AULA 8

Teoremas de Cauchy

META:

Introduzir os principais teoremas de Cauchy sobre integração de funções de variáveis complexas.

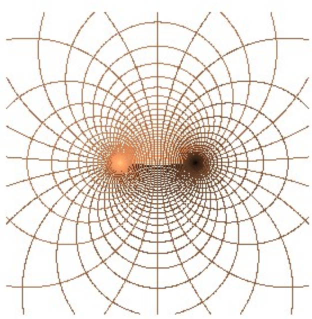
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Enunciar os principais teoremas de Cauchy sobre integração de funções de variáveis complexas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula07 de Variáveis Complexas.



8.1 Introdução

Caros alunos o tema dessa nossa aula é "Teoremas de Cauchy" também conhecidos como "Teoria de Cauchy". As integrais de funções holomorfas possuem algumas propriedades muito importantes. Provavelmente a mais importante delas seja descrita pelo teorema integral de Cauchy, uma forma de representar funções holomorfas através de integrais de linha ao longo de curvas fechadas.

8.2 Preliminares

Nas preliminares, veremos a definição de domínio simplesmente conexo e enunciaremos, sem demonstração, o teorema de Green no plano (funções reais).

BIOGRAFIA

George Green nasceu em Sneinton, condado de Nottinghamshire 14 de Julho de 1793 e morreu em Nottingham, 31 de Maio de 1841, foi um matemático e físico inglês. Na sua obra Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism (1828) introduziu a noção de função potencial no estudo dos campos magnéticos. O teorema de Green, que demonstrou em 1828 facilitou bastante o estudo das funções. Wikipedia

Definição 8.1. Seja $D \subset \mathbb{C}$ dizemos que D é um domínio simplesmente conexo se, somente se toda curva fechada inteiramente contida em D puder ser deformada até um ponto em curvas inteiramente contidas em D.

E agora, sem demonstração (para uma demonstração veja o Livro de Cálculo III), o teorema de Green no plano.

Teorema 8.1 (Teorema de Green no Plano)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave. Seja $V \subset D$ satisfazendo:*

1. *V é fechado e limitado.*
2. *a fronteira ∂V é constituída de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes*
3. *$V - \partial V$ é um domínio.*

Supondo que V e ∂V tem orientação compatível. Se $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ então:

$$\int_{\partial V} (udx + vdy) = \int\int_V \left(\frac{\partial v}{dx} - \frac{\partial u}{dy}\right) dxdy$$

8.3 Teoria de Cauchy

Começaremos por um teorema de Cauchy em sua forma original e depois ampliaremos provando o teorema de Cauchy-Goursat.

BIOGRAFIA

Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris, França 21 de agosto de 1789 e morreu em Sceaux, França 23 de maio de 1857, foi um matemático frances, pioneiro no estudo da análise, tanto real e quanto complexa, e em teoria de grupos de permutação. Ele também pesquisou em convergência e divergência de séries infinitas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física matemática. Wikipedia

Teorema 8.2 (Teorema de Cauchy)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa contínua e $C \subset D$ uma curva suave contida em D (ver* **figura 8.1***). Se $f(z)$ é holomorfa em D e tem derivada $f'(z)$ contínua em D então:*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

PROVA:

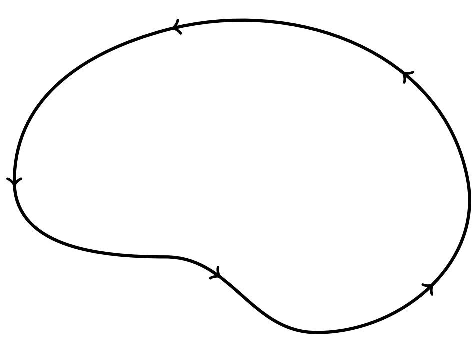


Figura 8.1: Teorema de Cauchy

Da definição da integral de linha complexa temos:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C (u + v\imath)(dx + dy\imath) \\ &= \oint_C (udx - vdy) + \imath \oint_C (vdx + udy)\end{aligned} \tag{8.113}$$

Como $f(z) = u(x,y) + v(x,y)\imath$ é holomorfa em D e tem derivada $f'(z)$ contínua em D temos:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\imath = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\imath$$

Portanto, as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são contínuas em D e como $C \subset D$ conseqüentemente em C e seu interior. Podemos pois aplicar o teorema de Green nas integrais da equação **eqn 8.113** e temos.

