Vetores e Geometria Analítica

Gastão Florêncio Miranda Junior

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2007

Vetores e Geometria Analítica

Elaboração de Conteúdo
Gastão Florêncio Miranda Junior

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Revisão
Fabíola Oliveira Criscuolo Melo

Reimpressão

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M672v Miranda Junior, Gastão Florêncio.
Vetores e Geometria Analítica / Gastão Florêncio Miranda Junior. - - São Cristóvão : Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2007.

1. Matemática. 2. Vetores. 3. Geometria analítica. I. Título.

CDU 514

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

2
LIVRO

1
AULA

Vetores Geométricos

META

Introduzir a definição de vetor.

OBJETIVOS

Identificar vetores no plano e no espaço e suas propriedades. Efetuar operações com vetores (adição, diferença e multiplicação por escalar).

1.1 Introdução

Seja bem-vindo, caro aluno! Este é o nosso primeiro encontro, entre tantos que estão por vir. A partir de agora, você vai conhecer um pouco sobre Geometria Analítica.

Nascida das diversas necessidades das técnicas da agrimensura e da arquitetura, a Geometria Clássica, muito estudada por diversos intelectuais, toma uma nova roupagem. A Geometria Analítica, por sua vez, baseia-se na idéia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números e os pontos no espaço por ternos ordenados de números reais. Nesta concepção, as linhas e as superfícies, no plano e no espaço, são descritas por meio de equações, permitindo um tratamento algébrico de questões de natureza geométrica e, reciprocamente, um tratamento geométrico de algumas situações algébricas.

Por volta de 1637, a criação da Geometria Analítica deve-se a dois matemáticos franceses, *Pierre de Fermat* (1601-1665) e *René Descartes* (1596-1650), simultaneamente. E o mais curioso nesta história é que ambos eram graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional. Esta interação entre Geometria e Álgebra foi responsável por diversas descobertas na Matemática e suas aplicações.

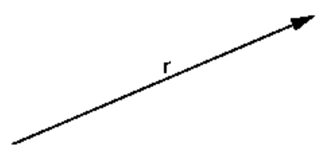
Neste nosso primeiro encontro, você vai conhecer um dos elementos principais da Geometria Analítica: os vetores, seu conceito geométrico, a definição das operações que podem ocorrer entre eles, além de suas propriedades. Também vai compreender que muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso precisam da magnitude, da direção e do sentido para serem completamente identificadas. Essas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

Será que deu para aguçar um pouquinho a sua curiosidade? Quer saber mais? Então venha conosco para a nossa primeira etapa.

1.2 Transitando pelas definições

Esta aula está segmentada em duas partes. Nesta primeira, vamos apresentar para você, caro aluno, algumas definições que serão fundamentais para a compreensão da etapa seguinte.

Definição 1.1. [RETA ORIENTADA - EIXO] Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido de percurso considerado **positivo** e indicado por uma seta. O sentido oposto é **negativo**. Uma reta



orientada é denominada **eixo**.

Definição 1.2. [SEGMENTO ORIENTADO] Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado **origem** do segmento e o segundo, **extremidade**.

O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por AB e geometricamente indicado por uma seta que caracteriza de forma visual o sentido do segmento (ver figura 1.2).

Definição 1.3. [SEGMENTO NULO E OPOSTO]

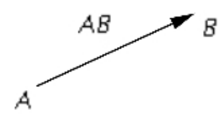


Figura 1.1: Segmento orientado AB

1. Um **segmento nulo** é aquele cuja extremidade coincide com a origem.

2. Se AB é um segmento orientado, o segmento orientado BA **oposto** de AB.

1.3 Medida de um segmento

Fixando uma unidade de comprimento, podemos associar a cada segmento orientado um número real não negativo. A medida do segmento orientado é o seu **comprimento** ou seu **módulo**. O comprimento do segmento AB é indicado por $\overline{AB}$. [htb!]

