AULA
13

Aplicações do Teorema dos Resíduos

META:

Apresentar algumas aplicações do cálculo de resíduos.

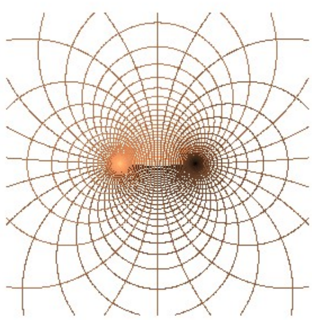
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Aplicar o cálculo de resíduos na determinação de algumas integrais.

PRÉ-REQUISITOS

Aula12 de Variáveis Complexas.



13.1 Introdução

Caros alunos nessa nossa aula veremos "Algumas Aplicações do Teorema dos Resíduos". Mais especificamente, veremos com utilizar o teorema dos resíduos na determinação de alguns tipos de integrais impróprias.

13.2 Algumas Aplicações do Teorema dos Resíduos

Veremos, agora, como aplicar o teorema dos resíduos na determinação de certos tipos de integrais impróprias. Começaremos por integrais da forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{13.187}$$

Sabemos de Cálculo II que se a integral imprópria acima existe pode ser calculada como o limite:

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{+M} f(x)dx \tag{13.188}$$

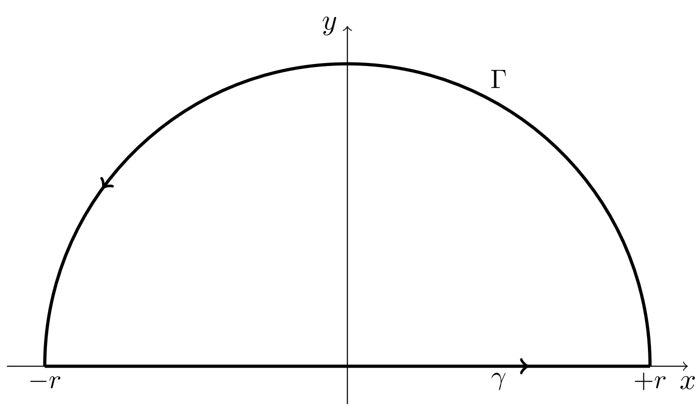


Figura 13.1: Aplicações do Teorema dos Resíduos

Analisaremos o seguinte caso: a nossa função $f(\bullet)$ é holomorfa no semi-plano superior e borda exceto em um número finito de pólos $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ para os quais $Im(z_k) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Para este caso, vamos integrar $f(z)$ ao longo da curva $C = \Gamma \cup \gamma$ onde $\gamma(t) = t$, $t \in [-r, +r]$ e $\Gamma(t) = re^{\boldsymbol{\imath} t}$, $t \in [0, \pi]$ onde r é escolhido grande o suficiente para que todos os pólos $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ estejam contidos no interior de C.

Do teorema de Cauchy temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} res(f, z_k) &= \frac{1}{2\pi\boldsymbol{\imath}} \oint_C f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi\boldsymbol{\imath}} \int_\Gamma f(z)dz + \frac{1}{2\pi\boldsymbol{\imath}} \int_\gamma f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi\boldsymbol{\imath}} \int_0^\pi f(re^{\boldsymbol{\imath} t})\boldsymbol{\imath} re^{\boldsymbol{\imath} t}dt + \frac{1}{2\pi\boldsymbol{\imath}} \int_r^r f(x)dx
\end{aligned} \tag{13.189}$$

se:

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^\pi f(re^{\boldsymbol{\imath} t})\boldsymbol{\imath} re^{\boldsymbol{\imath} t}dt = 0 \tag{13.190}$$

Passando o limite $r \to \infty$ em **eqn 13.189** e usando **eqn 13.190** temos:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi\boldsymbol{\imath} \sum_{k=1}^{n} res(f, z_k) \tag{13.191}$$

Veremos agora uma condição suficiente para **eqn 13.190**.

