

# **Vetores e Geometria Analítica**

**Gastão Florêncio Miranda Junior**



**São Cristóvão/SE  
2007**

# Vetores e Geometria Analítica

**Elaboração de Conteúdo**  
Gastão Florêncio Miranda Junior

---

**Capa**  
Hermeson Alves de Menezes

**Revisão**  
Fabiola Oliveira Criscuolo Melo

Reimpressão

---

Copyright © 2007, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.  
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

M672v Miranda Junior, Gastão Florêncio.  
Vetores e Geometria Analítica / Gastão Florêncio Miranda Junior. -- São Cristóvão : Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2007.

1. Matemática. 2. Vetores. 3. Geometria analítica. I. Título.

CDU 514

**Presidente da República**

Luiz Inácio Lula da Silva

**Chefe de Gabinete**

Ednalva Freire Caetano

**Ministro da Educação**

Fernando Haddad

**Coordenador Geral da UAB/UFS****Diretor do CESAD**

Antônio Ponciano Bezerra

**Secretário de Educação a Distância**

Carlos Eduardo Bielschowsky

**Vice-coordenador da UAB/UFS****Vice-diretor do CESAD**

Fábio Alves dos Santos

**Reitor**

Josué Modesto dos Passos Subrinho

**Vice-Reitor**

Angelo Roberto Antonioli

---

**Diretoria Pedagógica**

Clotildes Farias (Diretora)

Hérica dos Santos Mota

Iara Macedo Reis

Daniela Souza Santos

Janaina de Oliveira Freitas

**Núcleo de Avaliação**

Guilhermina Ramos (Coordenadora)

Carlos Alberto Vasconcelos

Elizabete Santos

Marialves Silva de Souza

**Diretoria Administrativa e Financeira**

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)

Sylvia Helena de Almeida Soares

Valter Siqueira Alves

**Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais**

Giselda Barros

**Núcleo de Tecnologia da Informação**

João Eduardo Batista de Deus Anselmo

Marcel da Conceição Souza

**Coordenação de Cursos**

Djalma Andrade (Coordenadora)

**Assessoria de Comunicação**

Guilherme Borba Gouy

**Núcleo de Formação Continuada**

Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

---

**Coordenadores de Curso**

Denis Menezes (Letras Portugues)

Eduardo Farias (Administração)

Haroldo Dorea (Química)

Hassan Sherafat (Matemática)

Hélio Mario Araújo (Geografia)

Lourival Santana (História)

Marcelo Macedo (Física)

Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

**Coordenadores de Tutoria**

Edvan dos Santos Sousa (Física)

Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)

Janaina Couvo T. M. de Aguiar (Administração)

Priscilla da Silva Góes (História)

Rafael de Jesus Santana (Química)

Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)

Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)

Vanessa Santos Góes (Letras Portugues)

---

**NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO**

Hermeson Menezes (Coordenador)

Edvar Freire Caetano

Isabela Pinheiro Ewerton

Lucas Barros Oliveira

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

Tadeu Santana Tartum

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474



# Sumário

<b>Aula 1: Vetores Geométricos</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	14
1.2 Transitando pelas definições . . . . .	15
1.3 Medida de um segmento . . . . .	16
1.4 Segmentos equípolentes . . . . .	17
1.4.1 Propriedades da equípolência . . . . .	18
1.5 Vetores . . . . .	18
1.5.1 Mais algumas definições . . . . .	19
1.6 Operações com vetores . . . . .	21
1.6.1 Adição . . . . .	21
1.6.2 Propriedades da adição . . . . .	21
1.6.3 Diferença de vetores . . . . .	22
1.6.4 Multiplicação por um número real . . . . .	22
1.6.5 Propriedades da multiplicação por um número real . . . . .	24
1.7 Ângulos de dois vetores . . . . .	25
1.8 Resumo . . . . .	26
1.9 Atividades . . . . .	27
1.10 Comentário das atividades . . . . .	28
1.11 Referências . . . . .	29