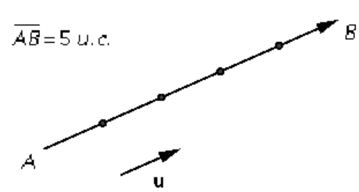


Figura 1.2: Nesta ilustração o segmento orientado u representa o comprimento unitário.

Observação 1. (a) Os segmentos nulos têm comprimentos igual a zero.

(b) $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Dois segmentos orientados não nulos, AB e CD, têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes.

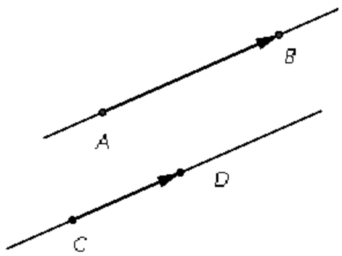


Figura 1.3: Segmentos orientados de mesma direção.

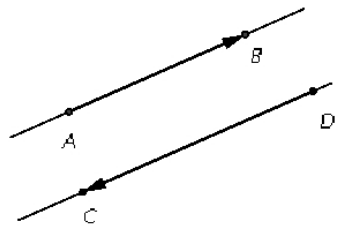


Figura 1.4: Segmentos orientados opostos.

As próximas figuras ilustram segmentos orientados que são coincidentes (isto é , ambos os segmentos estão na mesma reta).

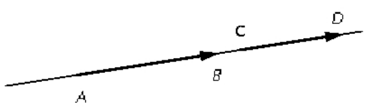


Figura 1.5:

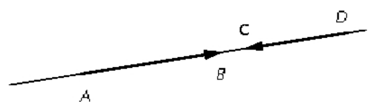


Figura 1.6:

1.4 Segmentos eqüipolentes

Definição 1.4. Dois segmentos orientados AB e CD são **eqüipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento (veja nas figuras (1.7) e (1.8)). Sempre que os segmentos AB e CD forem eqüipolentes, serão representados por $AB \sim CD$.

Para que o segmento AB seja eqüipolente a CD (na figura

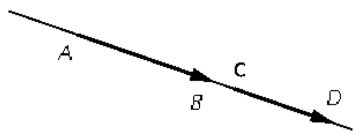


Figura 1.7:

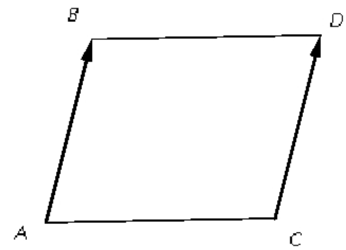


Figura 1.8: Neste caso, os segmentos AB e CD não pertencem à mesma reta.

(1.8)), é necessário que $AB//CD$ e $ABCD$ formem um paralelogramo.

1.4.1 Propriedades da eqüipolência

Agora que você já sabe o que é um segmento eqüipolente, vamos apresentar-lhe as suas propriedades.

(i) $AB \sim AB$ (reflexiva).

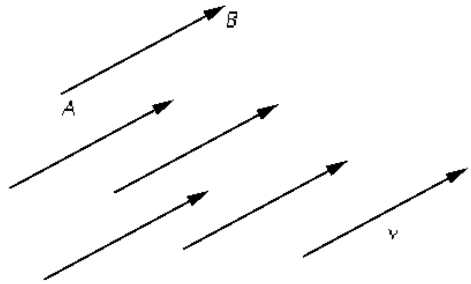
(ii) Se $AB \sim CD$, então $CD \sim AB$ (simétrica).

(iii) Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, então $AB \sim EF$ (transitiva).

(iv) Dado um segmento orientado AB e um ponto C, existe um único ponto D, tal que $AB \sim CD$.

1.5 Vetores

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados eqüipolentes a AB. Esse conjunto é indicado por $\vec{v}$.



O vetor determinado por AB é denotado por: $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ ou $\vec{v}$.