Se $|f(z)| \leq M/r^k$ onde M e $k > 1$ são constantes então:

$$\lim_{r\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz = \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi f(re^{\boldsymbol{\imath} t})\boldsymbol{\imath} re^{\boldsymbol{\imath} t}dt = 0 \tag{13.192}$$

PROVA: Das propriedades da integração complexa temos:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\Gamma f(z)dz \Big| &\leq \int_\Gamma |f(z)|.|dz| \\
&\leq \frac{M}{r^k}\pi r \\
&\leq \frac{\pi M}{r^{k-1}}
\end{aligned}$$

Visto que o comprimento do arco Γ é πr. Daí, como $k > 1$, passando o limite $r \to \infty$ temos:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| &\leq \lim_{r\to\infty}\frac{\pi M}{r^{k-1}}\\ &= 0\end{aligned}$$

e portanto:

$$\lim_{r\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0. \square$$

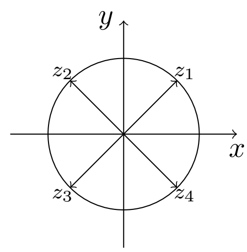


Figura 13.2: Aplicações do Teorema dos Resíduos

Vejamos um exemplo:

Exemplo 13.1. Determine a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^4+a^4}dz$, onde $a > 0$.

SOLUÇÃO: Para a função do exemplo $f(z) = \dfrac{1}{z^4+a^4}$ os pólos (ver **figura 13.2**) são:

$$\begin{aligned}z_1 &= a\cos(\pi/4) + a\sin(\pi/4)\imath = ae^{\pi\imath/4}\\ z_2 &= a\cos(3\pi/4) + a\sin(3\pi/4)\imath = ae^{3\pi\imath/4}\\ z_3 &= a\cos(5\pi/4) + a\sin(5\pi/4)\imath = ae^{5\pi\imath/4}\\ z_4 &= a\cos(7\pi/4) + a\sin(7\pi/4)\imath = ae^{7\pi\imath/4}\end{aligned}$$

Logo apenas os pólos z_1 e z_2 estão no interior de C (ver **figura 13.1** e **figura 13.2**). Levando em conta que todos os pólos de $f(z) = \dfrac{1}{z^4+a^4}$ são pólos simples podemos calcular os resíduos em z_1 e z_2 usando á regra de L'Hopital da seguinte forma: Resíduo em z_1:

$$\begin{aligned} res(f,z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \\ &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{z^4-a^4} \\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^4-a^4} \\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} \\ &= \frac{1}{4a^3e^{3\pi\imath/4}} \end{aligned} \tag{13.193}$$

Resíduo em z_2:

$$\begin{aligned} res(f,z_2) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) \\ &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^4-a^4} \\ &= \lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^4-a^4} \\ &= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^3} \\ &= \frac{1}{4a^3e^{9\pi\imath/4}} \end{aligned} \tag{13.194}$$

De **eqn 13.193** e **eqn 13.194** temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} res(f,z_k) &= \frac{1}{4a^3e^{3\pi\imath/4}} + \frac{1}{4a^3e^{9\pi\imath/4}} \\ &= \frac{1}{4a^3}(e^{-3\pi\imath/4} + e^{-9\pi\imath/4}) \\ &= \frac{1}{4a^3}(\cos(-3\pi/4) + \sin(-3\pi/4)\imath \\ &+ \cos(-9\pi/4) + \sin(-9\pi/4)\imath) \end{aligned} \tag{13.195}$$

Levando em conta que $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(3\pi/4) = -\cos(9\pi/4)$ e $\sin(3\pi/4) = \cos(9\pi/4)$ de **eqn 13.194** temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} res(f,z_k) &= \frac{1}{4a^3}(-2\sin(3\pi/4)\imath) \\ &= -\frac{\sqrt{2}\imath}{4a^3} \end{aligned} \tag{13.196}$$

Portanto de **eqn 13.191** e **eqn 13.196** temos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx &= 2\pi\imath\sum_{k=1}^{2} res(f,z_k)\\ &= -2\pi\imath\frac{\sqrt{2}\imath}{4a^3}\\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2a^3}.\ \square\end{aligned} \tag{13.197}$$

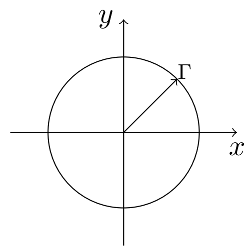


Figura 13.3: Aplicações do Teorema dos Resíduos

Analisaremos agora um outro caso especial: integrais da forma $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta),\sin(\theta))d\theta$. Para este caso usaremos o contorno da **figura 13.3** e fazemos a seguinte mudança de variável: $z = e^{\theta\imath}$. Logo: $dz = \imath e^{\theta\imath}d\theta$, $d\theta = \dfrac{1}{z\imath}dz$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{\theta\imath}+e^{-\theta\imath}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ e $\sin(\theta) = \dfrac{e^{\theta\imath}-e^{-\theta\imath}}{2\imath} = \dfrac{z-z^{-1}}{2\imath}$. Vejamos um exemplo:

Exemplo 13.2. Calculo a integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos(\theta)}d\theta$ onde: $a > |b|$.

