AULA

15

Transformações Conformes: Aplicações

META:

Aplicar transformações conformes.

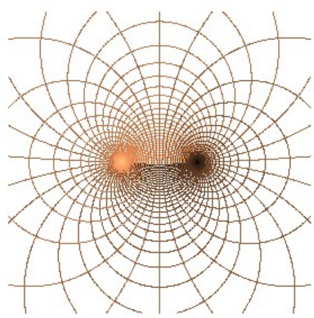
OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Aplicar transformações conformes na determinação da distribuição de velocidade em alguns escoamentos estacionários laminares planos.

PRÉ-REQUISITOS

Aula14 de Variáveis Complexas.



15.1 Introdução

Caros alunos concluímos aqui nosso curso de "Variáveis Complexa" com "Algumas Aplicações das Transformações Conformes". Em particular faremos aplicações ao escoamento laminar, não viscoso e potencial de fluidos.

15.2 Problemas de Dirichlet e de Neumann

Vários problemas da Física e da Engenharia são modelados matematicamente por equações diferenciais parciais às quais são associadas condições adicionais denominadas condições de contorno. Denominamos "Problema de Valor de Contorno" ao problema de determinar uma solução que satisfaça ao mesmo tempo as equações diferenciais e as condições de contorno. Estaremos interessados basicamente na solução de problemas cuja modelagem recaiam em equações de Laplace bi-dimensional i.e. Problemas onde desejamos determinar uma função $u(x, u)$ que satisfaça a equação de Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

no interior de uma região $\mathcal{B}$ sujeita a certas condições na fronteira $\partial\mathcal{B}$. Os problemas de Dirichlet e de Neumann podem ser resolvidos em uma região $\mathcal{B}$ simplesmente conexa que, através de aplicações conformes, possam ser transformadas na região limitada pelo semi-plano superior ou o círculo unitário. Neste caso é muito útil o teorema da transformação de Riemmann enunciado sem demonstração na aula anterior. As idéias por trás da solução de tais problemas são:

i) Usar uma aplicação conforme que leve a região $\mathcal{B}$ no semi-plano superior ou o círculo unitário.

ii) Resolver o problema no semi-plano superior ou no círculo unitário. Uma vez resolvidos a tarefa principal recai em determinar a transformação conforme adequada citada no ítem anterior.

iii) Usar a solução obtida (semi-plano ou círculo unitário) para resolver o problema original na região $\mathcal{B}$ usando a inversa da aplicação conforme.

O processo descrito baseia-se nos seguintes teoremas:

Teorema 15.1. *Seja $\mathcal{B}$ uma região simplesmente conexa e $f : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathcal{B}$ então existe uma única função $f^{-1} : Img(f) \mapsto \mathcal{B}$.*

OBS 15.1. Este teorema assegura que tanto $f(\bullet)$ quanto $f^{-1}(\bullet)$ são aplicações conformes. Sua demonstração não será feita aqui. Os interessados poderão busca-la em outras referências ou adaptar o teorema da função inversa no caso especial de $\mathbb{R}^2$, para o plano complexo.

Teorema 15.2. *Sejam $\mathcal{B}_z$ e $\mathcal{B}_w$ abertos simplesmente conexos dos plano z e plano w respectivamente e $f : \mathcal{B}_z \mapsto \mathcal{B}_w$ uma aplicação conforme tal que $f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathcal{B}_z$ então se Φ é harmônica em $\mathcal{B}_w$, $\Phi \circ f$ é harmônica em $\mathcal{B}_z$.*

A demonstração deste teorema segue imediatamente do seguinte teorema:

Teorema 15.3. *Sejam $w = u + v\imath = f(z) = f(x + y\imath)$ analítica onde $f'(z) \neq 0$ então:*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right)$$

PROVA: Podemos escrever $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ desta forma $\Phi(x, y) = \Phi(x(u, v), y(u, v))$. Usando a regra da cadeia temos:

