AULA 7

Integração Complexa

META:

Introduzir o conceito de integração de funções de variáveis complexas.

OBJETIVOS:

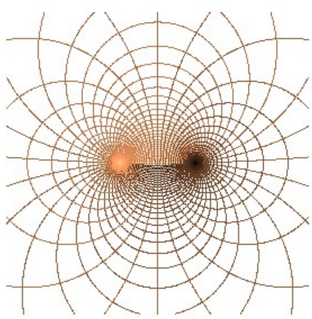
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir a integral de uma função complexa.

Calcular integral de algumas funções de variáveis complexas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula05 e aula06 de Variáveis Complexas.



7.1 Introdução

Caros alunos o tema dessa nossa aula é "Integração Complexa" começaremos por definir a integral de uma função complexa ao longo de uma curva no plano complexo $\mathbb{C}$ veremos também a relação entre a integração complexa e a integração real bem como algumas das propriedades da integração complexa.

7.2 Integração Complexa

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa contínua e $C \subset D$ uma curva suave contida em D (ver **figura 7.1**).

Subdividimos C em n partes através dos pontos $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

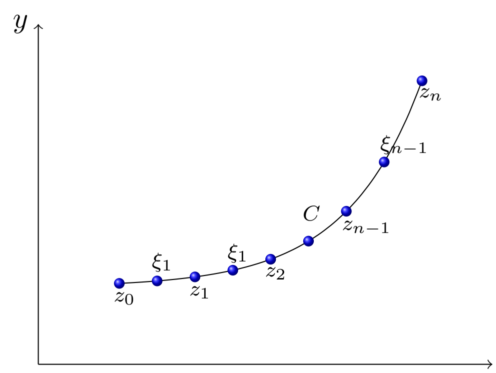


Figura 7.1: Integral de Linha

Para cada arco de curva ligando z_{k-1} a z_k tomamos um ponto arbitrário ξ_k e fazemos a soma:

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)(z_1 - z_0) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\xi_n)(z_n - z_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \end{aligned} \tag{7.105}$$

Fazendo $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ podemos reescrever a equação **eqn 7.105** como:

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta z_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \end{aligned} \tag{7.106}$$

Fazendo o número de pontos da partição n tender ao infinito, em **eqn 7.106** de modo que o comprimento da maior corda $|\Delta z_k|$ tenda a zero, o soma S_n tende a um limite que independe da subdivisão de C. A esse limite chamamos de integral de $f(\bullet)$ ao longo de C e denotamos:

$$\int_C f(z)dz \tag{7.107}$$

OBS 7.1. A integral acima definida é denominada integral de linha complexa ou simplesmente integral de linha de $f(\bullet)$ ao longo da curva C. Observe que se $f(z)$ é analítica em $D \subset \mathbb{C}$, então $f(z)$ é certamente integrável ao longo de C

7.3 Integrais de Linha Reais

Nesta seção procuramos relembrar algumas fórmulas sobre integrais de linhas reais.

Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções de valores reais de x e y, contínuas em todos os pontos de uma curva C, podemos definir a integral de linha real por:

$$\int_C (Q(x, y)dx + P(x, y)dy) \tag{7.108}$$

E se C for parametrizada por $x = \hat{x}(t)$ e $y = \hat{y}(t)$, $t \in [a, b]$ podemos reescrever a integral de linha real **eqn 7.108** como:

$$\int_a^b (Q(\hat{x}(t), \hat{y}(t))\hat{x}'(t) + P(\hat{x}(t), \hat{y}(t))\hat{y}'(t))dt \tag{7.109}$$

OBS 7.2. Para o caso em que C é uma curva lisa por partes podemos integrar, segundo **eqn 7.109**, em cada uma das partes em que a curva é lisa e totalizar os resultados.

7.4 Relação entre Integrais de Linha Complexa e Real

A integral de linha complexa dada por **eqn 7.107** pode ser reescrita em função das integrais de linha reais da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u(x,y) + \imath v(x,y)).(dx + \imath dy) \\
&= \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) \\
&+ \imath \int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy)
\end{aligned} \tag{7.110}
$$

OBS 7.3. Podemos também, considerar **eqn 7.110** como a definição oficial da integral de linha complexa.

Para ilustrar veremos um exemplo de integral de linha complexa.

Exemplo 7.1. Sejam $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z = x + y\imath$ e C é o círculo de centro em $z_0 = a + b\imath$ e raio r (ver **figura 7.2**).