<b>Aula 2: Os Espaços Vetoriais</b>	<b>31</b>
2.1 Introdução . . . . .	32
2.2 Decomposição de um vetor no Plano ( $\mathbb{R}^2$ ) . . . . .	32
2.3 Igualdade e Operações . . . . .	35
2.3.1 Igualdade . . . . .	35
2.3.2 Operações . . . . .	35
2.4 Decomposição do Espaço ( $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	40
2.4.1 Igualdade e Operações . . . . .	43
2.5 Resumo . . . . .	46
2.6 Atividades . . . . .	46
2.7 Comentário das atividades . . . . .	47
2.8 Referências . . . . .	48
<b>Aula 3: Produto de Vetores - Parte I</b>	<b>49</b>
3.1 Introdução . . . . .	50
3.2 Produto Escalar . . . . .	50
3.2.1 Propriedades do Produto Interno . . . . .	52
3.2.2 Projeção de um vetor . . . . .	56
3.3 Resumo . . . . .	59
3.4 Atividades . . . . .	59
3.5 Comentário das atividades . . . . .	60
3.6 Referências . . . . .	61
<b>Aula 4: Produto de Vetores - Parte II</b>	<b>63</b>
4.1 Introdução . . . . .	64
4.2 Produto vetorial . . . . .	64
4.3 Propriedades do produto vetorial . . . . .	67
4.4 Resumo . . . . .	77
4.5 Atividades . . . . .	77

4.6	Comentário das atividades . . . . .	78
4.7	Referências . . . . .	79
<b>Aula 5: A Reta</b>		<b>81</b>
5.1	Introdução . . . . .	82
5.2	Equação vetorial da reta . . . . .	82
5.3	Equações paramétricas da reta . . . . .	84
5.4	Reta definida por dois pontos . . . . .	85
5.5	Equações simétricas da reta . . . . .	86
5.6	Equações reduzidas da reta . . . . .	87
5.7	Paralelismo de retas relativo aos planos e eixos co-ordenados . . . . .	89
5.7.1	Retas paralelas aos planos coordenados . . .	89
5.7.2	Retas paralelas aos eixos coordenados . . .	90
5.8	Mais algumas propriedades . . . . .	91
5.9	Resumo . . . . .	95
5.10	Atividades . . . . .	96
5.11	Comentário das atividades . . . . .	97
5.12	Referências . . . . .	97
<b>Aula 6: O Plano</b>		<b>99</b>
6.1	Introdução . . . . .	100
6.2	Equação geral do plano . . . . .	100
6.3	Equação vetorial e Equações paramétricas do plano	102
6.4	Mais algumas propriedades . . . . .	104
6.4.1	Interseção (entre planos e entre retas e planos)	107
6.5	Resumo . . . . .	108
6.6	Atividades . . . . .	108
6.7	Comentário das atividades . . . . .	109

6.8	Referências . . . . .	110
<b>Aula 7: Distâncias</b>		<b>111</b>
7.1	Introdução . . . . .	112
7.2	Distância de ponto à reta . . . . .	112
7.3	Distância de ponto a plano . . . . .	113
7.3.1	Distâncias de ponto à reta no plano . . . . .	116
7.4	Distância entre duas retas . . . . .	117
7.5	Resumo . . . . .	119
7.6	Atividades . . . . .	120
7.7	Comentário das Atividades . . . . .	121
7.8	Referências . . . . .	121
<b>Aula 8: Cônicas - Parte I</b>		<b>123</b>
8.1	Introdução . . . . .	124
8.2	Um pouco de História . . . . .	124
8.3	Conceituando as cônicas . . . . .	125
8.4	Parábola . . . . .	127
8.5	Translação dos eixos . . . . .	132
8.6	Resumo . . . . .	136
8.7	Atividades . . . . .	136
8.8	Comentário das atividades . . . . .	137
8.9	Referências . . . . .	138
<b>Aula 9: Cônicas - Parte II</b>		<b>139</b>
9.1	Introdução . . . . .	140
9.2	Elipse . . . . .	140
9.3	Equação reduzida . . . . .	142
9.4	Translação da elipse . . . . .	145

9.5	Equações paramétricas da elipse . . . . .	147
9.6	Resumo . . . . .	149
9.7	Atividades . . . . .	150
9.8	Comentário sobre as Atividades . . . . .	151
9.9	Referências . . . . .	151
<b>Aula 10: Cônicas - Parte III</b>		<b>153</b>
10.1	Introdução . . . . .	154
10.2	Hipérbole . . . . .	154
10.3	Equações reduzidas . . . . .	160
10.4	Translações de uma hipérbole . . . . .	164
10.5	Equações paramétricas . . . . .	166
10.6	Resumo . . . . .	168
10.7	Atividades . . . . .	169
10.8	Comentário sobre as Atividades . . . . .	170
10.9	Referências . . . . .	170
<b>Aula 11: Mudança de Coordenadas no Plano</b>		<b>171</b>
11.1	Introdução . . . . .	172
11.2	Mudanças de Coordenadas - Rotação e Translação da Origem . . . . .	172
11.3	Obtendo as coordenadas antigas em função das novas	177
11.4	Resumo . . . . .	181
11.5	Atividades . . . . .	181
11.6	Comentário das atividades . . . . .	182
11.7	Referências . . . . .	183
<b>Aula 12: Formas Quadráticas</b>		<b>185</b>
12.1	Introdução . . . . .	186