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz = &\int\int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \\ &+ \int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\end{aligned} \tag{8.114}$$

onde R é a região interior da curva C.

Por outro lado, como $f(z)$ é holomorfa, vale em D e em particular em R, as equações de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned} \tag{8.115}$$

Logo, substituindo **eqn 8.115** em **eqn 8.114** temos:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \ \square$$

Nosso próximo passo é demonstrar uma versão mais forte do teorema, retirando a necessidade da continuidade da derivada $f'(z)$ em D.

BIOGRAFIA

Édouard Jean-Baptiste Goursat nasceu em Lanzac, França, 21 de maio de 1858 e morreu em Paris, França, 25 de novembro de 1936, foi um matemático francês mais conhecido por sua versão do teorema de Cauchy-Goursat afirmando que a integral de uma função em torno de um contorno simples fechado é zero se a função é analítica dentro do contorno. Mac Tutor

Teorema 8.3 (Teorema de Cauchy-Goursat)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa contínua e $C \subset D$ uma curva suave contida em D (ver* **figura 8.1***). Se $f(z)$ é holomorfa em D então:*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

A prova do teorema sera dividida em três partes.

Prova do Teorema de Cauchy-Goursat para o Caso de um Triângulo

Tomando un triângulo arbitrário Δ, ligando os pontos A, B e C ver **figura 8.2**). Ligando os pontos médios D, E e F dos lados AB, AC e BC respectivamente. Repartiremos Δ em quatro triângulos denotados Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4.

Se $f(z)$ é holomorfa em Δ, é em particular, holomorfa em Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4. E, omitindo os integrandos à direita, podemos escrever:

$$\oint f(z)dz = \int_{DAE} f(z)dz + \int_{EBF} f(z)dz + \int_{FCD} f(z)dz \quad (8.116)$$

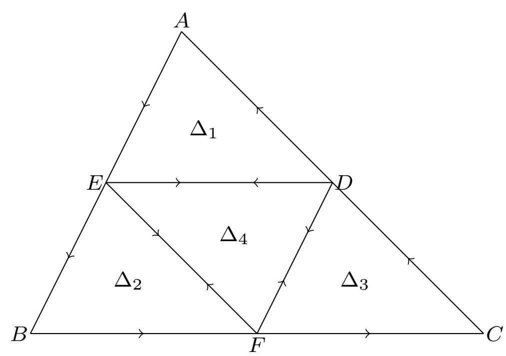


Figura 8.2: Teorema de Cauchy-Goursat no Triângulo

Levando em conta, das propriedades da integral de linha complexa, que $\displaystyle\int_{ED} = -\int_{DE}$, $\displaystyle\int_{FE} = -\int_{EF}$ e $\displaystyle\int_{DF} = -\int_{FD}$ podemos reescrever **eqn 8.116** como:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \left\{\int_{DAE} + \int_{ED}\right\} + \left\{\int_{EBF} + \int_{FE}\right\} \\ &+ \left\{\int_{FCD} + \int_{DF}\right\} + \left\{\int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FD}\right\} \quad (8.117) \\ &= \int_{DAED} + \int_{EDFE} + \int_{FCDF} + \int_{DEFD}\end{aligned}$$

onde omitimos os integrandos por questão de economia.

A equação **eqn 8.117** pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz = \oint_{\Delta_1} f(z)dz + \oint_{\Delta_2} f(z)dz \\ + \oint_{\Delta_3} f(z)dz + \oint_{\Delta_4} f(z)dz\end{aligned} \tag{8.118}$$

Tomando o módulo de **eqn 8.118** e usando a desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned}\left|\oint_C f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| \\ + \left|\oint_{\Delta_3} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_4} f(z)dz\right|\end{aligned} \tag{8.119}$$

Sem perda de generalidade podemos tomar Δ_1 como o triângulo que contribui com o maior valor em **eqn 8.119** e escrever:

$$\left|\oint_C f(z)dz\right| \leq 4\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| \tag{8.120}$$

Podemos repetir o processo, ligando os pontos médios dos lados de Δ_1 e obter:

$$\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| \leq 4\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| \tag{8.121}$$

onde, neste caso Δ_2 é o sub-triângulo de Δ_1 com maior contribuição.

