AULA 9

Convergência de Séries de Números Complexos

META:

Apresentar o conceito de convergência de séries de números complexos.

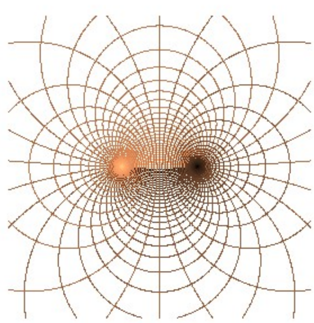
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir convergência de séries de números complexos e calcular o limite de algumas séries de números complexos.

PRÉ-REQUISITOS

Aula01 de Variáveis Complexas e os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo II.



9.1 Introdução

Caros alunos veremos aqui um pouco de seqüências e séries de números complexos. Seqüências pois são essenciais ao estudo das séries e séries pois são essenciais ao estudo das funções holomorfas visto que essas podem ser expressas como série de potências.

9.2 Seqüências de Números Complexos

Começaremos pela definição de seqüências de números complexos. A saber:

Definição 9.1. Uma seqüência de números complexos é uma função cujo domínio é o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$ e o contra-domínio o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, $z : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$.

O n-ésimo termo da seqüência será denotado $z(n)$ ou alternativamente z_n (que utilizaremos daqui para a frente). Uma seqüência pode ser denotada alternativamente por $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou $\{z_n\}$ (que utilizaremos daqui para a frente).

Exemplo 9.1. Como exemplos de seqüências temos:

1. $\{z_n\}$ onde $z_0 = 2$ e $z_n = \sqrt{2 + z_{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. $\{z_n\}$ onde $z_n = n^2 + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Definição 9.2. Seja $\{z_n\}$ uma seqüência de números complexos. Dizemos que $\{z_n\}$ é uma seqüência limitada se, somente se existe $K > 0$ tal que $z_n \in B_K(0), \forall n \in \mathbb{N}$.

OBS 9.1. Uma seqüência é limitada se todos os seus elementos pertencem a alguma bola aberta.

Definição 9.3. Seja $\{z_n\}$ uma seqüência de números complexos. Dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é o limite de $\{z_n\}$, denotado $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, se, somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $z_n \in B_\varepsilon(z)$.

OBS 9.2. Se uma seqüência $\{z_n\}$ tem limite dizemos alternativamente que ela converge. Por outro lado se $\{z_n\}$ não possui limite dizemos que a seqüência diverge.

9.3 Alguns Teoremas

Veremos agora alguns teoremas sobre seqüências de Números Complexos.

Teorema 9.1. *Seja $\{z_n\}$ uma seqüências de números complexos. Se $\{z_n\}$ é convergente então $\{z_n\}$ é limitada.*

PROVA: Como $\{z_n\}$ é convergente existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = \lim_{n\to\infty} z_n$. Daí, tomando $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $z_n \in B_1(z)$.
Daí, usando a desigualdade triangular, temos:
$|z_n - z| < 1 \rightarrow |z_n| < 1 + |z|$. De outra forma: $\forall n \geq n_0, z_n \in B_{1+|z|}(0)$. $\square$

Teorema 9.2. *Seja $\{z_n\}$ uma seqüências de números complexos tal que $z_n = x_n + y_n\imath$ onde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são seqüências de números reais então $z = x + y\imath = \lim_{n\to\infty} z_n$ se, somente se $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.*

PROVA: A prova será dividida em duas partes:
Parte 1: Se $z = x + y\imath = \lim_{n\to\infty} z_n$ então para todo $\varepsilon > 0$, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$\forall n \geq n_0, z_n \in B_\varepsilon(z)$, de outra forma: $\forall n \geq n_0, |z_n - z| < \varepsilon$.

por outro lado, como $|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z| < \varepsilon$.

Daí, temos: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0,\ |x_n - x| < \varepsilon$.

logo $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Do mesmo modo:

$y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Parte 2: se $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$\forall n \geq n_1,\ |x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $\forall n \geq n_2,\ |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ as desigualdades acima valem simultaneamente se $n \geq n_0$ i.e.

$\forall n \geq n_0,\ |x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Daí, temos:

$|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Logo $z_n \in B_\varepsilon(z)$.