Observação 2. Qualquer vetor $\overrightarrow{AB}$ é um representante do conjunto vetores desde que tenha a mesma direção, mesmo sentido e comprimento de AB.

Indicamos o módulo (ou magnitude) de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$.

1.5.1 Mais algumas definições

Vetores iguais - Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, $AB \sim CD$.

Vetor nulo - Os segmentos nulos, por serem eqüipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado de vetor nulo ou vetor zero, indicado por $\vec{0}$.

Vetores opostos - Dado $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e o indicamos por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\vec{v}$.

Vetor unitário - $\vec{v}$ é unitário se $|\vec{v}| = 1$.

Versor - O versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$. (Veja a figura (1.9).)

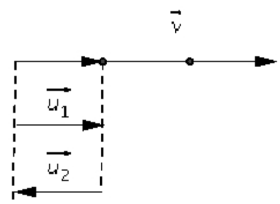


Figura 1.9: $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ são unitários, mas $\vec{u_1}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$. Portanto, $\vec{u_1}$ é versor de $\vec{v}$.

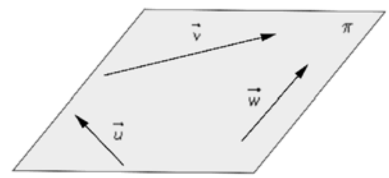


Figura 1.10: Neste caso, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pertencem ao plano π.

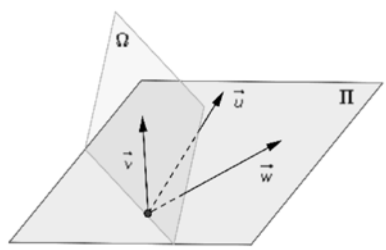


Figura 1.11: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

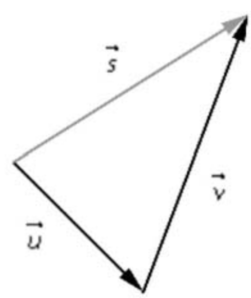


Figura 1.12: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

Vetores colineares - $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são considerados vetores **colineares** se tiverem a mesma direção. Em outras palavras, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes à mesma reta ou em retas paralelas.

Vetores coplanares - se os vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ têm representantes AB, CD e EF pertencentes ao mesmo plano, dizemos que são **coplanares**. (Veja a figura (1.10)).

1.6 Operações com vetores

Agora que você já está mais entrosado com o conteúdo de nossa aula, pois já conheceu alguns conceitos importantes, podemos avançar um pouquinho mais. Vamos apresentar para você, nesta segunda parte de nossa aula, os mecanismos para efetuar as operações com vetores.

1.6.1 Adição

Definição 1.5. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC. Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$, que é a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Veja a figura (1.13).

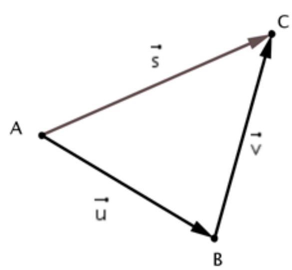


Figura 1.13: $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$ e $\vec{s} = \vec{AC}$.

1.6.2 Propriedades da adição

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer, valham:

Comutativa - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Associativa - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

ELEMENTO NEUTRO - Existe um elemento $\vec{0}$, tal que

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \ \forall \vec{v}.$$

INVERSO ADITIVO - Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único vetor $-\vec{v}$ (vetor oposto de $\vec{v}$), tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}.$$

1.6.3 Diferença de vetores

Definição 1.6. Dizemos que $\vec{d}$ é a **diferença** de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$, ou seja,

$$\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Nas figuras (1.14) e (1.15) estão representados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, pelos segmentos orientados AB e AC. $ABCD$ é um paralelogramo cujas diagonais AD e BC representam, respectivamente, $\vec{s}$ e $\vec{d}$ (soma e diferença).