12.2	Mudando as coordenadas . . . . .	188
12.3	A equação característica, autovalores e autovetores	188
12.4	Mais algumas propriedades . . . . .	191
12.4.1	Observando o produto das raízes da equação do segundo grau. . . . .	192
12.5	Resumo . . . . .	197
12.6	Atividade . . . . .	198
12.7	Comentário das atividades . . . . .	199
12.8	Referências . . . . .	200
<b>Aula 13: A Equação Geral do Segundo Grau</b>		<b>201</b>
13.1	Introdução . . . . .	202
13.2	Relembrando mudança de coordenadas . . . . .	202
13.3	Vamos analisar quando $AC - B^2 = 0$ . . . . .	205
13.4	Resumo . . . . .	210
13.5	Atividades . . . . .	210
13.6	Comentário das atividades . . . . .	211
13.7	Referências . . . . .	212
<b>Aula 14: Transformações Lineares</b>		<b>213</b>
14.1	Introdução . . . . .	214
14.2	Transformações no plano . . . . .	215
14.3	Transformações lineares . . . . .	222
14.4	Resumo . . . . .	231
14.5	Atividades . . . . .	231
14.6	Comentário das atividades . . . . .	233
14.7	Referências . . . . .	234

<b>Aula 15: Mudança de Coordenadas no Espaço</b>	<b>235</b>
15.1 Introdução . . . . .	236
15.2 Mudança de sistema de coordenadas no espaço . .	236
15.3 Transladando a origem do sistema . . . . .	239
15.4 As matrizes ortogonais . . . . .	242
15.5 Resumo . . . . .	244
15.6 Atividades . . . . .	244
15.7 Comentário das atividades . . . . .	246
15.8 Referências . . . . .	246
<b>Aula 16: Quádricas Centrais</b>	<b>247</b>
16.1 Introdução . . . . .	248
16.2 Quádricas centrais . . . . .	249
16.3 Resumo . . . . .	259
16.4 Atividades . . . . .	259
16.5 Comentário das atividades . . . . .	261
16.6 Referências . . . . .	261
<b>Aula 17: Completando Quadrados</b>	<b>263</b>
17.1 Introdução . . . . .	264
17.2 Completando quadrados . . . . .	265
17.3 Resumo . . . . .	273
17.4 Atividades . . . . .	273
17.5 Comentário das atividades . . . . .	274
17.6 Referências . . . . .	274
<b>Aula 18: Equação Geral do Segundo Grau no Espaço</b>	<b>277</b>
18.1 Introdução . . . . .	278
18.2 $A$ , $B$ e $C$ são diferentes de zero . . . . .	279

18.3	Apenas um dos coeficientes $A, B, C$ é zero e os outros dois têm o mesmo sinal . . . . .	279
18.4	Apenas um dos coeficientes $A, B, C$ é nulo e os outros dois têm sinais opostos . . . . .	281
18.5	Um dos coeficientes $A, B, C$ é diferente de zero e os outros dois são nulos . . . . .	284
18.6	Resumo . . . . .	286
18.7	Atividades . . . . .	287
18.8	Comentário das atividades . . . . .	287
18.9	Referências . . . . .	288
<b>Aula 19: Transformações Lineares no Espaço</b>		<b>289</b>
19.1	Introdução . . . . .	290
19.2	Transformações lineares . . . . .	290
19.3	Transformações lineares em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	293
19.3.1	Transformações ortogonais . . . . .	298
19.4	Resumo . . . . .	304
19.5	Atividades . . . . .	304
19.6	Comentário das atividades . . . . .	306
19.7	Referências . . . . .	306
<b>Aula 20: Aplicações de Transformações Lineares</b>		<b>309</b>
20.1	Introdução . . . . .	310
20.2	Aplicações à Óptica . . . . .	310
20.3	Projeção do espaço tridimensional no plano . . . . .	314
20.4	Codificando mensagens . . . . .	317
20.5	Resumo . . . . .	320
20.6	Atividades . . . . .	320
20.7	Comentário das atividades . . . . .	322

20.8 Referências . . . . .	322
----------------------------	-----



**2**  
LIVRO

**1**  
AULA

# Vetores Geométricos

## **META**

Introduzir a definição de vetor.

