AULA

10

Séries de Laurent

META:

Introduzir séries de Laurent.

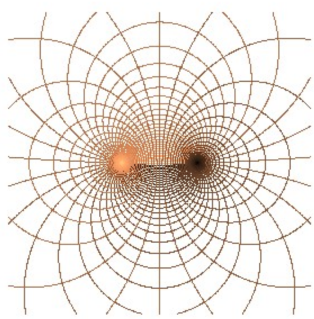
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir séries de Laurent e determinar a série de Laurent para algumas funções de variáveis complexas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula09 de Variáveis Complexas e os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo II.



10.1 Introdução

Caros alunos essa nossa aula tem como tema "Séries de Laurent". Como as séries de Taylor servem para representar funções holomorfas, Séries de Laurent servem para representar certos tipos de funções não-holomorfas.

10.2 Séries de Laurent

Caros alunos esta aula em particular será curta. Vamos então diretamente para o teorema que é o ponto central de nossa aula antes porém, veremos um resultado importante na demonstração do teorema. A saber: Se $z \neq 1$ é um número complexo então:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z} \tag{10.147}$$

PROVA: Considere a soma $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ e fazendo o produto zs_n temos:
$zs_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}$. Subtraindo $s_n - zs_n$ temos:
$s_n - zs_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - (z + z^2 + \cdots + z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}$.
Daí, temos:
$s_n(-z) = 1 - z^{n+1}$. Logo:
$\dfrac{1 - z^{n+1}}{1-z} = s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$. E finalmente:
$\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$. $\square$

Teorema 10.1. *Seja $f(\bullet)$ uma função holomorfa no anel aberto $D = B_{\varrho_2}(z_0) - B_{\varrho_1}(z_0)$ e sua fronteira onde $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ seja $z \in D$ (ver* **figura 10.1***) então:*

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

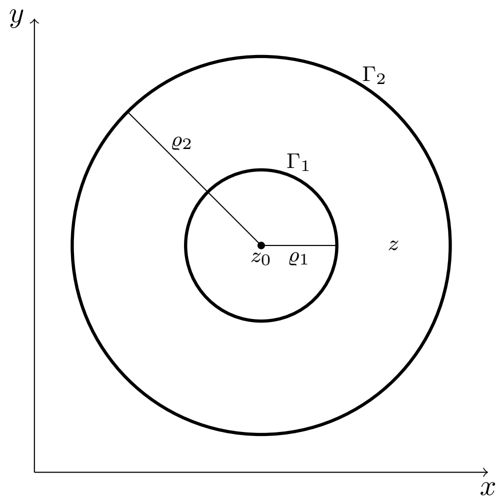


Figura 10.1: Série de Laurent

onde:

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\oint_{\Gamma_2}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz & m = 0, 1, 2, \dots \\ a_{-m} = \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\oint_{\Gamma_1} f(z)(z-z_0)^{m-1}dz & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

PROVA: Da fórmula integral de Cauchy temos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw - \oint_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw \tag{10.148}$$

Vamos considerar a primeira integral em **eqn 10.148**. Para isto tomamos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0+z_0-z} \\ &= \frac{1}{(w-z_0)(1+(z_0-z)/(w-z_0))} \\ &= \frac{1}{(w-z_0)(1-(z-z_0)/(w-z_0))} \end{aligned} \tag{10.149}$$

Substituindo z por $\dfrac{z-z_0}{w-z_0}$ em **eqn 10.147**temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-(z-z_0)/(w-z_0)} &= 1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}}{1-(z-z_0)/(w-z_0)}
\end{aligned}
\tag{10.150}
$$

Manipulando **eqn 10.150** temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-(z-z_0)/(w-z_0)} &= 1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}}{1-(z-z_0)/(w-z_0)} \\
&= 1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}}{\dfrac{w-z_0-(z-z_0)}{w-z_0}} \\
&= 1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}}{\dfrac{w-z}{w-z_0}} \\
&= 1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \\
&+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}\frac{w-z_0}{w-z}
\end{aligned}
\tag{10.151}
$$

Substituindo **eqn 10.151** em **eqn 10.149** temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0}+\frac{z-z_0}{(w-z_0)^2}+\cdots \\
&+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{1}{w-z}
\end{aligned}
\tag{10.152}
$$

Fazendo o produto de **eqn 10.152** por $f(w)$ e integrando ao longo de Γ_2 no sentido positivo temos:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0}dw + \oint_{\Gamma_2} f(w)\frac{z-z_0}{(w-z_0)^2}dw + \cdots \\ + \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}dw\end{aligned} \tag{10.153}$$