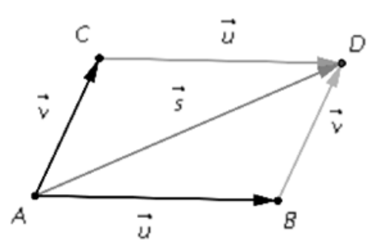


Figura 1.14: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

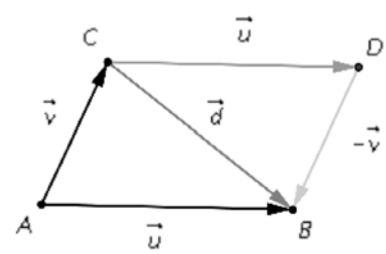


Figura 1.15: c

1.6.4 Multiplicação por um número real

Definição 1.7. Dados um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chamamos de produto do escalar k pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

1. [Módulo] $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$;

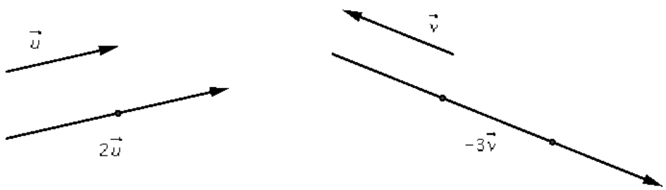
2. [Direção] a mesma de $\vec{v}$;

3. [Sentido] $\begin{cases} \text{o mesmo de } \vec{v} \text{ se } k > 0, \\ \text{o contrário de } \vec{v} \text{ se } k < 0. \end{cases}$

- Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o produto é $\vec{0}$.

- Seja um vetor $k\vec{v}$, em que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Fazendo com que k varie sobre $\mathbb{R}$ (o conjunto dos números reais), obtemos os infinitos vetores colineares a $\vec{v}$ (além de serem também colineares entre si). Por outro lado, para quaisquer dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, colineares, sempre existe um $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$\vec{u} = k\,\vec{v}.$$

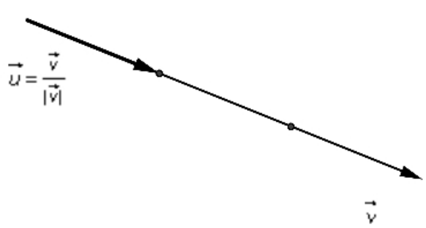


- O versor de $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário $\vec{u} = \dfrac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}$ ou $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Veja que

$$|\vec{u}| = \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1,$$

para todo $\vec{v} \neq \vec{0}$. Assim, temos que $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u}$, ou seja, todo vetor é o produto de seu módulo pelo vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido que $\vec{v}$.



1.6.5 Propriedades da multiplicação por um número real

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer e a e b números reais (também conhecidos como escalares). Assim, temos as seguintes propriedades:

Associativa: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$;

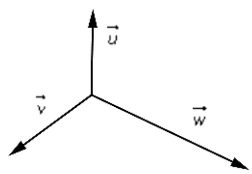
Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$;

Distributividade em relação aos escalares: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$;

Distributividade em relação aos vetores: $a(\vec{v}+\vec{u}) = a\vec{v}+ a\vec{u}$.

É bom que você atente para os exemplos que lhe apresentamos, pois são fundamentais para auxiliá-lo na resolução dos exercícios ao final desta aula.

Exemplo 1.6.1. Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como na figura a seguir, vamos construir o vetor $2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{s}$.



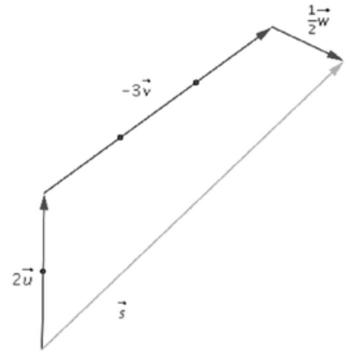
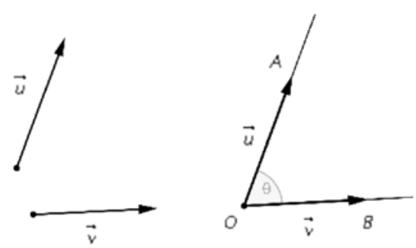


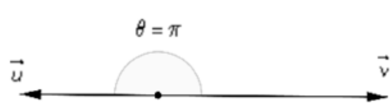
Figura 1.16: Solução, $\vec{s} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \dfrac{1}{2}\vec{w}$.