## **OBJETIVOS**

Identificar vetores no plano e no espaço e suas propriedades. Efetuar operações com vetores (adição, diferença e multiplicação por escalar).

## Vetores Geométricos

### 1.1 Introdução

Seja bem-vindo, caro aluno! Este é o nosso primeiro encontro, entre tantos que estão por vir. A partir de agora, você vai conhecer um pouco sobre Geometria Analítica.

Nascida das diversas necessidades das técnicas da agrimensura e da arquitetura, a Geometria Clássica, muito estudada por diversos intelectuais, toma uma nova roupagem. A Geometria Analítica, por sua vez, baseia-se na idéia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números e os pontos no espaço por ternos ordenados de números reais. Nesta concepção, as linhas e as superfícies, no plano e no espaço, são descritas por meio de equações, permitindo um tratamento algébrico de questões de natureza geométrica e, reciprocamente, um tratamento geométrico de algumas situações algébricas.

Por volta de 1637, a criação da Geometria Analítica deve-se a dois matemáticos franceses, *Pierre de Fermat* (1601-1665) e *René Descartes* (1596-1650), simultaneamente. E o mais curioso nesta história é que ambos eram graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional. Esta interação entre Geometria e Álgebra foi responsável por diversas descobertas na Matemática e suas aplicações.

Neste nosso primeiro encontro, você vai conhecer um dos elementos principais da Geometria Analítica: os vetores, seu conceito geométrico, a definição das operações que podem ocorrer entre eles, além de suas propriedades. Também vai compreender que muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso precisam da magnitude, da direção e do sentido para serem com-

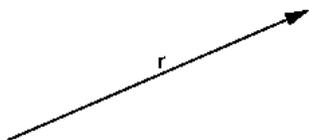
pletamente identificadas. Essas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

Será que deu para aguçar um pouquinho a sua curiosidade? Quer saber mais? Então venha conosco para a nossa primeira etapa.

### 1.2 Transitando pelas definições

Esta aula está segmentada em duas partes. Nesta primeira, vamos apresentar para você, caro aluno, algumas definições que serão fundamentais para a compreensão da etapa seguinte.

**Definição 1.1.** [RETA ORIENTADA - EIXO] Uma reta  $r$  é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso considerado **positivo** e indicado por uma seta. O sentido oposto é **negativo**. Uma reta



orientada é denominada **eixo**.

**Definição 1.2.** [SEGMENTO ORIENTADO] Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado **origem** do segmento e o segundo, **extremidade**.

O segmento orientado de origem  $A$  e extremidade  $B$  será representado por  $AB$  e geometricamente indicado por uma seta que caracteriza de forma visual o sentido do segmento (ver figura 1.2).

**Definição 1.3.** [SEGMENTO NULO E OPOSTO]

## Vetores Geométricos

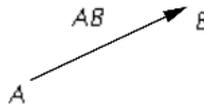


Figura 1.1: Segmento orientado  $AB$

1. Um **segmento nulo** é aquele cuja extremidade coincide com a origem.
2. Se  $AB$  é um segmento orientado, o segmento orientado  $BA$  **oposto** de  $AB$ .

### 1.3 Medida de um segmento

Fixando uma unidade de comprimento, podemos associar a cada segmento orientado um número real não negativo. A medida do segmento orientado é o seu **comprimento** ou seu **módulo**. O comprimento do segmento  $AB$  é indicado por  $\overline{AB}$ . [htb!]

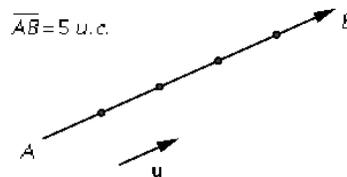


Figura 1.2: Nesta ilustração o segmento orientado  $u$  representa o comprimento unitário.

*Observação 1.* (a) Os segmentos nulos têm comprimentos igual a zero.

(b)  $\overline{AB} = \overline{BA}$ .

Dois segmentos orientados não nulos,  $AB$  e  $CD$ , têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes.

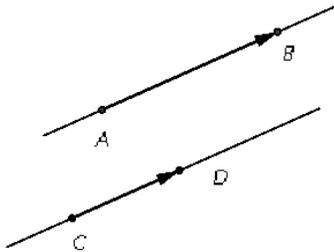


Figura 1.3: Segmentos orientados de mesma direção.

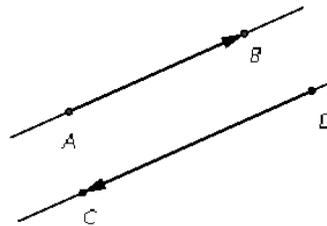


Figura 1.4: Segmentos orientados opostos.