Fazendo o produto de **eqn 10.153** por $\dfrac{1}{2\pi\imath}$ e definindo

$$a_k = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw,\ k = 0, 1, \ldots$$

temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} \\ + \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_2} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}dw\end{aligned} \tag{10.154}$$

Vamos considerar agora a segunda integral em **eqn 10.148**. Para isto tomamos:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-z_0+z_0-w} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)(1+(z_0-w)/(z-z_0))} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)(1-(w-z_0)/(z-z_0))}\end{aligned} \tag{10.155}$$

Substituindo z por $\dfrac{w-z_0}{z-z_0}$ em **eqn 10.147**temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-(w-z_0)/(z-z_0)} = 1 + \frac{w-z_0}{z-z_0} + \cdots + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \\ + \frac{\left(\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n+1}}{1-(w-z_0)/(z-z_0)}\end{aligned} \tag{10.156}$$

Manipulando **eqn 10.156** temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-(w-z_0)/(z-z_0)} &= 1+\frac{w-z_0}{z-z_0}+\cdots+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n+1}}{1-(w-z_0)/(z-z_0)} \\
&= 1+\frac{w-z_0}{z-z_0}+\cdots+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n+1}}{\dfrac{z-z_0-(w-z_0)}{z-z_0}} \\
&= 1+\frac{w-z_0}{z-z_0}+\cdots+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \\
&+\frac{\left(\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n+1}}{\dfrac{z-w}{z-z_0}} \\
&= 1+\frac{w-z_0}{z-z_0}+\cdots+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \\
&+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n+1}\frac{z-z_0}{z-w}
\end{aligned} \tag{10.157}$$

Substituindo **eqn 10.157** em **eqn 10.155** temos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0}+\frac{w-z_0}{(z-z_0)^2}+\cdots \\
+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{1}{z-w}
\end{aligned} \tag{10.158}$$

Fazendo o produto de **eqn 10.158** por $f(w)$ e integrando ao longo de Γ_1 no sentido positivo temos:

$$\begin{aligned}
-\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{z-z_0}dw+\oint_{\Gamma_1}f(w)\frac{w-z_0}{(z-z_0)^2}dw+\cdots \\
+\oint_{\Gamma_1}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{z-w}dw
\end{aligned} \tag{10.159}$$

Fazendo o produto de **eqn 10.159** por $\dfrac{1}{2\pi\imath}$ e definindo

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_1} f(w)(w-z_0)^{k-1}dw,\ k = 1, 2, \ldots$$

temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = & \frac{a{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\\ & + \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_1}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{z-w}dw\end{aligned} \tag{10.160}$$

Resta mostrar que a integral final em **eqn 10.154** tendem a zero quando $n \to \infty$. Para isso façamos:

$$u_n = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_2}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw \tag{10.161}$$

Como $w \in \Gamma_2$ temos: $\max\left|\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \gamma < 1$. Por outro lado como $f(\bullet)$ é holomorfa no anel aberto $D = B_{\varrho_2}(z_0) - B_{\varrho_1}(z_0)$ e sua fronteira $|f(w)| < M$. E também, $|w-z| = |w-z_0+z_0-z| \geq |w-z_0| - |z-z_0| = \varrho_2 - |z-z_0|$. Daí, tomando o módulo de **eqn 10.161** temos:

$$\begin{aligned}|u_n| &= \left|\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_2}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw\right|\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_2}\left|\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}\right|dw\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n M}{\varrho_2 - |z-z_0|}2\pi\varrho_2\\ &\leq \frac{\gamma^n M\varrho_2}{\varrho_2 - |z-z_0|}\end{aligned} \tag{10.162}$$

De **eqn 10.162** temos $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$ de onde $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$

Da mesma forma para mostrar que a integral final em **eqn 10.160** tendem a zero quando $n \to \infty$ façamos:

$$v_n = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_1}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{z-w}dw \tag{10.163}$$

Como $w \in \Gamma_1$ temos: $\max\left|\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \gamma < 1$. Por outro lado como $f(\bullet)$ é holomorfa no anel aberto $D = B_{\varrho_2}(z_0) - B_{\varrho_1}(z_0)$ e sua fronteira $|f(w)| < M$. E também, $|z-w| = |z-z_0+z_0-w| \geq |z-z_0| - |w-z_0| = |z-z_0| - \varrho_1$. Daí, tomando o módulo de **eqn 10.163** temos:

$$\begin{aligned} |v_n| &= \left|\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma_2}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{z-w}dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_2}\left|\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}\right|dw \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n M}{|z-z_0|-\varrho_1}2\pi\varrho_1 \\ &\leq \frac{\gamma^n M\varrho_1}{|z-z_0|-\varrho_1} \end{aligned} \tag{10.164}$$