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

Para a segunda derivada, usando a regra da cadeia a derivada de um produto, temos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&+ \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&+ \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, calculando $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&+ \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Somando $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ com $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\\ &+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Como $w = u + v\imath = f(z)$ é analítica temos que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Daí, temos:
$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{v}\partial y\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. O que elimina a última parte da equação acima e temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Por outro lado, u e v são também são harmônicas logo:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, o que elimina os dois primeiros termos da equação e temos:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ temos:
$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{v}\partial y\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. O que elimina a última

parte da equação acima e temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2$$

E a equação acima toma a forma:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)\quad\square$$

Teorema 15.4. *Sejam $\mathcal{B}_z$ e $\mathcal{B}_w$ abertos simplesmente conexos dos plano z e plano w respectivamente e $f:\mathcal{B}_z\mapsto\mathcal{B}_w$ uma aplicação conforme tal que f mapeia $\partial\mathcal{B}_z$ em $\partial\mathcal{B}_w$ então se Φ satisfaz:*

$$\Phi(u,v)=c,\ \forall(u,v)\in\mathcal{B}_w\ \ \textit{ou}\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}(u,v)=0,\ \forall(u,v)\in\partial\mathcal{B}_w$$

$\Phi\circ f$ satisfaz:

$$(\Phi\circ f)(x,y)=c,\ \forall(x,y)\in\mathcal{B}_z\ \ \textit{ou}\ \ \frac{\partial(\Phi\circ f)}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in\partial\mathcal{B}_z$$

15.2.1 Problemas de Dirichlet

Vejamos a definição:

Definição 15.1. O problema de Dirichlet consiste em determinar uma função $\Phi(x,y)$ contínua com derivadas parciais contínuas que satisfaçam:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0 & ,(x,y)\in\mathcal{B}\\ \Phi(x,y)=c & ,(x,y)\in\partial\mathcal{B}\end{cases}\tag{15.206}$$

onde $c\in\mathbb{R}$.

15.2.2 Problemas de Neumann

Vejamos a definição:

Definição 15.2. O problema de Neumann consiste em determinar uma função $\Phi(x, y)$ contínua com derivadas parciais contínuas que satisfaçam:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 & , (x, y) \in \mathcal{B} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(x, y) = 0 & , (x, y) \in \partial \mathcal{B} \end{cases} \tag{15.207}$$

onde $\vec{n}$ é a normal unitária a $\partial\mathcal{B}$ orientada para fora de $\mathcal{B}$ e $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}$ a derivada direcional de Φ na direção da normal.

15.2.3 Aplicações ao Escoamento de Fluidos

Muitos problemas de hidráulica, dinâmica dos fluidos ou aerodinâmica dos fluidos podem ser resolvidos por métodos de variáveis complexas, em especial com aplicações conformes, como veremos nesta subseção. Para este fim são necessárias algumas considerações que simplificaram tremendamente a nossa tarefa. As hipóteses básicas são as seguintes:

i) O escoamento é bi-dimensional. As características básicas do escoamento de fluidos são as mesmas independente do plano en consideração. Isso permite aplicação dos teoremas na solução de problemas de escoamento en redor de objetos.

ii) Escoamento estacionário. A velocidade do fluido depende apenas das coordenadas espaciais (x, y) e não do tempo.

iii) Fluido não viscoso. O fluido não tem viscosidade, escoa sem atrito.

iv) Escoamento potencial. A velocidade do fluido deriva de um campo potencial i.e. se v_x e v_y são as componentes da velocidade na direção x e na direção y respectivamente, existe uma função $\Phi(x,y)$ tal que:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v_y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases} \tag{15.208}$$

v) Fluido incompressível. Equivale a dizer que a densidade do fluido é constante e o campo de velocidade satisfaz:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{15.209}$$

OBS 15.2. Substituindo **eqn 15.208** e **eqn 15.209** temos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \tag{15.210}$$

logo o potencial de velocidade Φ é uma função harmônica. Se Ψ é a harmônica conjugada de Φ definimos o potencial complexo Ω por: $\Omega(z) = \Phi(x,y) + \Psi(x,y)\imath$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} \Omega'(z) &= \frac{d\Omega}{dz} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\imath \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\imath \\ &= v_x - v_y\imath \end{aligned} \tag{15.211}$$

OBS 15.3. As famílias de curvas a um parâmetro:

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = \alpha \\ \Psi(x,y) = \beta \end{cases} \tag{15.212}$$

onde α e β são constante são denominadas curvas eqüipotenciais e curvas de fluxo respectivamente. Em escoamentos estacionários curvas de fluxo representam trajetória reais das partículas do fluido.