As próximas figuras ilustram segmentos orientados que são coincidentes (isto é, ambos os segmentos estão na mesma reta).

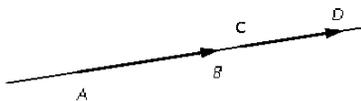


Figura 1.5:

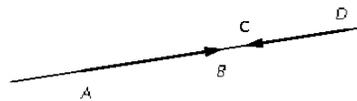


Figura 1.6:

## 1.4 Segmentos equípolentes

**Definição 1.4.** Dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são **equípolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento (veja nas figuras (1.7) e (1.8)). Sempre que os segmentos  $AB$  e  $CD$  forem equípolentes, serão representados por  $AB \sim CD$ .

Para que o segmento  $AB$  seja equípolente a  $CD$  (na figura

## Vetores Geométricos

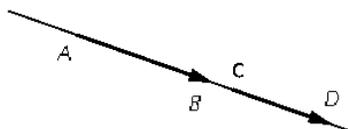


Figura 1.7:

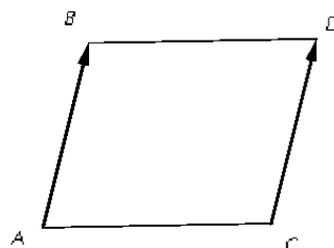


Figura 1.8: Neste caso, os segmentos  $AB$  e  $CD$  não pertencem à mesma reta.

(1.8)), é necessário que  $AB \parallel CD$  e  $ABCD$  formem um paralelogramo.

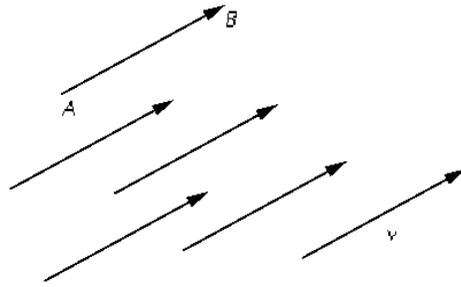
### 1.4.1 Propriedades da equiipolência

Agora que você já sabe o que é um segmento equiipolente, vamos apresentar-lhe as suas propriedades.

- (i)  $AB \sim AB$  (reflexiva).
- (ii) Se  $AB \sim CD$ , então  $CD \sim AB$  (simétrica).
- (iii) Se  $AB \sim CD$  e  $CD \sim EF$ , então  $AB \sim EF$  (transitiva).
- (iv) Dado um segmento orientado  $AB$  e um ponto  $C$ , existe um único ponto  $D$ , tal que  $AB \sim CD$ .

## 1.5 Vetores

Vetor determinado por um segmento orientado  $AB$  é o conjunto de todos os segmentos orientados equiipolentes a  $AB$ . Esse conjunto é indicado por  $\vec{v}$ .



O vetor determinado por  $AB$  é denotado por:  $\overrightarrow{AB}$  ou  $B - A$  ou  $\vec{v}$ .

*Observação 2.* Qualquer vetor  $\overrightarrow{AB}$  é um representante do conjunto vetores desde que tenha a mesma direção, mesmo sentido e comprimento de  $AB$ .

Indicamos o módulo (ou magnitude) de  $\vec{v}$  por  $|\vec{v}|$ .

### 1.5.1 Mais algumas definições

**Vetores iguais** - Dois vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são iguais se, e somente se,  $AB \sim CD$ .

**Vetor nulo** - Os segmentos nulos, por serem equípolentes entre si, determinam um único vetor, chamado de vetor nulo ou vetor zero, indicado por  $\vec{0}$ .

**Vetores opostos** - Dado  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , o vetor  $\overrightarrow{BA}$  é o oposto de  $\overrightarrow{AB}$  e o indicamos por  $-\overrightarrow{AB}$  ou  $-\vec{v}$ .

**Vetor unitário** -  $\vec{v}$  é unitário se  $|\vec{v}| = 1$ .

**Versor** - O versor de um vetor não nulo  $\vec{v}$  é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de  $\vec{v}$ . (Veja a figura (1.9).)

## Vetores Geométricos

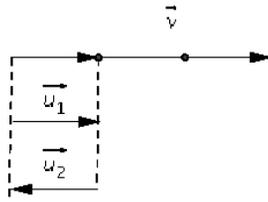


Figura 1.9:  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são unitários, mas  $\vec{u}_1$  tem a mesma direção de  $\vec{v}$ . Portanto,  $\vec{u}_1$  é versor de  $\vec{v}$ .