De **eqn 10.164** temos $\lim\limits_{n\to\infty}|v_n| = 0$ de onde $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ Portanto, passando o limite $n \to \infty$ em **eqn 10.154** e **eqn 10.160** levando em conta que as integrais finais de **eqn 10.154** e **eqn 10.160** tendem a zero e substituindo em **eqn 10.148** temos:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z-z_0)^m$$

onde:

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\oint_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz & m = 0,1,2,\ldots \\ a_{-m} = \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\oint_{\Gamma_1} f(z)(z-z_0)^{m-1}dz & m = 1,2,3,\ldots \end{cases} \square$$

OBS 10.1. As vezes é conveniente reescrever a série de Laurent na forma:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$$

onde:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\oint_{\Gamma_2}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz & n = 0,1,2,\ldots \\ b_m = \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\oint_{\Gamma_1} f(z)(z-z_0)^{m-1}dz & m = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Vamos a alguns exemplos de aplicação da série de Laurent.

Exemplo 10.1. Determine a série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{e^{az}}{(z-1)^4}$ em torno do ponto $z_0 = 1$.

SOLUÇÃO: Primeiramente vamos deslocar o ponto onde $f(\bullet)$ é descontínua de $z_0 = 1$ para $z_0 = 0$ fazendo a mudança de variável $u = z - 1$ e temos:

$$f(z) = \hat{f}(u) = f(u+1) = \frac{e^{a(u+1)}}{(u+1-1)^4} = e^a \frac{e^{au}}{u^4} \tag{10.165}$$

Como $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ temos:

$$\begin{aligned} e^{au} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(au)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n u^n}{n!} \end{aligned} \tag{10.166}$$

De **eqn 10.165** e **eqn 10.166** temos:

$$\begin{aligned} f(z) = \hat{f}(u) &= e^a \frac{1}{u^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n u^n}{n!} \\ &= e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n u^{n-4}}{n!} \end{aligned} \tag{10.167}$$

Fazendo em **eqn 10.167** a mudança de variável $k = n-4$, $n = k+4$ e substituindo os limites $n \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$ e $k \begin{cases} \infty \\ -4 \end{cases}$ no somatório temos:

$$f(z) = \hat{f}(u) = e^a \sum_{k=-4}^{\infty} \frac{a^{k+4} u^k}{(k+4)!} \tag{10.168}$$

Explicitando no somatório de **eqn 10.168** os termos de $k = -4$ até $k = -1$ temos:

$$\begin{aligned} f(z) = \hat{f}(u) &= \frac{e^a}{u^4} + \frac{ae^a}{u^3} + \frac{a^2 e^a}{u^2} + \frac{a^3 e^a}{u} \\ &+ e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+4} u^k}{(k+4)!} \end{aligned} \tag{10.169}$$

Retornando em **eqn 10.170** $u = z - 1$ temos:

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{e^a}{(z-1)^4} + \frac{ae^a}{(z-1)^3} + \frac{a^2e^a}{(z-1)^2} + \frac{a^3e^a}{z-1} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+4}e^a(z-1)^k}{(k+4)!}. \ \square \end{aligned} \tag{10.170}$$

10.3 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que certas funções não-holomorfas também podem ser representadas por série de potências. Mais especificamente, por série de Laurent.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 10 consta o seguinte tópico:

Série de Laurent

Seja $f(\bullet)$ uma função holomorfa no anel aberto $D = B_{\varrho_2}(z_0) - B_{\varrho_1}(z_0)$ e sua fronteira onde $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ seja $z \in D$ então:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$$

onde:

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{1}{2\pi\imath} \displaystyle\oint_{C_2} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz & m = 0, 1, 2, \dots \\ a_{-m} = \dfrac{1}{2\pi\imath} \displaystyle\oint_{C_1} f(z)(z-z_0)^{m-1} dz & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos singularidades de funções de variáveis complexas. Mais especificamente veremos como usar séries de Laurent para classificar pontos de singularidades isoladas de funções não-holomorfas..

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 10.1. Determine a série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$ entorno do ponto $z_0 = 0$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo acima, ele lhe servirá de guia.

ATIV. 10.2. Determine a série de Laurent da função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)^2}$ entorno do ponto $z_0 = 1$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo acima, ele lhe servirá de guia. Veja também a série de Taylor para a função $\dfrac{1}{(1+z)^2}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.