AULA

Cálculo de Resíduos

12

META:

Apresentar cálculo de resíduos.

OBJETIVOS:

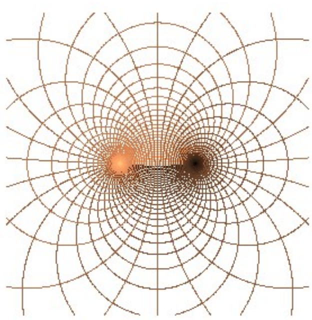
Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir resíduo de uma função de variáveis complexas em um ponto dado e

calcular o resíduo de uma função de variáveis complexas em um ponto dado.

PRÉ-REQUISITOS

Aula11 de Variáveis Complexas.



12.1 Introdução

Caros alunos nessa nossa aula veremos "Cálculo de Resíduos". O teorema da integral de Cauchy-Goursat assegura que a integral de uma função holomorfa ao longo de uma curva fechada simples C é zero. O cálculo de resíduos permite estender o teorema de Cauchy-Goursat para funções que possuam singularidades isoladas tipo polo no interior da curva C.

12.2 Resíduos

Lembrem-se que z_0 é dito um ponto singular de uma função $f(\bullet)$ se $f(\bullet)$ falha em ser holomorfa em z_0 mais é holomorfa em algum ponto de toda vizinhança de z_0. Ademais z_0 é dita singularidade isolada se existe uma vizinhança de z_0 onde $f(\bullet)$ é holomorfa a exceção de z_0.

Definição 12.1. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_0\}$. Definimos o resíduo de $f(\bullet)$ no ponto z_0, denotado $res(f, z_0)$, como coeficiente do termo $\dfrac{1}{z - z_0}$ da série de Laurent de $f(\bullet)$ centrada em z_0.

Vejamos um exemplo de resíduo.

Exemplo 12.1. Na aula10 vimos que a série de Laurent para a função $f(z) = \dfrac{e^{az}}{(z-1)^4}$ em torno do ponto $z_0 = 1$ era:

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{e^a}{(z-1)^4} + \frac{ae^a}{(z-1)^3} + \frac{a^2e^a}{(z-1)^2} + \frac{a^3e^a}{z-1} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+4}e^a(z-1)^k}{(k+4)!}. \end{aligned}$$

Por simples inspeção vemos que: $res(f, 1) = a^3e^a$.

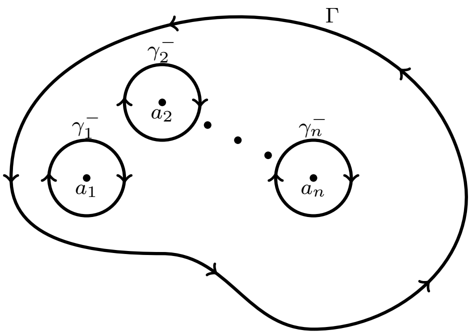


Figura 12.1: Teorema dos Resíduos

Vejamos agora como adaptar o teorema de Cauchy-Goursat para o caso de funções não-holomorfas com um número finito de pólos.

Teorema 12.1 (Teorema dos resíduos)**.** *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Suponha $\Gamma \subset D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ uma curva suave por partes , orientada no sentido positivo, tal que em seu interior contenha todos os pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ então:*

$$\frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res(f, z_k)$$

PROVA: Para cada ponto z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ tomemos um círculo γ_k de centro em z_k tais que: γ_k não tem ponto em comum com γ_n, $n \neq k$ nem com Γ e está orientado positivamente (sentido anti-horário) (ver **figura 12.1**) seja γ_k^- o círculo γ_k orientado negativamente (sentido horário). Seja $C = \Gamma \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$. Do teorema de Cauchy temos:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (12.171)$$

Levando em conta a construção de C podemos reescrever **eqn**

12.171 como:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz \tag{12.172}$$

Do teorema de Laurent temos:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-z_k)^m} + \sum_{n=0} a_n(z-z_k)^n$$

onde:

$$b_m = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{\gamma_k} f(z)(z-z_k)^{m-1}dz,\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

Em particular:

$$res(f, z_k) = b_1 = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{\gamma_k} f(z)dz$$

Daí, tiramos:

$$\oint_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi\imath res(f, z_k) \tag{12.173}$$

Daí, substituindo **eqn 12.173** em **eqn 12.172** temos:

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res(f, z_k).\ \square \tag{12.174}$$

Veremos agora um teorema que relaciona em uma mesma integral o número de zeros e o número de pólos de uma função.

