AULA 11

Singularidades de Funções de Variáveis Complexas

META:

Introduzir o conceito de singularidades de funções de variáveis complexas.

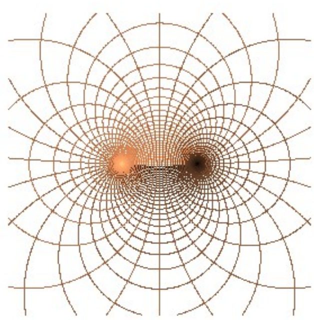
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir singularidades de funções de variáveis complexas e analisar as singularidades de algumas funções de variáveis complexas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula10 de Variáveis Complexas e os conhecimentos básicos, da disciplina Cálculo II.



11.1 Introdução

Caros alunos o tema dessa nossa aula é "Singularidades de Funções de Variáveis Complexas". O objetivo é usar séries de Laurent para estudar e classificar pontos de singularidades de funções complexas.

11.2 Pontos Singulares de Funções Complexas

Começaremos por estudar pontos singulares de funções complexas.

Definição 11.1. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. Dizemos que z_0 é um ponto singular de $f(\bullet)$ se, somente se $f'(z_0) = 0$ ou não existe.

Definição 11.2. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$ um ponto singular de $f(\bullet)$. Dizemos que z_0 é um ponto singular isolado se, somente se existe uma bola aberta $B_r(z_0)$ de centro em z_0 tal que z_0 é o único ponto singular de $f(\bullet)$ que pertence a $B_r(z_0)$. Caso contrario z_0 é dito um ponto singular não isolado.

OBS 11.1. Pontos singulares são extremamente importantes na análise complexas pois, dizem muito do comportamento local de funções complexas.

11.3 Classificação de Pontos Singulares Isolados

Estaremos, aqui, interessado em estudar e classificar pontos singulares isolados. Para isso usaremos a representação em série de

Laurent da função a ser estudada.

Definição 11.3. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa representada em série de Laurent por:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

e $z_0 \in D$ um ponto singular isolado de $f(\bullet)$. Se:

i) $b_m = 0, \forall m = 1, 2, \ldots$ dizemos que z_0 é uma singularidade removível.

ii) $b_k \neq 0$ e $b_m = 0, \forall m = k+1, k+2, \ldots$ dizemos que z_0 é um polo de ordem k.

iii) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists k > m | b_k \neq 0$ dizemos que z_0 é uma singularidade essencial.

OBS 11.2. Se z_0 é uma singularidade removível $f(\bullet)$ é holomorfa sendo representada por uma série de Taylor em torno de z_0 i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

OBS 11.3. Se z_0 é um polo de ordem k a representação de $f(\bullet)$ em série de Laurent fica reduzida a:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

OBS 11.4. Se z_0 é uma singularidade essencial os coeficiente b_m da representação de $f(\bullet)$ são não nulos para uma infinidade de valores de $m \in \mathbb{N}$.

Vejamos alguns exemplos de funções complexas e suas singularidades.

Exemplo 11.1. Seja $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$.

Como $\sin(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ então:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Portanto $z = 0$ é uma singularidade removível de $f(\bullet)$.

Exemplo 11.2. Seja $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^3}$.

Como $\sin(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ então:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^3}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+3)!} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Portanto $z = 0$ é um polo de ordem 2 de $f(\bullet)$.

Exemplo 11.3. Seja $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sin(1/z)$.

Como $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ então:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1/z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1/z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-2}} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-2}} \\
&= \cdots - \frac{1}{7!z^7} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{3!z^3} + 1
\end{aligned}
$$

Portanto $z = 0$ é uma singularidade essencial de $f(\bullet)$.

Teorema 11.1. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. As seguintes proposições são equivalentes:*

i) z_0 é uma singularidade removível de $f(\bullet)$.

ii) Existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

iii) $|f(z)|$ é limitado em alguma bola aberta $B_r(z_0)$.

PROVA: Dividiremos a prova em três partes:

Parte 1: i) implica ii). Supondo que i) vale a série de Laurent de $f(z)$ é da forma:

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

Logo $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ e portanto existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$ e ii) vale.

Parte 2: ii) implica iii). Supondo que existe $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, da definição de limite existe $\delta > 0$ tal que se $z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$

então $f(z) \in B_1(L)$. De outra forma. Se $z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$ então $|f(z) - L| < 1$ ou seja: $\forall z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$, $|f(z)| < |L| + 1$ isto é vale iii).