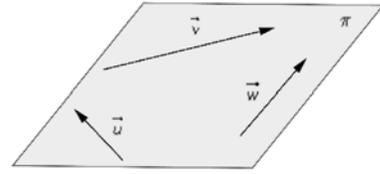


Figura 1.10: Neste caso,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  pertencem ao plano  $\pi$ .

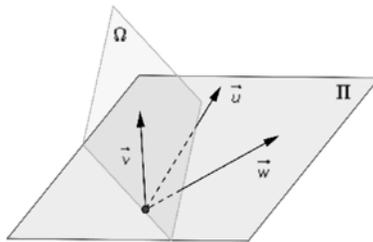


Figura 1.11:  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  não são coplanares.

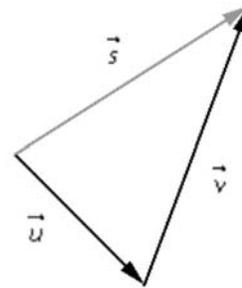


Figura 1.12:  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

**Vetores colineares** -  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são considerados vetores **colineares** se tiverem a mesma direção. Em outras palavras,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares se tiverem representantes  $AB$  e  $CD$  pertencentes à mesma reta ou em retas paralelas.

**Vetores coplanares** - se os vetores não nulos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  têm representantes  $AB$ ,  $CD$  e  $EF$  pertencentes ao mesmo plano, dizemos que são **coplanares**. (Veja a figura (1.10)).

## 1.6 Operações com vetores

Agora que você já está mais entrosado com o conteúdo de nossa aula, pois já conheceu alguns conceitos importantes, podemos avançar um pouquinho mais. Vamos apresentar para você, nesta segunda parte de nossa aula, os mecanismos para efetuar as operações com vetores.

### 1.6.1 Adição

**Definição 1.5.** Sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  representados pelos segmentos orientados  $AB$  e  $BC$ . Os pontos  $A$  e  $C$  determinam um vetor  $\vec{s}$ , que é a soma dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , ou seja,

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Veja a figura (1.13).

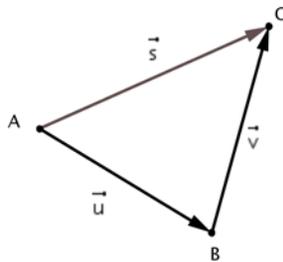


Figura 1.13:  $\vec{u} = \vec{AB}$ ,  $\vec{v} = \vec{BC}$  e  $\vec{s} = \vec{AC}$ .

### 1.6.2 Propriedades da adição

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores quaisquer, valham:

COMUTATIVA -  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ASSOCIATIVA -  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

## Vetores Geométricos

ELEMENTO NEUTRO - Existe um elemento  $\vec{0}$ , tal que

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \quad \forall \vec{v}.$$

INVERSO ADITIVO - Para todo vetor  $\vec{v}$  existe um único vetor  $-\vec{v}$  (vetor oposto de  $\vec{v}$ ), tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}.$$

### 1.6.3 Diferença de vetores

**Definição 1.6.** Dizemos que  $\vec{d}$  é a **diferença** de dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  se  $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ , ou seja,

$$\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Nas figuras (1.14) e (1.15) estão representados os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente, pelos segmentos orientados  $AB$  e  $AC$ .  $ABCD$  é um paralelogramo cujas diagonais  $AD$  e  $BC$  representam, respectivamente,  $\vec{s}$  e  $\vec{d}$  (soma e diferença).

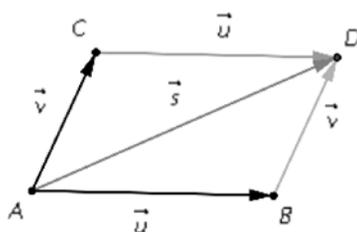


Figura 1.14:  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

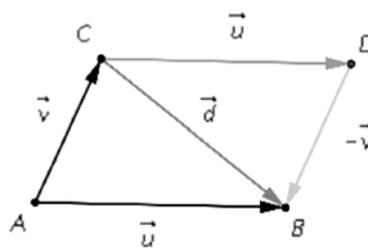


Figura 1.15: c

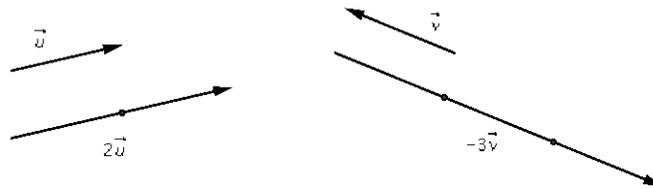
### 1.6.4 Multiplicação por um número real

**Definição 1.7.** Dados um vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  e um número real  $k \neq 0$ , chamamos de produto do escalar  $k$  pelo vetor  $\vec{v}$  o vetor  $\vec{p} = k\vec{v}$ , tal que:

1. [MÓDULO]  $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$ ;
  2. [DIREÇÃO] a mesma de  $\vec{v}$ ;
  3. [SENTIDO]  $\begin{cases} \text{o mesmo de } \vec{v} \text{ se } k > 0, \\ \text{o contrário de } \vec{v} \text{ se } k < 0. \end{cases}$
- Se  $k = 0$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , o produto é  $\vec{0}$ .

