2
LIVRO

3
AULA

Produto de Vetores - Parte I

META:

Apresentar a definição de produto escalar (ou produto interno) entre vetores e suas propriedades.

OBJETIVOS:

Reconhecer e efetuar produtos escalares entre vetores. Interpretar, geometricamente, os produtos vetoriais entre vetores, como o ângulo entre vetores, a desigualdade triangular e a projeção de um vetor sobre outro.

3.1 Introdução

Olá, caro aluno! Estamos aqui, novamente, para mais uma de nossas aulas. Espero que os conteúdos apresentados nas aulas anteriores tenham sido produtivos para você. Está conseguindo acompanhar o nosso raciocínio? Estão surgindo muitas dúvidas? Lembre-se de que há um tutor para esclarecê-las, e é bom que você entre em contato com ele sempre que necessário.

Nesta aula, introduziremos o primeiro conceito sobre produto entre vetores, a saber, o produto escalar (ou produto interno), em que dois vetores são convertidos em um escalar. Além disso, vamos estudar suas propriedades e como interpretar os vetores geometricamente. Abordaremos, também, uma desigualdade triangular.

3.2 Produto Escalar

Definição 3.16. Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, definimos que o **produto escalar** (ou **produto interno usual**), representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (também é indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$), é o número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Em particular, se $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, em que $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, o produdo escalar fica definido de forma análoga à anterior, isto é,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Exemplo 3.2.1. Sendo $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vetores em $\mathbb{R}^3$, podemos escrevê-los como, $\vec{v} = (3, -1, -2)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, e assim

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (3, -1, -2), (1, 1, -1) \rangle = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$$

Definição 3.17. Denominamos de **módulo** de um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, representado por $|\vec{v}|$, o número real não negativo,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \tag{3.1}$$

que em coordenadas fica

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Em $\mathbb{R}^2$, podemos definir módulo de modo similar, ou seja, dado um vetor no plano $\vec{u} = (x, y)$, seu módulo será o número real não negativo

$$|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

, ou ainda em coordenadas

$$, |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemplo 3.2.2.

- Seja $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{v} = (1, 0, -1) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

- Seja $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, com $\vec{v} = (-2, \sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$.

- (Versor de um Vetor) Seja $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, dado por $\vec{v} = (1, 0, -1)$, o seu versor $\vec{w}$ será dado por

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$$

e assim,

$$\begin{aligned}\vec{w} = & \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right| = \left|(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})\right| \\ = & \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1\end{aligned}$$

O versor do vertor $\vec{v}$ é, na verdade, um vetor unitário.

- (Distância entre dois pontos) A distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |B - A|$$

e, deste modo,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},\ \ A, B \in \mathbb{R}^3.$$

coincide com a definição de distância entre dois pontos no espaço. Para o caso do plano, basta-nos suprimir a terceira coordenada, isto é,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

neste caso, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ pontos do $\mathbb{R}^2$.

3.2.1 Propriedades do Produto Interno

Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

(i) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$. *De fato, pois por definição $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, e se $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, então $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.*

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (Comutativa) *Veja que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, pois as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são números reais e valem a comutatividade do produto e da soma em $\mathbb{R}$.*

(iii) $\langle \vec{u}, (\vec{v}+\vec{w})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle$ (Distributiva com relação à soma de vetores) *De fato, pois*

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, (\vec{v}+\vec{w})\rangle &= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)\rangle \\ &= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3)\rangle \\ &= x_1(x_2+x_3) + y_1(y_2+y_3) + z_1(z_2+z_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle\end{aligned}$$

(iv) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v}\rangle$

Exercício 3.2.1. A verificação desta propriedade fica como atividade para você.

(v) $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = |\vec{u}|^2$ *De fato, temos que* $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}$. *Assim,*

$$(|\vec{u}|)^2 = \left(\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle}\right)^2 \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle$$

Exemplo 3.2.3. $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + |\vec{v}|^2$ para quaisquer vetores $\vec{u}\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (esta igualdade também é válida caso os vetores pertençam ao $\mathbb{R}^3$).

Temos que

$$\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle && \textit{(pela propriedade (ii) e (iii))} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle && \textit{(por (iii))} \\ &= |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + |\vec{v}|^2\end{aligned}$$

Definição 3.18 (Ângulo de Dois Vetores)**.** Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\theta \tag{3.2}$$

Esta definição também não depende da condição de os vetores estarem em $\mathbb{R}^2$ (no plano) ou em $\mathbb{R}^3$ (no espaço). Assim, caro aluno, é importante que você atente para o que é preciso fazer caso queiramos obter o ângulo θ a partir dos vetores já conhecidos.