Teorema 12.2. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Suponha $\Gamma \subset D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ uma curva suave por partes , orientada no sentido positivo, tal que em seu interior contenha todos os pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e que esses pontos sejam pólos de $f(\bullet)$ e que Γ não contenha nenhum zero de $f(\bullet)$ então:*

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

onde Z é o número de zeros de $f(\bullet)$ no interior de Γ, contado tantas vezes quantas forem sua multiplicidade e P o número de *pólos de $f(\bullet)$ no interior de Γ contado tantas vezes quantas forem sua ordem.*

PROVA: Consideremos a integral:

$$\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{12.175}$$

Pelo teorema dos resíduos a integral em **eqn 12.175** é a soma dos resíduos do integrando. Porém, dado um ponto a no interior de Γ temos três possibilidades:

i) $f(a) \neq 0$

ii) $f(0) = 0$ e a é um zero de multiplicidade m de $f(\bullet)$

iii) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \pm\infty$, a é um polo de ordem k de $f(\bullet)$

Parte 1: no caso i) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ é holomorfa o resíduo é zero e o ponto nada contribui para a integração em **eqn 12.175**.

Parte 2 no caso ii) para este caso existe uma bola aberta $B_r(a)$ de raio r e centro em a tal que $f(z) = (z-a)^m g(z)$, $\forall z \in B_r(a)$ onde $g(z)$ é holomorfa em $B_r(a)$. Daí, calculando a razão $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ temos:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)}{(z-a)^m g(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{12.176}$$

Como $g(z)$ é holomorfa em $B_r(a)$, $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ também é holomorfa e portanto tem representação por série de Taylor en torno do ponto $z = a$. Daí, temos:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{12.177}$$

Daí, substituindo **eqn 12.177** em **eqn 12.176** temos:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{12.178}$$

Logo **eqn 12.178** é a série de Laurent de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, $z = a$ é um polo de primeira ordem cujo resíduo é $res\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = m$, que é a contribuição do ponto $z = a$ à integral **eqn 12.175**.

Parte 3: no caso iii) para este caso existe uma bola aberta $B_r(a)$ de raio r e centro em a tal que $f(z) = (z-a)^{-k}g(z)$, $\forall z \in B_r(a)$ onde $g(z)$ é holomorfa em $B_r(a)$. Daí, calculando a razão $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k(z-a)^{-k-1}g(z) + (z-a)^{-k}g'(z)}{(z-a)^{-k}g(z)} \\ &= \frac{-k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}\end{aligned} \tag{12.179}$$

Como $g(z)$ é holomorfa em $B_r(a)$, $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ também é holomorfa e portanto tem representação por série de Taylor en torno do ponto $z = a$. Daí, temos:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{12.180}$$

Daí, substituindo **eqn 12.180** em **eqn 12.179** temos:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{12.181}$$

Logo **eqn 12.181** é a série de Laurent de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, $z = a$ é um polo de primeira ordem cujo resíduo é $res\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = -k$, que é a contribuição do ponto $z = a$ à integral **eqn 12.175**.

Juntando as contribuições dos casos ii) e iii) temos:

$$\frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

onde Z é o número de zeros de $f(\bullet)$ no interior de Γ, contado tantas vezes quantas forem sua multiplicidade e P o número de pólos de $f(\bullet)$ no interior de Γ contado tantas vezes quantas forem sua ordem. $\square$

A seguir, veremos alguns teoremas que auxiliaram na determinação dos resíduos de uma função não-holomorfa.