Substituindo **eqn 8.121** em **eqn 8.120** temos:

$$\left|\oint_C f(z)dz\right| \leq 4^2\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right|$$

Após n repetição desse processo temos:

$$\left|\oint_C f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right| \tag{8.122}$$

Por outro lado, $\Delta, \Delta_1, \delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ é uma seqüência de triângulos encaixantes cada um contido no seu antecessor e portanto, existe um ponto z_0 que pertence a todos os triângulos da seqüência. Como cada triângulo está contido em D e $f(z)$ é holomorfa em D é holomorfa em z_0. Logo,

$$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0) \tag{8.123}$$

Como $\lim\limits_{z \to z_0} \eta = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall z, |z - z_0| < \delta$ temos $|\eta| < \varepsilon$. Dai, integrando **eqn 8.123** em Δ_n temos:

$$\oint_{\Delta_n} f(z)dz = f'(z_0) \oint_{\Delta_n} (z - z_0)dz + \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz \tag{8.124}$$

Como $z - z_0$ é holomorfa em C e tem derivada contínua em C podemos aplicar o teorema de Cauchy, a segunda integral em **eqn 8.124** é nula e temos:

$$\oint_{\Delta_n} f(z)dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz \tag{8.125}$$

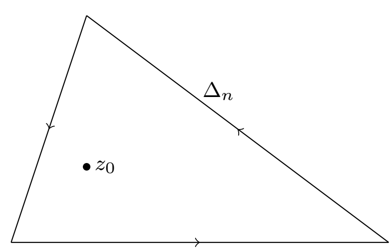


Figura 8.3:

Devido a proporcionalidade, se o perímetro de Δ é L, o perímetro de Δ_n é $L/2^n$ e se z é um ponto qualquer sobre Δ_n (ver **figura 8.3**) então $|z - z_0| < L/2^n < \delta$. Daí, e da propriedade das integrais de linha $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$ onde $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$ e L é o comprimento de C, a equação **eqn 8.125** passa a:

$$\oint_{\Delta_n} f(z)dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz \leq \varepsilon \frac{L}{2^n} \frac{L}{2^n} = \varepsilon \frac{L^2}{4^n} \tag{8.126}$$

Substituindo **eqn 8.126** em **eqn 8.122** temos:

$$\left| \oint_C f(z)dz \right| \leq \varepsilon L^2 \tag{8.127}$$

Como em **eqn 8.127** ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \; \square$$

Prova do Teorema de Cauchy-Goursat para o Caso de um Polígono Fechado

Seja, a título de exemplo, o polígono fechado Γ, ligando os pontos A, B, C, D, E e F (ver **figura 8.4**)

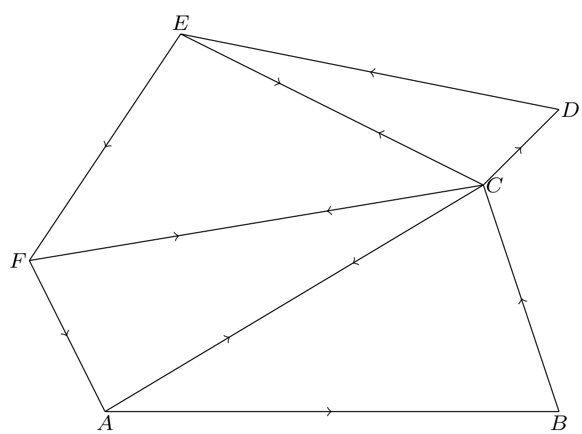


Figura 8.4: Teorema de Cauchy

Traçando as linhas BF, CF e DF repartimos o polígono em triângulos. Como o teorema de Cauchy-Goursat já foi provado para triângulos, e como as integrais ao longo de BF, CF e DF cancelam-se (cada um desses caminhos é percorrido duas vezes em sentidos opostos) temos:

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma f(z)dz &= \int_{ABFA} f(z)dz + \int_{BCFB} f(z)dz\\ &+ \int_{CDFC} f(z)dz + \int_{DEFD} f(z)dz\\ &= 0 \ \square\end{aligned}$$

OBS 8.1. Observamos que apesar de na demonstração ter sido usado um polígono fechado simples, o teorema contínua válido para um polígono qualquer, incluindo polígonos que se auto-interceptam.