Parte 3: iii) implica i). Suponhamos que vale iii) então existe $K > 0$ e uma bola $B_r(z_0)$ tal que $\forall z \in B_r(z_0)$, $|f(z)| < K$. por outro lado, os coeficientes b_m da série de Laurent são dados por:

$$b_m = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma f(z)(z-z_0)^{m-1}dz,\ m = 1, 2, \ldots$$

onde $\Gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{\imath t}$, $t \in [0, 2\pi)$ e $\varepsilon < r$. Daí, temos:

$$\begin{aligned}
|b_m| &\leq \Big|\frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma f(z)(z-z_0)^{m-1}dz\Big| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |f(z)|.|z-z_0|^{m-1}|dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}K\varepsilon^{m-1}2\pi\varepsilon \\
&\leq K\varepsilon^m
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos: $|b_m| - 0$ e portanto $b_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Logo z_0 é uma singularidade removível de $f(\bullet)$ e i) vale. □

Teorema 11.2. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$, então z_0 é um polo de ordem k de $f(\bullet)$ se, somente se existe $L \neq 0$ tal que $L = \lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)^k f(z)$.*

PROVA: Dividimos a prova em duas partes:

Parte 1 (Necessidade) Suponhamos que z_0 é um polo de ordem k de $f(\bullet)$ então a representação por série de Laurent de $f(z)$ é da forma:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{k}\frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$$

Logo, fazendo o produto por $(z - z_0)^k$ temos:

$$(z-z_0)^k f(z) = b_k + \cdots + b_1(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0} a_n(z-z_0)^{n+k}$$

Passando o limite $z \to z_0$ temos:

$\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^k f(z) = b_k \neq 0$ e temos nosso candidato $L = b_k$.

Parte 2 (Suficiência) Suponhamos que existe o limite $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^k f(z) = L \neq 0$. Definindo a função $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$, temos: $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = L \neq 0$. Logo da parte ii) do **teorema 12.1** $g(z)$ tem uma singularidade removível em z_0 e pode ser dada por uma série de Taylor centrada em z_0 em alguma bola aberta $B_r(z_0)$.

$$g(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

Daí, como $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ podemos escrever para $f(z)$.

$$f(z) = \frac{L}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0} a_{n+k} (z - z_0)^n$$

E portanto z_0 é um polo de ordem k de $f(\bullet)$. $\square$

Vamos agora enunciar um último teorema sem demonstra-lo.

Teorema 11.3. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e suponhamos que $z_0 \in D$ é uma singularidade essencial de $f(\bullet)$ e que $f(z)$ é holomorfa em $B_\varrho(z_0) - \{z_0\} \subset D$ então dados $0 < r \leq \varrho$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, existe um número complexo β tal que $\beta \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ e $|f(\beta) - \alpha| < \varepsilon$.*

11.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que algumas funções de variáveis complexas são não-holomorfas pois apresentam pontos singulares (pontos onde a derivada da função é zero ou não existe). Também vimos que as singularidades isoladas são classificadas como removíveis, pólos ou singularidades essenciais.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 11 constam os seguintes tópicos:

Pontos Singulares de Funções Complexas

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. Dizemos que z_0 é um ponto singular de $f(\bullet)$ se, somente se $f'(z_0) = 0$ ou não existe.

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$ um ponto singular de $f(\bullet)$. Dizemos que z_0 é um ponto singular isolado se, somente se existe uma bola aberta $B_r(z_0)$ de centro em z_0 tal que z_0 é o único ponto singular de $f(\bullet)$ que pertence a $B_r(z_0)$. Caso contrario z_0 é dito um ponto singular não isolado.

Classificação de Pontos Singulares Isolados

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa representada em série de Laurent por:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

e $z_0 \in D$ um ponto singular isolado de $f(\bullet)$. Se:

i) $b_m = 0, \forall m = 1, 2, \ldots$ dizemos que z_0 é uma singularidade removível.

ii) $b_k \neq 0$ e $b_m = 0, \forall m = k + 1, k + 2, \ldots$ dizemos que z_0 é um polo de ordem k.

iii) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists k > m | b_k \neq 0$ dizemos que z_0 é uma singularidade essencial.

Teorema 1

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) z_0 é uma singularidade removível de $f(\bullet)$.

ii) Existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

iii) $|f(z)|$ é limitado em alguma bola aberta $B_r(z_0)$.

Teorema 2

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in D$, então z_0 é um polo de ordem k de $f(\bullet)$ se, somente se existe $L \neq 0$ tal que $L = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$.

Teorema 3

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma função complexa e suponhamos que $z_0 \in D$ é uma singularidade essencial de $f(\bullet)$ e que $f(z)$ é holomorfa em $B_\varrho(z_0) - \{z_0\} \subset D$ então dados $0 < r \leq \varrho$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, existe um número complexo β tal que $\beta \in B_r(z_0) - \{z_0\}$ e $|f(\beta) - \alpha| < \varepsilon$.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos o cálculo de resíduos que nos permitirá um teorema semelhante a integral d Cauchy para funções não-holomorfas com singularidades isoladas tipo polo.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 11.1. Seja $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \tan(z\boldsymbol{\imath})$. Determine todas as singularidades de $f(\bullet)$ e estabeleça o seu domínio.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos, eles lhe servirão de guia.

ATIV. 11.2. Seja $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{1 - cos(z)}{z^3}$. Classifique as singularidades de $f(\bullet)$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos, eles lhe servirão de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.