AULA

Transformações Conformes 14

META:

Introduzir o conceito de transformações conforme.

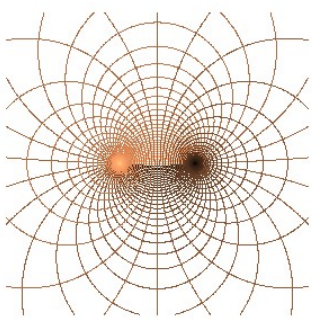
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Definir transformações conformes e exemplificar transformações conformes.

PRÉ-REQUISITOS

Aula03 de Variáveis Complexas.



14.1 Introdução

Caros alunos estamos quase no final de nosso curso de "Variáveis Complexas". Nosso assunto de agora é "Transformações Conformes". Aqui estabeleceremos os aspectos básicos de transformações conformes como ponto de partida para a próxima aula onde faremos algumas aplicações das transformações conformes.

14.2 Transformações Conformes

Vamos iniciar com a definição do conceito de transformações conformes:

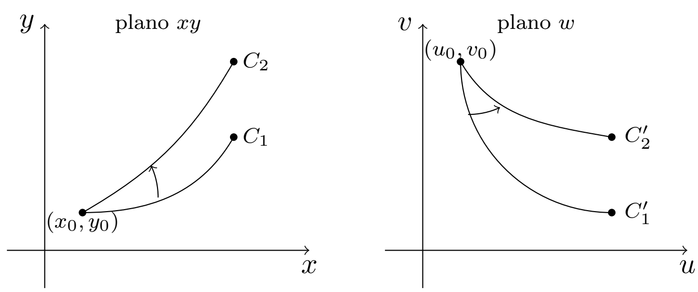


Figura 14.1: Transformações Conformes

Definição 14.1. Seja $\Psi : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma transformação de um aberto D de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que Ψ leva o ponto (x_0, y_0) do plano xy no ponto (u_0, v_0) do plano uv. Se dada duas curvas C_1 e C_2 do plano xy que se interceptam em z_0 são levadas na curvas C_1' e C_2' que se interceptam em (u_0, v_0) (ver **figura 14.1**) então se Ψ é tal que o ângulo entre as curvas C_1 e C_2 em (x_0, y_0) é igual ao ângulo entre C_1' e C_2' em módulo e sentido, dizemos que Ψ é uma transformação conforme em (x_0, y_0).

Vamos examinar a mudança de direção de curvas no plano complexo z, passando pelo ponto z_0 sob a transformação $w = f(z)$ quando a função em questão é holomorfa em z_0 e além disso $f'(z_0) \neq 0$. Para isso enunciamos e provamos o seguinte teorema:

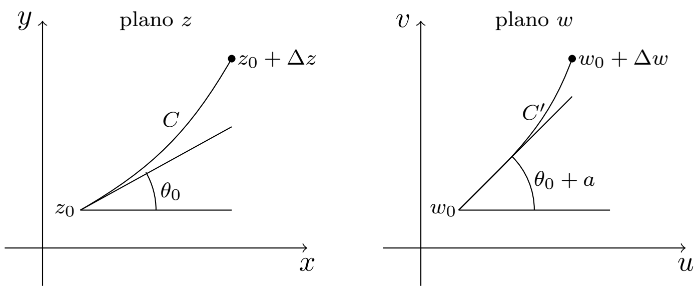


Figura 14.2: Transformações Conformes

Teorema 14.1. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$ uma transformação holomorfa em $z_0 \in D$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ então a tangente a qualquer curva C passando por z_0 é girada de um ângulo igual a $arg(f'(z_0))$.*

PROVA: Quando um ponto se move de z_0 a $z_0 + \Delta z$ ao longo da curva C no plano z (ver **figura 14.2**) sua imagem através de $f(z)$ move-se ao longo de C', no plano w, de w_0 até $w_0 + \Delta w$. Se parametrizarmos a curva C usando o parâmetro t então o caminho $z(t)$ ($x = x(t)$ e $y = y(t)$) em C corresponde ao caminho $w(t)$ ($u = u(t)$ e $v = v(t)$) em C' tal que: $z_0 = z(t_0)$ e $w_0 = w(t_0) = f(z(t_0))$. As derivadas $\dfrac{dz}{dt}$ e $\dfrac{dw}{dt}$ representam os vetores tangente nos pontos correspondentes de C e C'. Daí, então, da regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{dw}{dz}.\frac{dz}{dt} \\ &= f'(z).\frac{dz}{dt} \end{aligned} \qquad (14.201)$$

Em particular fazendo $t = t_0$ em **eqn 14.201** temos:

