp(\bullet)$ e a regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned} \cosh'(z) &= \frac{d}{dz}\frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \sinh(z) \ \square \end{aligned} \tag{6.104}$$

6.10 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas podem ser estendidas de modo intuitivo no domínio dos números complexos mantendo suas propriedades originais intactas.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 06 constam os seguintes tópicos:

Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são definidas por:

$$
\begin{aligned}
\sin(z) &\stackrel{\text{def}}{=} -\imath \frac{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}{2} \\
\cos(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{z\imath} + e^{-z\imath}}{2} \\
tan(z) &= \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = -\imath \frac{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}{e^{z\imath} + e^{-z\imath}} \\
\cot(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \imath \frac{e^{z\imath} + e^{-z\imath}}{e^{z\imath} - e^{-z\imath}} \\
\sec(z) &= \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos(z)} \frac{2}{e^{z\imath} + e^{-z\imath}} \\
\csc(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin(z)} = \frac{2\imath}{e^{z\imath} - e^{-z\imath}}
\end{aligned}
$$

Propriedades das Funções Trigonométricas

Algumas propriedades das funções trigonométricas:

- $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \sec^2(z) - \tan^2(z) = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \cot^2(z) - \csc^2(z) = 1$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(-z) = -\sin(z)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \cos(-z) = \cos(z)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \tan(-z) = -\tan(z)$
- $\forall z, w \in \mathbb{C}, \cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

- $\forall z, w \in \mathbb{C}, \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

- $\forall z, w \in \mathbb{C}, \tan(z+w) = \dfrac{\tan(z) + \tan(w)}{1 + \tan(z)\tan(w)}$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sin(2z)}{2}\right)$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \sin^2(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sin(2z)}{2}\right)$

Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas por:

$$\begin{aligned}
\sinh(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}\\
\cosh(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}\\
tanh(z) &= \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\\
\coth(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\\
\operatorname{sech}(z) &= \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cosh(z)} \frac{2}{e^z + e^{-z}}\\
\operatorname{csch}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sinh(z)} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}
\end{aligned}$$

Propriedades das Funções Hiperbólicas

Algumas propriedades das funções hiperbólicas:

- $\forall z \in \mathbb{C}, \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{sech}^2(z) + \tanh^2(z) = 1$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \coth^2(z) - \operatorname{csch}^2(z) = 1$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(-z) = -\sinh(z)$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \cosh(-z) = \cosh(z)$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \tanh(-z) = -\tanh(z)$

- $\forall z, w \in \mathbb{C}, \cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$
- $\forall z, w \in \mathbb{C}, \sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$
- $\forall z, w \in \mathbb{C}, \tanh(z+w) = \dfrac{\tanh(z)+\tanh(w)}{1+\tanh(z)\tanh(w)}$

Funções Trigonométricas Inversas

As funções trigonométricas inversas definidas por:

- $\sin^{-1}(z) = \dfrac{1}{\imath}\log(z+\sqrt{1-z^2})$
- $\cos^{-1}(z) = \dfrac{1}{\imath}\log(z+\sqrt{z^2-1})$
- $\tan^{-1}(z) = \dfrac{1}{2\imath}\log\left(\dfrac{1+z\imath}{1-z\imath}\right)$
- $\cot^{-1}(z) = \dfrac{1}{2\imath}\log\left(\dfrac{z+\imath}{z-\imath}\right)$
- $\sec^{-1}(z) = \dfrac{1}{\imath}\log\left(\dfrac{z+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$
- $\csc^{-1}(z) = \dfrac{1}{\imath}\log\left(\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$

Funções Hiperbólicas Inversas As funções hiperbólicas inversas são definidas por:

- $\sinh^{-1}(z) = \log(z+\sqrt{1+z^2})$
- $\cosh^{-1}(z) = \log(z+\sqrt{z^2-1})$
- $\tanh^{-1}(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$
- $\coth^{-1}(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$

- $\operatorname{sech}^{-1}(z) = \log\left(\dfrac{z + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)$
- $\operatorname{csch}^{-1}(z) = \log\left(\dfrac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right)$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos integração complexa. Definiremos a integração de linha complexas e veremos como a integração de linha complexas se relaciona com a integral de linha real.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes demonstrações:

ATIV. 6.1. Mostre que

$\forall z, w \in \mathbb{C}, \cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$ **Comentário:** Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia.

ATIV. 6.2. Mostre que $\cot^{-1}(z) = \dfrac{1}{2\imath}\log\left(\dfrac{z + \imath}{z - \imath}\right)$.
Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações acima, elas lhe servirão de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.
BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.
FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.