- Seja um vetor  $k\vec{v}$ , em que  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Fazendo com que  $k$  varie sobre  $\mathbb{R}$  (o conjunto dos números reais), obtemos os infinitos vetores colineares a  $\vec{v}$  (além de serem também colineares entre si). Por outro lado, para quaisquer dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , colineares, sempre existe um  $k \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

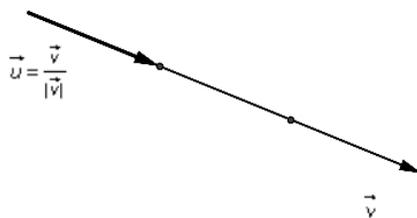


- O versor de  $\vec{v} \neq \vec{0}$  é o vetor unitário  $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$  ou  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ .

Veja que

$$|\vec{u}| = \left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1,$$

para todo  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Assim, temos que  $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{u}$ , ou seja, todo vetor é o produto de seu módulo pelo vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido que  $\vec{v}$ .



## Vetores Geométricos

### 1.6.5 Propriedades da multiplicação por um número real

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores quaisquer e  $a$  e  $b$  números reais (também conhecidos como escalares). Assim, temos as seguintes propriedades:

ASSOCIATIVA:  $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ ;

IDENTIDADE:  $1\vec{v} = \vec{v}$ ;

DISTRIBUTIVIDADE EM RELAÇÃO AOS ESCALARES:  $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$ ;

DISTRIBUTIVIDADE EM RELAÇÃO AOS VETORES:  $a(\vec{v} + \vec{u}) = a\vec{v} + a\vec{u}$ .

É bom que você atente para os exemplos que lhe apresentamos, pois são fundamentais para auxiliá-lo na resolução dos exercícios ao final desta aula.

**Exemplo 1.6.1.** Dados os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , como na figura a seguir, vamos construir o vetor  $2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{s}$ .

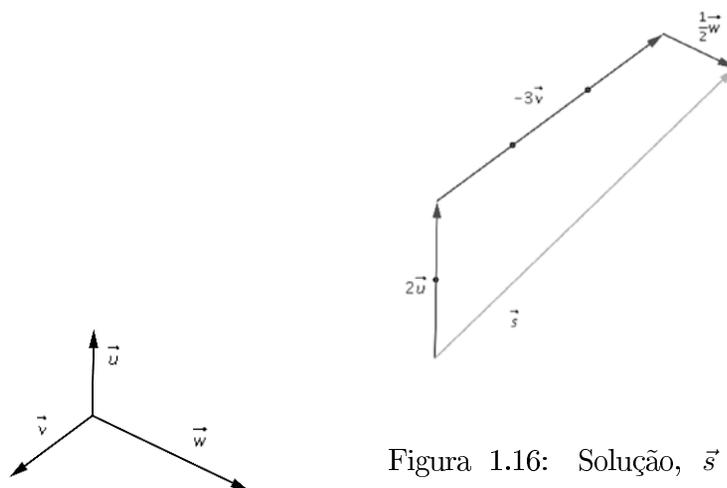
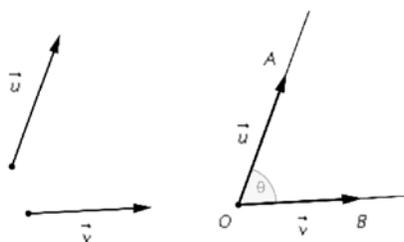


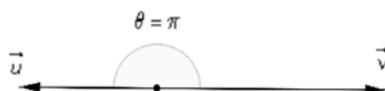
Figura 1.16: Solução,  $\vec{s} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ .

## 1.7 Ângulos de dois vetores

**Definição 1.8.** O ângulo de dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos é o ângulo  $\theta$  formado pelas semi-retas  $OA$  e  $OB$ , como na figura (1.8), e tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

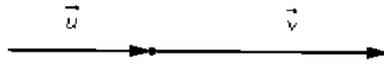


- Se  $\theta = \pi$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção e sentidos contrários.