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=t_0} = f'(z(t_0)).\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Que é equivalente a:

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = f'(z_0).\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} \tag{14.202}$$

Levando em conta que $f(z)$ é holomorfa em z_0. Escrevendo $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{w} = w_0 = f_0 e^{\imath\phi_0}$, $f'(z_0) = R_0 e^{\imath\alpha}$ e $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} = r_0 e^{\imath\theta_0}$ e substituindo em **eqn 14.202** temos:

$$\begin{aligned} f_0 e^{\imath\phi_0} &= R_0 e^{\imath\alpha}.r_0 e^{\imath\theta_0} \\ &= R_0.r_0 e^{\imath(\alpha+\theta_0)} \end{aligned} \tag{14.203}$$

Finalmente, de **eqn 14.203** temos:

$$\phi_0 = \theta_0 + \alpha = \theta_0 + arg(f'(z_0)). \ \square$$

OBS 14.1. Notem que nos pontos críticos (pontos para os quais $f'(z_0) = 0$) α é indeterminado.

Teorema 14.2. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$ uma transformação holomorfa em $z_0 \in D$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ então, o ângulo entre duas curvas C_1 e C_2 passando por z_0 é preservado pela transformação $w = f(z)$ em módulo e direção.*

PROVA: Pelo **teorema 14.2** cada curva gira do ângulo $arg(f'(z_0))$ assim, o ângulo entre as curvas não se altera pela transformação $w = f(z)$ tanto em módulo quanto em sentido. $\square$

OBS 14.2. Em outras palavras o teorema acima diz que uma aplicação holomorfa é uma transformação conforme.

Para concluir, vamos enunciar, sem demonstrar um importante teorema sobre transformações conformes. A saber:

Teorema 14.3. *Seja C uma curva simples fechada, contorno de uma região simplesmente conexa então existe uma transformação biunívoca $w = f(z)$ holomorfa em C e seu interior, que mapeia C na borda do disco unitário no plano w e o interior de C no interior do disco unitário.*

OBS 14.3. A demonstração deste teorema de enunciado simples é bastante técnica e foge ao escopo deste texto. Porém, se os caros alunos quiserem aprofundar o assunto tem uma demonstração em TIMONEY na leitura complementar.

14.3 Exemplos de Algumas Transformações Conformes

Veremos nesta seção alguns exemplos de algumas transformações conformes.

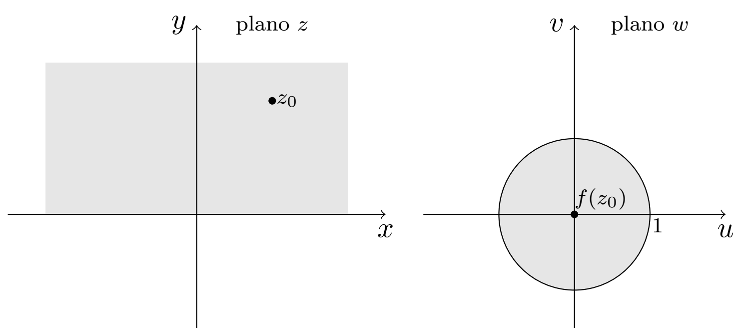


Figura 14.3: Transformações Conformes

Exemplo 14.1. Como primeiro exemplo, vamos mostrar que a transformação $w = f(z)$ onde $f(z) = e^{\theta_0 \imath} \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, z_0 é um ponto do semiplano superior e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ transforma o semiplano superior no plano z no disco unitário no plano w (ver **figura 14.3**).

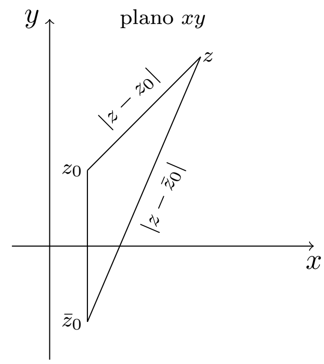


Figura 14.4: Transformações Conformes

SOLUÇÃO: Da **figura 14.4** se z pertence ao semiplano superior temos $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$ ocorrendo a igualdade se z pertence ao eixo real. Daí, temos:

$$\begin{aligned} |w| &= \left| e^{\theta_0 \imath} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \\ &= |e^{\theta_0 \imath}|.\frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

pois, $|e^{\theta_0 \imath}| = 1$ e $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$. $\square$

OBS 14.4. Observamos também que $f(z_0) = 0$ e que o eixo real é mapeado na borda do disco unitário.

14.3.1 Transformações de Möbius

Veremos agora um tipo especial de transformação conforme denominada de transformação de Möbius.