SOLUÇÃO: Como $f(z) = z$ então $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = y$. Resta, antes de efetuar a integração de linha propriamente dita, providenciar uma parametrização para a curva C. Vamos propor uma parametrização para a curva C. Como C é um círculo de raio r e centro em $z_0 = a + b\imath$ uma possível parametrização é $x = a + r\cos(t)$ e $y = b + r\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Daí, $dx = -r\sin(t)dt$ e $dy = r\cos(t)dt$. Podemos calcular em separado as duas integrais

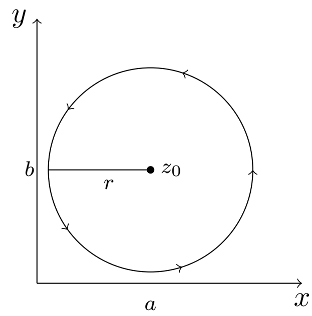


Figura 7.2: Exemplo 7.1

em **eqn 7.110**. A sabe:

$$
\begin{aligned}
&= \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) \\
&= \int_C (xdx - ydy) \\
&= \int_0^{2\pi} ((a + r\cos(t).(-r\sin(t) - (b + r\sin(t)).r\cos(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-ar\sin(t) - br\cos(t) - 2r^2\sin(t)\cos(t))dt \\
&= (ar\cos(t) - br\sin(t) - 2r^2\frac{\sin^2(t)}{2})\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{7.111}
$$

Para a segunda integral:

$$
\begin{aligned}
&= \int_C (u(x,y)dy + v(x,y)dx) \\
&= \int_C (xdy + ydx) \\
&= \int_0^{2\pi} ((a + r\cos(t).r\cos(t) + (b + r\sin(t)).(-r\sin(t)))dt \\
&= \int_0^{2\pi} (ar\cos(t) - br\sin(t) - r^2(\cos^2(t) - \sin^2(t))dt \\
&= (ar\sin(t) + br\cos(t) - r^2\frac{\sin(2t)}{2})\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{7.112}
$$

Portanto, de **eqn 7.110**, **eqn 7.111** e **eqn 7.112** temos:

$$\int_C f(z)dz = 0 \;\square$$

Encerraremos esta seção com um teorema (sem demonstração) que resume algumas das propriedades da integral de linha complexa.

Teorema 7.1. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto $f, g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas integráveis sobre a curva lisa $C \subset D$, então:*

i) $\displaystyle\int_C (f+g)(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz.$

ii) $\displaystyle\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz,\ \alpha \in \mathbb{C}.$

iii) $\displaystyle\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz,\ a, b \in C.$

iv) $\displaystyle\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz,\ a, b, c \in C.$

v) $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$ *onde* $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$ *e* L *é o comprimento de* C.

7.5 Integral Indefinida

Vermos agora, que podemos estender o conceito de integral indefinida para funções complexas.

Definição 7.1. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f, F : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas tais que $F'(z) = f(z)$. Dizemos que $F(z)$ é a integral indefinida de $f(z)$ e denotamos:

$$F(z) = \int f(z)dz$$

7.6 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que existe uma forte relação entre a integral de linha complexa e real e que a integral indefinida complexa segue o mesmo padrão que a real.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 07 constam os seguintes tópicos:

Integração Complexa

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa contínua e $C \subset D$ uma curva suave contida em D podemos escrever a integral de linha complexa em função das integrais de linha reais da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u(x,y) + \boldsymbol{\imath} v(x,y)).(dx + \boldsymbol{\imath} dy) \\
&= \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) \\
&+ \boldsymbol{\imath} \int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy)
\end{aligned}$$

Algumas Propriedades da Integral de Linha

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto $f, g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas integráveis sobre a curva lisa $C \subset D$, então:

i) $\displaystyle\int_C (f+g)(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz.$

ii) $\displaystyle\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz,\ \alpha \in \mathbb{C}.$

iii) $\displaystyle\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz,\ a, b \in C.$

iv) $\displaystyle\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz,\ a, b, c \in C.$

v) $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$ onde $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$ e L é o comprimento de C.

Integral Indefinida

A integral indefinida complexa é definida do mesmo modo que integral indefinida real. A saber:
Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f, F : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ duas funções complexas tais que $F'(z) = f(z)$. Dizemos que $F(z)$ é a integral indefinida de $f(z)$ e denotamos:

$$F(z) = \int f(z)dz$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos alguns teoremas sobre integração de funções complexas conhecidos como teoria de Cauchy. Em particular daremos ênfase ao teorema de Cauchy-Goursat que diz que a integral de uma função holomorfa sobre uma curva fechada simples é zero.

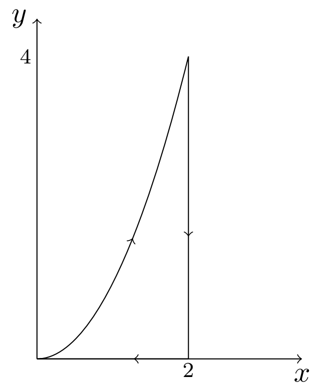


Figura 7.3: Atividade 1

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 7.1. Sejam $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$ e C é a ´curva suave por partes dada pela **figura 7.3** onde a parte parabólica é dada por $y + x^2$. Determine a integral de linha $\displaystyle\int_C f(z)dz$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo e na parametrização procure fazer $x(t) = t$.

ATIV. 7.2. Sejam $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \bar{z}$ e C é o círculo de centro em $z_0 = a + b\imath$ e raio r (ver **figura 7.2**). Calcule: $\displaystyle\int_C f(z)dz$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo, ela lhe servirá de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.