15.2.4 Escoamento em Torno de Obstáculos

Um problema importante em dinâmica dos fluidos é determinar como um fluido, inicialmente escoando com velocidade constante v_0, é perturbado pela introdução de obstáculos. A intenção é obter um potencial complexo da forma:

$$\Omega(z) = v_0 z + G(z) \tag{15.213}$$

tal que $\lim_{|z|\to\infty} G(z) = 0$ garantindo que longe do obstáculo a velocidade tem módulo constante.

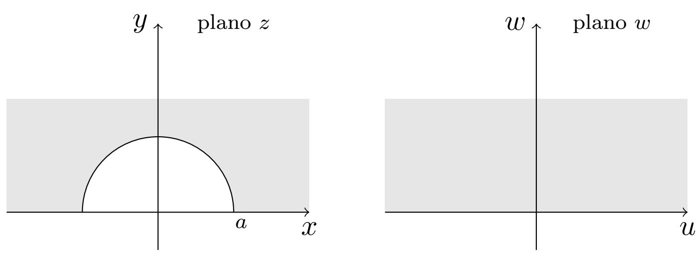


Figura 15.1: Transformação $f(z) = z + \dfrac{a^2}{z}$

Exemplo 15.1. Estudar o potencial complexo de escoamento $\Omega(z) = v_0\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)$.

SOLUÇÃO: Pela **figura 15.1** a transformação conforme $f(z) = z + \dfrac{a^2}{z}$ leva o exterior do semi-círculo de raio a centrado em $z_0 = 0$ do semiplano superior do plano z no semiplano superior do plano w. Portanto podemos usa-la para descrever o escoamento de um fluido incompressível, não viscoso, estacionário em torno do semi-círculo. Daí, fazendo $z = re^{\theta\imath}$ podemos reescrever o potencial complexo na forma:

$$
\begin{aligned}
\Omega(z) &= \Phi + \Psi\imath \\
&= v_0\left(re^{\theta\imath} + \frac{a^2}{re^{\theta\imath}}\right) \\
&= v_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos(\theta) + v_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin(\theta)\imath
\end{aligned} \tag{15.214}
$$

De **eqn 15.214** temos:

$$
\begin{cases}
\Phi(r,\theta) = v_0\left(r + \dfrac{a^2}{r}\right)\cos(\theta) \\
\Psi(r,\theta) = v_0\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right)\sin(\theta)
\end{cases} \tag{15.215}
$$

Então as curvas $\Psi(r,\theta) = \beta$ (ver **figura 15.2**) representam as linhas de corrente i.e. as trajetórias reais das partículas do fluido.

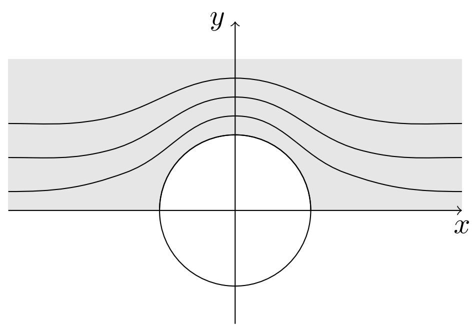


Figura 15.2: Linhas de corrente

Por outro lado, derivando o potencial complexo Ω para obter a velocidade complexa temos:

$$
\begin{aligned}
V &= \Omega'(z) \\
&= v_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \\
&= v_0\left(1 - \frac{a^2}{re^{\theta\imath}}\right) \\
&= v_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos(\theta)\right) - \frac{v_0 a^2}{2}\sin(\theta)\imath
\end{aligned} \tag{15.216}
$$

distante do semi-círculo, $\lim_{r\to\infty} V = v_0$ i.e. o fluido está escoando na direção do semi-eixo real positivo com velocidade constante v_0.

$\square$

15.3 Conclusão

Na aula de hoje, vimos que é possível usar aplicações conformes para resolver alguns tipos de problemas de escoamento de fluidos.