Prova do Teorema de Cauchy-Goursat para o Caso de uma Curva Fechada Simples

Seja $C \subset \mathbb{C}$ uma curva fechada simples contida em uma região na qual $f(z)$ seja holomorfa. Tomando os pontos $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_0 = z_n$, sobre C e seja P_n o polígono formado ligando em seqüência esses pontos (ver **figura 8.5**)

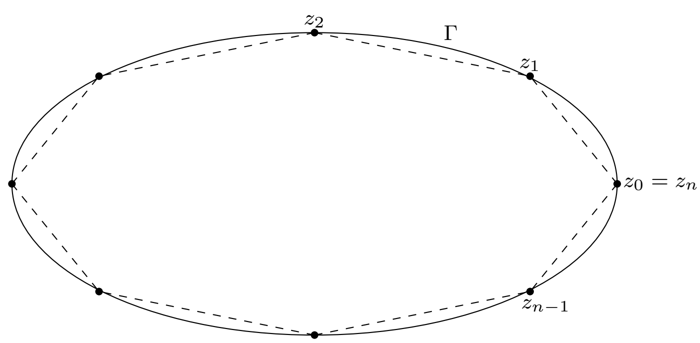


Figura 8.5: Teorema de Cauchy

Definindo a soma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \tag{8.128}$$

onde $\Delta z_k = z_k = z_{k-1}$.

Passando o limite $n \to +\infty$ em **eqn 8.129** de modo que $\max|\Delta_k| \to$

0 vemos que $\forall \varepsilon >$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ temos:

$$\Big| \oint_C f(z)dz - S_n \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.129}$$

Tomando a integral de linha no polígono fechado P_n (levando em conta que no polígono fechado vale o teorema de Cauchy-Goursat) temos:

$$\begin{aligned}\oint_{P_n} f(z)dz = 0 = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z)dz \\ = \int_{z_0}^{z_1} (f(z) - f(z_1) + f(z_1))dz + \\ \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} (f(z) - f(z_n) + f(z_n))dz \\ = \int_{z_0}^{z_1} (f(z) - f(z_1))dz + \\ \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} (f(z) - f(z_n))dz + S_n\end{aligned} \tag{8.130}$$

Portanto, de **eqn 8.130** tiramos:

$$S_n = \int_{z_0}^{z_1} (f(z) - f(z_1))dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} (f(z) - f(z_n))dz \tag{8.131}$$

Tomando N_0 suficientemente grande para que em cada lado de P_n, ligando z_0 a z_1, z_1 a z_2 até z_{n-1} a z_n tenhamos:

$$|f(z_1) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2L}, \ldots, |f(z_n) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2L} \tag{8.132}$$

onde L é o perímetro de P_n. Tomando o módulo de **eqn 8.131** e usando a desigualdade triangular e **eqn 8.132** e propriedades da integral de linha temos:

$$\begin{aligned}|S_n| &\le \int_{z_0}^{z_1} |f(z) - f(z_1)|dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} |f(z) - f(z_n)|dz \\ &\le \frac{\varepsilon}{2L}(|z_1 - z_0| + \cdots + |z_n - z_{n-1}|) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{8.133}$$

Por outro lado fazendo:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C f(z)dz - S_n + S_n \tag{8.134}$$

Tomando o módulo de **eqn 8.134** e usando a desigualdade triangular e **eqn 8.129** temos:

$$\begin{aligned} \Big|\oint_C f(z)dz\Big| &\leq \Big|\oint_C f(z)dz - S_n\Big| + \Big|S_n\Big| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Como ε é arbitrariamente pequeno temos, finalmente:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \ \square$$

8.4 Fórmula Integral de Cauchy

Como uma das possíveis aplicações do teorema de Cauchy, veremos aqui a fórmula integral de Cauchy. Antes porém, teremos que provar dois teoremas.

Teorema 8.4. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ uma aberto, $R \subset D$ uma região limitada por duas curvas suaves C_1 e C_2 e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função holomorfa então:*

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

onde ambas as curvas são orientadas positivamente no sentido anti-horário.

PROVA: Tomaremos o seguinte caminho Γ (ver **figura 8.6**) começando no ponto A percorremos C_1 no sentido positivo até retornar ao ponto A seguimos pela reta AB no sentido de A para B

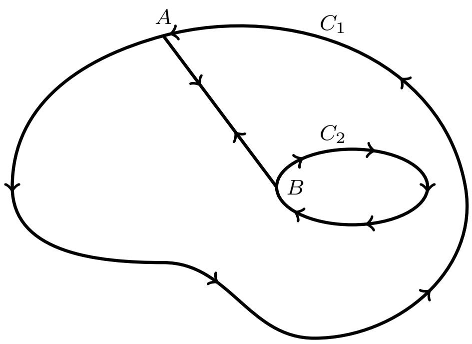


Figura 8.6: Teorema de Cauchy

até o ponto B em C_2 percorremos C_2 no sentido negativo (horário) até retornar ao ponto B e concluindo retornamos ao ponto A percorrendo a reta AB no sentido de B para A. Este percurso é uma curva fechada suave por partes e como$f(z)$ é holomorfa em D vale o teorema de Cauchy-Goursat. logo:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 \tag{8.135}$$