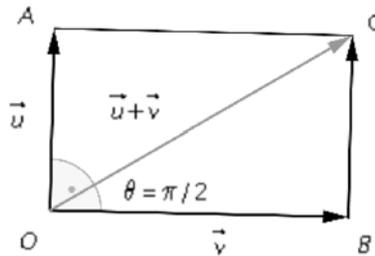


- Se  $\theta = 0$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção e mesmo sentido.

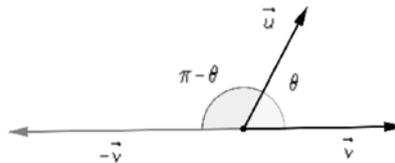
## Vetores Geométricos



- Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais (isto é, são perpendiculares), e denotamos por  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Neste caso, temos que  $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ .



- O vetor  $\vec{0}$  é considerado ortogonal a qualquer vetor.
- Se  $\vec{u}$  é ortogonal a  $\vec{v}$  e  $m$  um número real qualquer,  $\vec{u}$  é ortogonal a  $m\vec{v}$ .



## 1.8 Resumo

Nesta aula, você aprendeu que o segmento orientado no plano representa um objeto geométrico: o vetor, que por sua vez pode ser representado algebricamente e, como consequência, possibilita definir operações como adição, diferença e produto por um escalar.

Além disso, você aprendeu que existe um ângulo entre dois vetores, ainda que suas extremidades não coincidam.

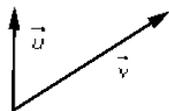
### 1.9 Atividades

1. Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

- (a) Se  $\vec{u} = \vec{v}$ , então  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .
- (b) Se  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ , então  $\vec{u} = \vec{v}$ .
- (c) Se  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , então  $\vec{u} = \vec{v}$ .
- (d) Se  $\vec{u} = \vec{v}$ , então  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ .
- (e) Se  $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ , então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são paralelos.
- (f) Se  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , então  $ABCD$  (vértices nesta ordem) é paralelogramo.

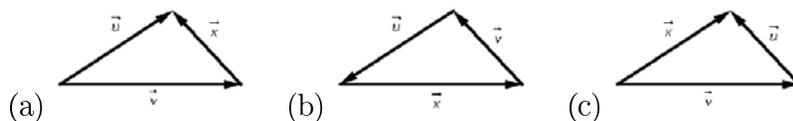
2. Dados os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  da figura, mostrar um representante do vetor através de um gráfico:

- (a)  $\vec{u} - \vec{v}$
- (b)  $\vec{v} - \vec{u}$
- (c)  $-\vec{v} - 2\vec{u}$
- (d)  $2\vec{u} - 3\vec{v}$



3. Determine o vetor  $\vec{x}$  em função de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  nas figuras a seguir.

## Vetores Geométricos

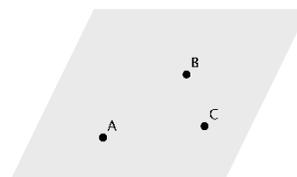


4. Dados três pontos  $A, B, C$  não-colineares, como na figura a seguir, representar o vetor  $\vec{x}$  nos seguintes casos:

(a)  $\vec{x} = \vec{BA} + 2\vec{BC}$ ;

(b)  $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{CA} + 2\vec{BA}$ ;

(c)  $\vec{x} = \vec{AC} + \vec{CB} - \vec{AB}$ .



5. Sabendo que o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é de  $30^\circ$ , determinar o ângulo formado pelos vetores a seguir.

(a)  $\vec{u}$  e  $-\vec{v}$    (b)  $-\vec{u}$  e  $2\vec{v}$    (c)  $-\vec{u}$  e  $-\vec{v}$    (d)  $3\vec{u}$  e  $5\vec{v}$

### 1.10 Comentário das atividades

Se você conseguiu fazer a atividade 1, então entendeu os rudimentos dos conceitos de módulo e vetores paralelos. E quanto às atividades 2,3 e 4 ? Conseguiu resolvê-las? Então já entendeu a idéia de soma, diferença de vetores, além de multiplicação por um escalar. E a atividade 5? Se você conseguiu resolvê-la, ajuda a fixar a idéia do ângulo entre vetores. Se ainda tiver dificuldades, volte e reveja com cuidado os conceitos apresentados na aula. Não esqueça que há tutores que o ajudarão a eliminar as suas dúvidas. Desde já, lembre-se de discutir os conteúdos com seus colegas.

## 1.11 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.