Daí, temos:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0,\ z_n \in B_\varepsilon(z)$.

logo $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. $\square$

Teorema 9.3. *Sejam $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ duas seqüências de números complexos tais que $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ e $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ então:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} az_n = az$, *para todo* $a \in \mathbb{C}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - w_n) = z - w$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n . w_n) = z.w$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z}{w}$, *se* $w \neq 0$

PROVA: Provaremos apenas a *iii*) o restante ficará à cargo dos alunos.

Para todo $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ e $K > 0$ tais que, da definição de limite de seqüências e do **teorema 9.1** :

$\forall n \geq n_1,\ z_n \in B_{\varepsilon/2|w|}(z), \forall n \geq n_1,\ w_n \in B_{\varepsilon/2K}(z)$ e $\forall n \geq n_1,\ z_n \in B_K(z)$.

De outra forma:

$\forall n \geq n_1,\ |z_n - z| < \dfrac{\varepsilon}{2|w|},\ \forall n \geq n_1,\ |w_n - z| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ e $\forall n \geq n_1,\ |z_n| < K$.

Daí, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ teremos as três desigualdades acima simultaneamente satisfeitas e:

$$
\begin{aligned}
|z_n w_n - zw| &= |z_n w_n - z_n w + z_n w - zw| \\
&\leq |z_n w_n - z_n w| + |z_n w - zw| \\
&\leq |z_n|.|w_n - w| + |w|.|z_n - z| \\
&< K.|w_n - w| + |w|.|z_n - z| \\
&< K.\frac{\varepsilon}{2K} + |w|.\frac{\varepsilon}{2|w|} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Daí, temos:

$\forall n \geq n_0,\ z_n w_n \in B_\varepsilon(zw)$. Portanto:

$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n w_n) = zw$. $\square$

O próximo teorema constitui-se um importante critério de convergência de seqüências pois, com ele é possível decidir sobre a convergência de uma seqüência sem a necessidade do conhecimento prévio de seu limite. É conhecido como "Critério de Cauchy" ou "Princípio de Cauchy".

Teorema 9.4 (Critério de Cauchy)**.** *Seja $\{z_n\}$ uma seqüência de* *número complexos então $\{z_n\}$ é convergente se, somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\forall m, n \geq n_0 \ |z_m - z_n| < \varepsilon$$

9.4 Séries de Números Complexos

Como de modo geral, começaremos pela definição.

Definição 9.4. Dada uma seqüência $\{z_n\}$ de números complexos, definimos a série associada $\{s_n\}$ com a seqüência de somas parciais $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$.

OBS 9.3. Séries são seqüências especiais definidas a partir de outras seqüências. Se a seqüência de somas parciais converge dizemos que a série converge. Denotaremos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ à série numérica gerada por $\{z_n\}$.

Definição 9.5. Seja $r > 0$ um número real positivo e $\{x_n = r^n\}$ a seqüência de potências de r. Definimos a série geométrica r como a série associada a $\{x_n\}$ de somas parciais $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$.

OBS 9.4. podemos simplificar a expressão da soma parcial $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$. do seguinte modo:
fazendo o produto de s_n por r temos:
$rs_n = r \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = r +^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}$. Subtraindo de s_n temos:
$rs_n - s_n = r^{n+1} - 1$. Daí, temos:
$s_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.

Se $r < 1$ como $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\
&= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}}{1 - r} \\
&= \frac{1}{1 - r}
\end{aligned}$$

e a série geométrica é convergente.

Por outro lado se $r > 1$ como $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\
&= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}}{1 - r} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

e a série geométrica é divergente.

As séries numéricas são mais ricas, em comparação com as seqüências, no que tange aos critérios de convergências. Veremos alguns deles, na forma de teoremas dos quais provaremos alguns, começando pelo critério da comparação de séries de números reais.

Teorema 9.5 (Critério da Comparação)**.** *Sejam* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *séries numéricas onde:* $x_n, y_n \in \mathbb{R}$*. tais que* $x_n, y_n > 0$*. Supondo que para todo n,* $x_n < y_n$ *valem:*

1. *Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *converge então* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge.*
2. *Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *diverge então* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *diverge.*

Teorema 9.6. *Seja* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *uma série de números complexos. Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge então* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$*.*

PROVA: Pelo critério de Cauchy temos: $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} |s_n - s_{n-1}| = 0$.