RESUMO

No nosso resumo da Aula 15 constam os seguintes tópicos:

Problemas de Dirichlet e de Neumann

A solução de problemas de Dirichlet e de Neumann baseia-se nos seguintes teoremas:

Teorema 1:

Seja $\mathcal{B}$ uma região simplesmente conexa e $f : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathcal{B}$ então existe uma única função $f^{-1} : Img(f) \mapsto \mathcal{B}$.

Teorema 2:

Sejam $\mathcal{B}_z$ e $\mathcal{B}_w$ abertos simplesmente conexos dos plano z e plano w respectivamente e $f : \mathcal{B}_z \mapsto \mathcal{B}_w$ uma aplicação conforme tal que $f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathcal{B}_z$ então se Φ é harmônica em $\mathcal{B}_w$, $\Phi \circ f$ é harmônica em $\mathcal{B}_z$.

Teorema 3:

Sejam $\mathcal{B}_z$ e $\mathcal{B}_w$ abertos simplesmente conexos dos plano z e plano w respectivamente e $f : \mathcal{B}_z \mapsto \mathcal{B}_w$ uma aplicação conforme tal que

f mapeia $\partial\mathcal{B}_z$ em $\partial\mathcal{B}_w$ então se Φ satisfaz:

$$\Phi(u,v) = c,\ \forall(u,v) \in \mathcal{B}_w \ \ ou \ \ \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}(u,v) = 0,\ \forall(u,v) \in \partial\mathcal{B}_w$$

$\Phi \circ f$ satisfaz:

$$(\Phi\circ f)(x,y) = c,\ \forall(x,y) \in \mathcal{B}_z \ \ ou \ \ \frac{\partial(\Phi\circ f)}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}(x,y) = 0,\ \forall(x,y) \in \partial\mathcal{B}_z$$

Definição: Problema de Dirichlet

O problema de Dirichlet consiste em determinar uma função $\Phi(x,y)$ contínua com derivadas parciais contínuas que satisfaçam:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 & ,(x,y) \in \mathcal{B} \\ \Phi(x,y) = c & ,(x,y) \in \partial\mathcal{B} \end{cases} \tag{15.217}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Definição: Problema de Neumann

O problema de Neumann consiste em determinar uma função $\Phi(x,y)$ contínua com derivadas parciais contínuas que satisfaçam:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 & ,(x,y) \in \mathcal{B} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}(x,y) = 0 & ,(x,y) \in \partial\mathcal{B} \end{cases} \tag{15.218}$$

onde $\vec{\boldsymbol{n}}$ é a normal unitária a $\partial\mathcal{B}$ orientada para fora de $\mathcal{B}$ e $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\vec{\boldsymbol{n}}}$ a derivada direcional de Φ na direção da normal.

PRÓXIMA AULA

Caros alunos esta é nossa última aula portanto, não haverá próxima aula pois, esta é a última aula do nosso curso de "Variáveis Complexa". Espero que este curso tenha dado bons frutos.

Ele é apenas um introdução ao maravilhoso mundo das "Variáveis Complexas". A Leitura complementar fornece material adicional para quem desejar mais informações.

ATIVIDADES

Deixamos como atividades as seguintes questões:

ATIV. 15.1. Considere o potencial complexo de escoamento $\Omega(z) = v_0\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)$ e determine os pontos de estagnação do fluido.

Comentário: Lembre-se que os pontos de estagnação em um escoamento são pontos onde a velocidade complexa é nula.

ATIV. 15.2. Considere o potencial complexo de escoamento $\Omega(z) = v_0\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)$ e mostre que as curvas $ae^{\imath t}$, $t \in [0, \pi]$, t, $t \in (-\infty, -a]$ e t, $t \in [a, \infty)$ são linhas de corrente.

Comentário: Volte ao exemplo e estude a equação das linhas de corrente.

LEITURA COMPLEMENTAR

SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

SOARES, Márcio G., Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, Editora SBM, 2009.

BROWN, James W. and CHURCHILL, Ruel R., Complex Variables and Applications Editora McGraw Hill, 2008.

FERNANDEZ, Cecília S. e BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Editora SBM, 2006.