Da equação **eqn 8.135** temos:

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0 \tag{8.136}$$

Como $\displaystyle\int_{AB} f(z)dz - = -\int_{BA} f(z)dz$ da equação **eqn 8.136** temos:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \ \square$$

Teorema 8.5. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $C \subset D$ uma curva suave e $z_0 \in D$ um ponto do interior de C então:*

$$\oint_{C} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi\imath$$

PROVA:

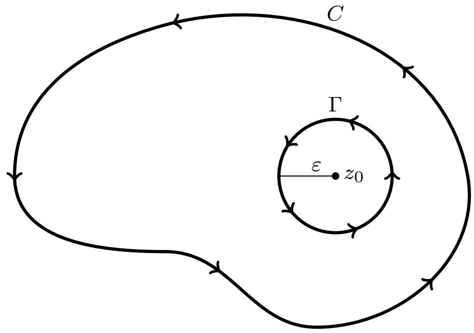


Figura 8.7: Teorema de Cauchy

Como $z_0 \in D$ e $D \subset \mathbb{C}$ é um aberto, podemos tomar um $\varepsilon > 0$ de modo que o círculo Γ de raio ε e centro em z_0 esteja inteiramente contido na região limitada por C (ver **figura 8.7**). Daí, aplicando o teorema anterior à região entre C e Γ temos:

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz \qquad (8.137)$$

onde ambas as curvas são orientadas no sentido positivo.

Podemos parametrizar o círculo Γ pondo $z = z_0 + \varepsilon e^{\imath t}$, $t \in [0, 2\pi)$. Daí, $dz = \imath \varepsilon e^{\imath t} dt$ e substituindo na equação **eqn 8.137** temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{\imath t}} \imath \varepsilon e^{\imath t} dt \\ &= \imath \int_0^{2\pi} dt \qquad (8.138) \\ &= 2\pi\imath \ \square \end{aligned}$$

Teorema 8.6 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função holomorfa em D, $C \subset D$ uma curva suave e z_0 um ponto interior da região limitada por C então:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

PROVA: Como $z_0 \in D$ e $D \subset \mathbb{C}$ é um aberto, podemos tomar um $\varepsilon > 0$ de modo que o círculo Γ de raio ε e centro em z_0 esteja inteiramente contido na região limitada por C (ver **figura 8.7**). Daí, aplicando o teorema anterior à região entre C e Γ temos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{8.139}$$

onde ambas as curvas são orientadas no sentido positivo.
Podemos parametrizar o círculo Γ por: $z = z + 0 + \varepsilon e^{\imath t}$, $t \in [0, 2\pi)$. Daí, $dz = \imath\varepsilon e^{\imath t} dt$ e para **eqn 8.139** temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{\imath t})}{\varepsilon e^{\imath t}} \imath\varepsilon e^{\imath t} dt \\ &= \imath \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{\imath t}) dt \end{aligned} \tag{8.140}$$

Passando o limite $\varepsilon \to 0$ em **eqn 8.140** e lembrando que $f(z)$ é holomorfa e portanto contínua temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \lim_{\varepsilon \to 0} \imath \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{\imath t}) dt \\ &= \imath \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} f(z_0 + \varepsilon e^{\imath t}) dt \\ &= \imath \int_0^{2\pi} f(\lim_{\varepsilon \to 0}(z_0 + \varepsilon e^{\imath t})) dt \\ &= \imath \int_0^{2\pi} f(z_0) dt \\ &= \imath f(z_0) \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi\imath f(z_0) \end{aligned} \tag{8.141}$$

Logo:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \; \square$$

A seguir veremos mais um teorema. Diz respeito a derivação de funções holomorfas.