1.7 Ângulos de dois vetores

Definição 1.8. O **ângulo de dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB, como na figura (1.8), e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

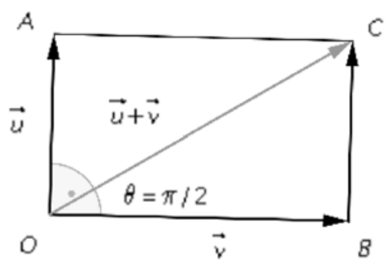


- Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários.



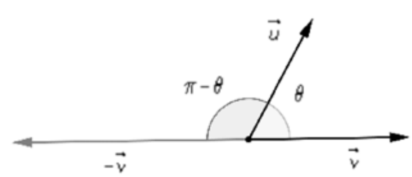
- Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e mesmo sentido.

- Se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais (isto é, são perpendiculares), e denotamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$. Neste caso, temos que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.



- O vetor $\vec{0}$ é considerado ortogonal a qualquer vetor.

- Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e m um número real qualquer, $\vec{u}$ é ortogonal a $m\vec{v}$.



1.8 Resumo

Nesta aula, você aprendeu que o segmento orientado no plano representa um objeto geométrico: o vetor, que por sua vez pode ser representado algebricamente e, como conseqüência, possibilita definir operações como adição, diferença e produto por um escalar.

Além disso, você aprendeu que existe um ângulo entre dois vetores, ainda que suas extremidades não coincidam.

1.9 Atividades

1. Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

   (a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

   (b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

   (c) Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

   (d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

   (e) Se $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então $\vec{u}$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

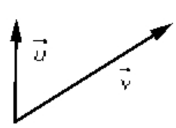
   (f) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então $ABCD$ (vértices nesta ordem) é paralelogramo.

2. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar um representante do vetor através de um gráfico:
   (a) $\vec{u} - \vec{v}$

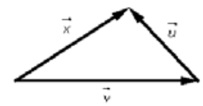
   (b) $\vec{v} - \vec{u}$

   (c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

   (d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



3. Determine o vetor $\vec{x}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nas figuras a seguir.

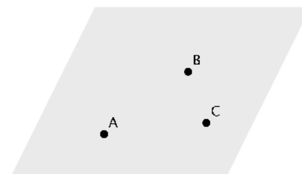
(a)  (b)  (c) 

4. Dados três pontos A, B, C não-colineares, como na figura a seguir, representar o vetor $\vec{x}$ nos seguintes casos:

   (a) $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$;

   (b) $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}$;

   (c) $\vec{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$.



5. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 30^o, determinar o ângulo formado pelos vetores a seguir.

   (a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (b) $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ (c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (b) $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

1.10 Comentário das atividades

Se você conseguiu fazer a atividade 1, então entendeu os rudimentos dos conceitos de módulo e vetores paralelos. E quanto às atividades 2,3 e 4 ? Conseguiu resolvê-las? Então já entendeu a idéia de soma, diferença de vetores, além de multiplicação por um escalar. E a atividade 5? Se você conseguiu resolvê-la, ajuda a fixar a idéia do ângulo entre vetores. Se ainda tiver dificuldades, volte e reveja com cuidado os conceitos apresentados na aula. Não esqueça que há tutores que o ajudarão a eliminar as suas dúvidas. Desde já, lembre-se de discutir os conteúdos com seus colegas.

1.11 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Álgebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.