Logo da continuidade da função módulo temos:

$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. □

OBS 9.5. O teorema acima nos dá uma condição necessária para convergência de uma série numérica.

Definição 9.6. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos. Dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente se, somente se, a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ associada à seqüência $\{|z_n|\}$ converge.

OBS 9.6. Na próxima seção, estudo das séries de potências ficará clara a importância deste conceito.

Teorema 9.7. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos. Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente.*

PROVA: Sejam $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ a n-ésima soma parcial de $\{z_n\}$ e $s_n^* = \sum_{k=0}^{n} |z_k|$ a n-ésima soma parcial de $\{|z_n|\}$. Da desigualdade triangular, fazendo $m = n + k$ temos:

$$
\begin{aligned}
|s_m - s_n| = |s_{n+k} - s_n| \\
&= |z_{n+k} + z_{n+k-1} + \cdots + z_{n+1}| \\
&\leq |z_{n+k}| + |z_{n+k-1}| + \cdots + |z_{n+1}| \\
&\leq |s_{n+k}^* - s_n^*| \\
&\leq |s_m^* - s_n^*|
\end{aligned}
$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ do critério de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$, $|s_m^* - s_n^*| < \varepsilon$. Da desigualdade acima temos: $\forall m, n \geq n_0$, $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ satisfaz o critério de Cauchy e é convergente. $\square$

Teorema 9.8. *Sejam* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *duas séries de números complexos convergentes tais que* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = w$ *e* $a \in \mathbb{C}$ *então:*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (az_n) = az$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = z + w$

9.5 Séries de Potência

Esta seção será o ponto alto de nossa aula. Nela veremos séries de potência, culminando com um teorema de representação de funções holomorfas.

Definição 9.7. Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números complexos. Definimos a série de potências associada a $\{a_n\}$ de centro em 0 por: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

OBS 9.7. As primeiras somas parciais da série de potências associada a $\{a_n\}$ de centro em 0 são:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 z \\
s_2 &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \\
&\vdots \\
s_n &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dada uma série de potência duas perguntas aparecem de forma natural. Na primeira desejamos saber para quais valores de z a série é convergente. A segunda é se fizermos $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ sob quais condições teríamos uma função e onde estaria definida. O caso trivial $z = 0$ é nos dá uma resposta óbvia pois, teríamos uma seqüência constante. A verdadeira questão é para que outros valores de z teríamos uma resposta positiva?

Teorema 9.9. *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *uma série numérica:*

i) Se existe $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$ *tal que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ *converge então* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge para todo* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| < |z_1|$

ii) Se existe $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ *tal que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ *diverge então* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge para todo* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z_2| < |z|$

PROVA: Dividiremos a prova em duas partes:

Parte 1: Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge do **teorema 9.6** temos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_1^n = 0$ e a seqüência $\{a_n z_1^n\}$ é limitada. Logo existe $K > 0$

tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_1^n| < K$. Daí, como $|z| < |z_1|$ pondo $r = \dfrac{|z|}{|z_1|} < 1$ temos:

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n|.|z|^n \\ &= |a_n|.|z_1|^n.\left(\frac{|z|}{|z_1|}\right)^n \\ &= |a_n z_1^n|.r^n \\ &< Kr^n \end{aligned}$$

Como $r < 1$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Kr^n$ converge para $\dfrac{K}{1-r}$ pelo critério da comparação **teorema 9.5** a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ e portanto do **teorema 9.7** a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é convergente.

Parte 2: Suponha, por absurdo, que exista um número $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > |z_2|$ e a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ seja convergente. repetindo a demonstração da **Parte 1** trocando z por z_2 e z_1 por z teríamos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ seria convergente o que é um absurdo. Logo, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > |z_2|$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é divergente. $\square$

OBS 9.8. O teorema acima nos diz de se uma série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é convergente em um ponto $z_1 \neq 0$ então é convergente em todos os pontos da bola aberta $B_{|z_1|}(0)$ e portanto podemos definir uma função $f : B_{|z_1|}(0) \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n z^n$.

Teorema 9.10. *Seja* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *uma série de potências então existe uma bola fechada* $\bar{B}_r(0)$ *tal que a série converge absolutamente em todos os pontos do interior da bola e diverge para todos os pontos do exterior da bola.*

Definição 9.8. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências denominamos raio de convergência ao raio r da bola definida pelo teorema acima.