Definição 14.2. Uma transformação fracionária

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{14.204}$$

tal que $ad - bc \neq 0$ é dita uma transformação de Möbius.

Uma das propriedades das transformações fracionárias, em particular as transformações de Möbius, é que a composição de duas transformações fracionária é uma transformação fracionária. sejam $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e $g(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. Daí, temos:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(z) = f(g(z)) &= \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + d} \\ &= \frac{\dfrac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{\gamma z + \delta}}{\dfrac{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta}{c\beta + d\delta}} \\ &= \frac{(a\alpha + b\beta)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}\end{aligned}$$

Tirando **eqn 14.204** da forma de fração temos:

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \qquad (14.205)$$

que é linear em z linear em w e bilinear em z e w.

Por outro lado podemos inverter **eqn 14.204** e temos:

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Se $c = 0$ deixa de ser uma transformação fracionária e passa a ser uma transformação linear.

Caso $c \neq 0$ podemos reescrever **eqn 14.204** na forma:

$$w = f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}$$

e portanto a condição $ad - bc \neq 0$ garante que **eqn 14.204** não é a transformação constante.

14.3.2 Pontos fixos de uma Aplicação

Imaginemos sobrepor o plano w no plano z de modo que os eixos coordenados coincidam. Desta forma teremos essencialmente um único plano. E, podemos encarar uma transformação $w = f(z)$ como uma aplicação que leva pontos do plano em outros pontos do plano. Assim faz sentido a seguinte definição:

Definição 14.3. Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma transformação. Dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é um ponto fixo de $f(\bullet)$ se, somente se $z = f(z)$.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 14.2. Determine os pontos fixos da seguinte transformação fracionária: $f(z) = \dfrac{2z-5}{z+4}$.

SOLUÇÃO: Da definição de ponto fixo temos:

$$z = f(z) = \frac{2z-5}{z+4}$$

Daí, desfazendo a fração temos:

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2+\sqrt{2^2-4.1.5}}{2} \\ &= \frac{-2+\sqrt{-16}}{2} \\ &= -1+2\imath \\ z_2 &= \frac{-2-\sqrt{2^2-4.1.5}}{2} \\ &= \frac{-2-\sqrt{-16}}{2} \\ &= -1-2\imath. \ \square \end{aligned}$$

Ficaremos por aqui.

14.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que funções holomorfas são transformações conformes i.e. transformações que preservam o ângulo entre vetores.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 14 constam os seguintes tópicos:

Transformações Conformes

Definição:

Seja $\Psi : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma transformação de um aberto D de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que Ψ leva o ponto (x_0, y_0) do plano xy no ponto (u_0, v_0) do plano uv. Se dada duas curvas C_1 e C_2 do plano xy que se interceptam em z_0 são levadas na curvas C'_1 e C'_2 que se interceptam em (u_0, v_0) (ver **figura 14.1**) então se Ψ é tal que o ângulo entre as curvas C_1 e C_2 em (x_0, y_0) é igual ao ângulo entre C'_1 e C'_2 em módulo e sentido, dizemos que Ψ é uma transformação conforme em (x_0, y_0).

Teorema 1:

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$ uma transformação holomorfa em $z_0 \in D$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ então a tangente a qualquer curva C passando por z_0 é girada de um ângulo igual a $arg(f'(z_0))$.

Teorema 2:

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$ uma transformação holomorfa em $z_0 \in D$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ então, o ângulo entre duas curvas C_1 e C_2 passando por z_0 é preservado pela transformação $w = f(z)$ em módulo e direção.

Definição:

Uma transformação fracionária

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tal que $ad - bc \neq 0$ é dita uma transformação de Möbius.

Definição:

Seja $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ uma transformação. Dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é um ponto fixo de $f(\bullet)$ se, somente se $z = f(z)$.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos algumas aplicações das transformações conformes. Em particular veremos aplicações ao escoamento potencial de fluidos.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 14.1. que a transformação $w = f(z)$ onde $f(z) = e^{\theta_0 \imath} \dfrac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}$, z_0 é um ponto do semiplano superior e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ transforma o semiplano superior no plano z no exterior do disco unitário no plano w .

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção os exemplos acima, eles lhes servirão de guia.

ATIV. 14.2. Seja $f(z) = \dfrac{z+a}{z+b}$ uma transformação fracionária. Qual a relação entre a e b garante que a transformação tem apenas um ponto fixo?

Comentário: Volte ao texto e reveja com calma e atenção o exemplo de ponto fixo, ele lhe servirá de guia.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.

TIMONEY, Richard M. Riemann Mapping Theorem. http://www.maths.tcd.ie/ richardt/414/414-ch7.pdf. Acessado em 01/06/2011.