SOLUÇÃO: Usando as transformações acima temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos(\theta)}d\theta\\ &= \oint_C \frac{1}{a+b\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{z\imath}dz\\ &= \oint_C \frac{-2\imath}{bz^2+2az+b}dz\end{aligned} \tag{13.198}$$

Os pólos da função $f(z) = \dfrac{-2\imath}{bz^2 + 2az + b}$ são obtidos resolvendo $bz^2 + 2az + b = 0$. Os dois pólos simples são:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-2a + \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b} \\
&= \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \\
z_2 &= \frac{-2a - \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b} \\
&= \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}
\end{aligned}$$

Apenas z_1 pertence a região limitada por Γ pois,

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \left|\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2} + a} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b}\right| \\
&= \left|\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2} + a}\right| \\
&< 1
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \left|\frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right| \\
&= \left|\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right| \\
&> 1
\end{aligned}$$

O que garante z_2 fora da região limitada por Γ. Para o resíduo de $f(\bullet)$ em z_1 temos:

$$\begin{aligned}
res(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{-2\imath(z - z_1)}{bz^2 + 2az + b} \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{-2\imath}{2bz + 2a} \\
&= \frac{-\imath}{\sqrt{a^2 - b^2}}
\end{aligned} \tag{13.199}$$

Usando o teorema dos resíduos em $f(z) = \dfrac{-2\imath}{bz^2 + 2az + b}$ e na curva fechada suave Γ e usando **eqn 13.198** e **eqn 13.199** temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)} d\theta = \oint_\Gamma \frac{-2\imath}{bz^2 + 2az + b} dz \\ &= 2\pi\imath res(f, z_1) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \ \square \end{aligned}$$

13.3 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que é possível aplicar o teorema dos resíduos na determinação de alguns tipos de integrais impróprias.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 13 constam os seguintes tópicos:

Algumas Aplicações do Teorema dos resíduos

Primeira Aplicação

Função $f(\bullet)$ é holomorfa no semi-plano superior e borda exceto em um número finito de pólos $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ para os quais $Im(z_k) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Para este caso, integrar $f(z)$ ao longo da curva $C = \Gamma \cup \gamma$ onde $\gamma(t) = t$, $t \in [-r, +r]$ e $\Gamma(t) = re^{\imath t}$, $t \in [0, \pi]$ onde r é escolhido grande o suficiente para que todos os pólos $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ estejam contidos no interior de C (**figura 13.1**).

Se $|f(z)| \leq M/r^k$ onde M e $k > 1$ são constantes então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} res(f, z_k) \qquad (13.200)$$

Segunda Aplicação

Integrais da forma $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$. Para este caso usaremos o contorno da **figura 13.3** e fazemos a seguinte mudança de variável: $z = e^{\theta\imath}$. Logo: $dz = \imath e^{\theta\imath}d\theta$, $d\theta = \dfrac{1}{z\imath}dz$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{\theta\imath} + e^{-\theta\imath}}{2} = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ e $\sin(\theta) = \dfrac{e^{\theta\imath} - e^{-\theta\imath}}{2\imath} = \dfrac{z - z^{-1}}{2\imath}$. E temos:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta = \oint_C f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\imath}\right)\frac{1}{z\imath}dz$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos transformações conforme (transformações que preservam o ângulo entre vetores). Em particular veremos que funções holomorfas são transformações conformes.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 13.1. Determine a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^6 + a^6}dz$, onde $a > 0$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o primeiro exemplo acima, ele lhe servirá de guia.

ATIV. 13.2. Calculo a integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin(\theta)}d\theta$ onde: $a > |b|$.

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o segundo exemplo acima, ele lhe servirá de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.