O seguinte teorema oferece um modo prático de determinar o raio de convergência de uma série de potências.

Teorema 9.11. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *uma série de potências tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. *Então o raio de convergência da série de potências pode ser dado por:*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad ou \quad r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Vejamos um exemplo de determinação do raio de convergência de uma série de potências.

Exemplo 9.2. Seja a série de potências dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Determine seu raio de convergência.

SOLUÇÃO: Tomando $a_n = \frac{1}{n!}$ temos: $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1).n!}$. Logo: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1).n!}} = \frac{(n+1).n!}{n!} = n+1$.

Daí, temos:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Logo:

$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$. $\square$

Para concluir enunciaremos sem demonstração o seguinte teorema.

Teorema 9.12. *Sejam* $D \subset \mathbb{C}$ *um aberto e* $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ *um função holomorfa em uma bola aberta* $B_r(z_0) \subset D$ *então para cada* $z \in B_r(z_0)$ *temos:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

9.6 Conclusão

Na aula de hoje, tanto as seqüências de números complexos quanto as séries de números complexos têm paralelo com seqüências e séries de números reais exceto por alguns critérios de convergência.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 09 constam os seguintes tópicos:

Seqüências de Números Complexos

Definição de seqüência de Números complexos

Uma seqüência de números complexos é uma função cujo domínio é o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$ e o contra-domínio o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, $z : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$.

Convergência de Seqüência de Números Complexos

Se uma seqüência $\{z_n\}$ tem limite dizemos alternativamente que ela converge. Por outro lado se $\{z_n\}$ não possui limite dizemos que a seqüência diverge.

Teorema 1

Seja $\{z_n\}$ uma seqüências de números complexos. Se $\{z_n\}$ é convergente então $\{z_n\}$ é limitada.

Teorema 2

Sejam $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ duas seqüências de números complexos tais que $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ e $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ então:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} az_n = az$, para todo $a \in \mathbb{C}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - w_n) = z - w$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n.w_n) = z.w$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z}{w}$, se $w \neq 0$

Teorema 3: Critério de Cauchy

Seja $\{z_n\}$ uma seqüência de número complexos então $\{z_n\}$ é convergente se, somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geq n_0 \; |z_m - z_n| < \varepsilon$$

Séries de Números Complexos

Definição

Dada uma seqüência $\{z_n\}$ de números complexos, definimos a série associada $\{s_n\}$ com a seqüência de somas parciais $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$.

Definição

Seja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos. Dizemos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente se, somente se, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ associada à seqüência $\{|z_n|\}$ converge.

Teorema 1

Seja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos. Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente.

Teorema 2

Sejam $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$ duas séries de números complexos convergentes tais que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = z$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n = w$ e $a \in \mathbb{C}$ então:

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az_n) = az$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(z_n + w_n) = z + w$

Séries de Potência

Definição

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números complexos. Definimos a série de potências associada a $\{a_n\}$ de centro em 0 por: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Teorema 1

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série numérica:

i) Se existe $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < |z_1|$

ii) Se existe $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ diverge então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z_2| < |z|$

Teorema 2

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências então existe uma bola fechada $\bar{B}_r(0)$ tal que a série converge absolutamente em todos os pontos do interior da bola e diverge para todos os pontos do exterior da bola.

Definição

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências denominamos raio de convergência ao raio r da bola definida pelo teorema acima.

Teorema 3

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Então o raio de convergência da série de potências pode ser dado por:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad ou \;\; r = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Teorema 4

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ um função holomorfa em uma bola aberta $B_r(z_0) \subset D$ então para cada $z \in B_r(z_0)$ temos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos séries de Laurent uma forma de representação de funções não holomorfas.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 9.1. Sejam $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ duas seqüências de números complexos tais que $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ e $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$. Mostre, usando a definição, que:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w.$$

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção as demonstrações dos teoremas sobre seqüências de números complexos, elas lhe servirão de guia.

ATIV. 9.2. Seja a série de potências dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$. Determine seu raio de convergência.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo de determinação do raio de convergência de uma série de potências, ele lhe servirá de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.