Teorema 8.7 (Derivada de funções Holomorfas)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função holomorfa em D, $C \subset D$ uma curva suave e z_0 um ponto interior da região limitada por C então:*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

PROVA: Tomando $z_0 + \lambda$ no interior da região limitada por C podemos usar o **teorema 8.6** e escrever:

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\lambda)-f(z_0)}{\lambda} &= \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{z-z_0-\lambda}-\frac{1}{z-z_0}\right)f(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \\ &+ \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{\lambda f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)^2}dz\end{aligned} \tag{8.142}$$

O resultado segue-se passando o limite $\lambda \to 0$ na equação **eqn 8.142**. Basta mostrar que a segunda integral vai a zero quando $\lambda \to 0$. Para isto, tomamos um círculo Γ de raio ε e centro em z_0, inteiramente contido na região limitada por C (ver **figura 8.7**) e temos:

$$\oint_C \frac{\lambda f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)^2}dz = \oint_\Gamma \frac{\lambda f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)^2}dz \tag{8.143}$$

Tomando λ pequeno o bastante para que $z_0 + \lambda$ pertença a região limitada por Γ e $|\lambda| < \varepsilon/2$ e levando em conta que sobre Γ, $|z-z_0| = \varepsilon$ temos:

$$|z-z_0-\lambda| \geq |z-z_0| - |\lambda| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 \tag{8.144}$$

Mais ainda, como $f(z)$ é holomorfa, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| <$

$M, \forall z \in \Gamma$ e o comprimento de Γ é $2\pi\varepsilon$. Daí, temos:

$$\Big|\oint_\Gamma \frac{\lambda f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)^2}dz\Big| \leq \frac{2\pi\varepsilon M|\lambda|}{(\varepsilon/2)(\varepsilon^2)} \tag{8.145}$$

Portanto, o lado esquerdo de tende a zero quando $\lambda \to 0$ i.e.

$$\lim_{\lambda\to 0}\Big|\oint_\Gamma \frac{\lambda f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)^2}dz\Big| = 0$$

Logo:

$$\lim_{\lambda\to 0}\oint_\Gamma \frac{\lambda f(z)}{(z-z_0-\lambda)(z-z_0)^2}dz = 0 \tag{8.146}$$

Passando o limite $\lambda \to 0$ em **eqn 8.142** e **eqn 8.143** e usando **eqn 8.146** e levando em conta que $f'(z_0) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(z_0+\lambda)-f(z_0)}{\lambda}$ temos:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \ \Box$$

OBS 8.2. O resultado obtido equivale a:

$$\frac{d}{dw}f(w) = \frac{1}{2\pi\imath}\frac{d}{dw}\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{f(z)}{z-w}\right\}dz$$

que é uma extensão da regra de Leibnitz de derivação sob a integração para integrais de contorno.

OBS 8.3. Podemos também, do mesmo modo, mostrar que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n = 1, 2, \ldots$$

de onde concluímos que uma função holomorfa tem derivada de qualquer ordem. Omitimos aqui, a demonstração deste resultado. Porém, caros alunos, nada impede de ser tentada. Para isto usem o princípio da indução supondo válida a fórmula acima e mostrando que a mesma vale para $n+1$.

8.5 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que se uma função complexa é holomorfa ela tem derivada de qualquer ordem.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 08 constam os seguintes tópicos:

Teorema de Cauchy

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa contínua e $C \subset D$ uma curva suave contida em D (ver **figura 8.1**). Se $f(z)$ é holomorfa em D e tem derivada $f'(z)$ contínua em D então:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema de Cauchy-Goursat

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa contínua e $C \subset D$ uma curva suave contida em D (ver **figura 8.1**). Se $f(z)$ é holomorfa em D então:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Fórmula Integral de Cauchy

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função holomorfa em D, $C \subset D$ uma curva suave e z_0 um ponto interior da região limitada por C então:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Derivada de funções Holomorfas

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função holomorfa em D, $C \subset D$ uma curva suave e z_0 um ponto interior da região limitada por C então:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos como estender ao campo dos números complexos as mesmas noções de seqüências e séries de números complexos. Estas noções são básicas no desenvolvimento de representações de funções complexas através de séries.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 8.1. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa holomorfa, $a, b \in D$ e C uma curva lisa tal que a e b estam no seu interior. Mostre que:

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a}$$

Comentário: Procure usar os teoremas de Cauchy e o método das frações parciais.

ATIV. 8.2. Mostre que: $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(4-z^2)(z+i)} dz = -\frac{2\pi}{5}$ onde; C é o círculo $|z| = 2$.

Comentário: Use os teoremas de Cauchy e verifique quais z_0 dos fatores da forma $z - z_0$ do denominador do integrando pertencem ao interior do círculo $|z| = 2$.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.