Teorema 12.3. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_0\}$. E suponhamos que z_0 é um polo de ordem 1 de $f(\bullet)$. Então $res(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.*

PROVA: Da hipótese do teorema a série de Laurent de $f(z)$ é da forma:

$$f(z) = \frac{res(f, z_0)}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (12.182)$$

Fazendo o produto de **eqn 12.182** por $z - z_0$ temos:

$$(z - z_0) f(z) = res(f, z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1} \qquad (12.183)$$

Passando o limite $z \to z_0$ em **eqn 12.183** e levando em conta que $\lim\limits_{z \to z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1} = 0$ temos:

$$res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \ \square$$

Teorema 12.4. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_0\}$. E suponhamos que z_0 é um polo de ordem $k > 1$ de $f(\bullet)$ e $g : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$. Então $res(f, z_0) = \dfrac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$.*

PROVA: Da hipótese do teorema a série de Laurent de $f(z)$ é da forma:

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{res(f, z_0)}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (12.184)$$

Fazendo o produto de **eqn 12.184** por $(z-z_0)^k$ temos:

$$(z-z_0)^k f(z) = b_k + \cdots + res(f,z_0)(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+k} \tag{12.185}$$

Como $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$ e é holomorfa da **eqn 12.185** temos:

$$g(z) = b_k + \cdots + res(f,z_0)(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+k} \tag{12.186}$$

Logo **eqn 12.184** é a expansão em série de Taylor de $g(z)$ en torno do ponto z_0 e $res(f,z_0)$ o coeficiente de $(z-z_0)^{k-1}$ nessa expansão e portanto:

$$res(f,z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}. \ \square$$

OBS 12.1. Se $f(z)$ é holomorfa em z_0 então $res(f,z_0) = 0$ que não contribui em nada. Porém, se z_0 é uma singularidade essencial não tem uma fórmula para simplificar a obtenção do resíduo e o caminho é determinar a série de Laurent de $f(z)$.

12.3 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que é possível estender o teorema de Cauchy para funções não-holomorfas no interior de uma curva fechada simples em cujo interior o integrando possua singularidades isoladas.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 12 constam os seguintes tópicos:

Resíduos

Definição

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_0\}$. Definimos o resíduo de $f(\bullet)$ no ponto z_0, denotado $res(f, z_0)$, como coeficiente do termo $\dfrac{1}{z - z_0}$ da série de Laurent de $f(\bullet)$ centrada em z_0.

Teorema 1

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Suponha $\Gamma \subset D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ uma curva suave por partes , orientada no sentido positivo, tal que em seu interior contenha todos os pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ então:

$$\frac{1}{2\pi \imath} \oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res(f, z_k)$$

Teorema 2

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa em $D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Suponha $\Gamma \subset D - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ uma curva suave por partes , orientada no sentido positivo, tal que em seu interior contenha todos os pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e que esses pontos sejam pólos de $f(\bullet)$ e que Γ não contenha nenhum zero de $f(\bullet)$então:

$$\frac{1}{2\pi \imath} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

onde Z é o número de zeros de $f(\bullet)$ no interior de Γ, contado tantas vezes quantas forem sua multiplicidade e P o número de pólos de $f(\bullet)$ no interior de Γ contado tantas vezes quantas forem sua ordem.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos algumas aplicações do cálculo de resíduos (teorema dos resíduos). Em especial no cálculo de algumas integrais definidas.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 12.1. Seja $f(z) = e^z \csc(z)$. Determine todos os pólos de $f(\bullet)$ e calcule o resíduo em cada polo.

Comentário: Verifique que todos os pólos de $f(\bullet)$ são simples e use a fórmula $\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$.

ATIV. 12.2. Determine a integral: $\dfrac{1}{2\pi\imath} \oint_C e^z \csc(z) dz$ onde C é o círculo unitário $|z| = 1$.

Comentário: Aplique o teorema do resíduos e o problema anterior.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.