Veja que na equação (3.2)temos o seguinte

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \tag{3.3}$$

e assim, obtemos

$$\theta = \text{arc cos}\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right) \tag{3.4}$$

Exemplo 3.2.4. Para calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$, façamos o seguinte movimento

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{\langle (1, 1, 4), (-1, 2, 2) \rangle}{|(1, 1, 4)|\,|(-1, 2, 2)|}$$

$$\cos\theta = \frac{-1 + 2 + 8}{\sqrt{18} \cdot 3} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

E assim, temos que $\theta = 45^o$.

Em relação ao ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, percebemos que:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$, com base na equação (3.3), temos que $\cos\theta > 0$, e assim $0 \leq \theta < 90^o$ (ou seja, um ângulo agudo).

2. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0$, por (3.3), temos que $\cos\theta < 0$, e assim $90^o \leq \theta < 180^o$ (ou seja, um ângulo obtuso).

3. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, por (3.3), temos que $\cos\theta = 0$, e assim $\theta = 90^o$ (neste caso, um ângulo reto).

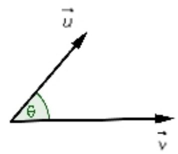


Figura 3.36: $0 \leq \theta < 90^o$.

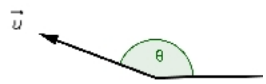


Figura 3.37: $90^o \leq \theta < 180^o$.

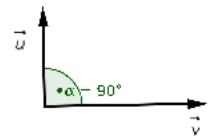


Figura 3.38: $\theta = 90^o$.

Observe que na equação (3.3) temos que

$$|\cos\theta| = \left|\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right| \;\Rightarrow\; |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\cos\theta|\;|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,,$$

e devemos lembrar que $0 \leq |\cos\theta| \leq 1$. Assim,

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,, \tag{3.5}$$

para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (sejam eles pertencentes ao plano ou ao espaço).

Exemplo 3.2.5. O triângulo formado pelos vértices $A = (2, 3, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (2, 2, -2)$ é retângulo?

Para respondermos esta questão, é importante observarmos se algum dos pares de vetores que determinam os lados do triângulo ABC são perpendiculares. Para isso,

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, -1, -3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0, 1, -1)$$

então, temos que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle (0, -2, -2), (0, -1, -3) \rangle = 8$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle (0, -2, -2), (0, 1, -1) \rangle = 0$$

Portanto, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$, isto é, no vértice B, os lados AB e BC formam um ângulo de 90^o. Isso nos permite concluir que o triângulo ABC é retângulo.

Exemplo 3.2.6. Determinar um vetor ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Para isso, vamos considerar um vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Sendo assim,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle (x, y, z), (1, -1, 0) \rangle = x - y = 0$$

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = x + z = 0$$

Portanto, nosso problema agora se reduz a solucionar o sistema

$$\begin{cases} x - y = & 0 \\ x + z = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & y \\ x = & -z \end{cases}$$

Isso significa dizer que as soluções são vetores na forma $\vec{w} = (x, x, -x)$. Deste modo, basta-nos escolher um reprensentante desses vetores, por exemplo, tomando $x = 1$, e assim, $(1, 1, -1)$ é uma solução.

3.2.2 Projeção de um vetor

Definição 3.19. Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e θ o ângulo formado por eles. Se o vetor $\vec{w}$ representa a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, é definido por

$$\text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \right) \vec{v} \text{ ou } \text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} \tag{3.6}$$

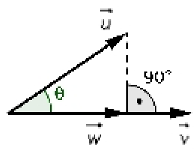


Figura 3.39: $0 \leq \theta < 90^o$

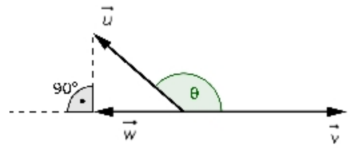


Figura 3.40: $90^o \leq \theta < 180^o$

Tanto o triângulo retângulo representado na figura (3.39) quanto o da figura (3.40) nos permitem compreender que

$$|\vec{w}| = |\vec{u}|\,|\cos\theta| = |\vec{u}|\,\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{|\vec{v}|}$$

Como $\vec{w}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então,

$$|\vec{w}| = |\lambda|\,|\vec{v}| \Rightarrow |\lambda| = |\vec{w}|\,\frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{|\vec{v}|}\,\frac{1}{|\vec{v}|}$$

$$|\lambda| = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{|\vec{v}|^2} \Rightarrow \boxed{\vec{w} = \left(\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}}$$

E assim, $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\dfrac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$.

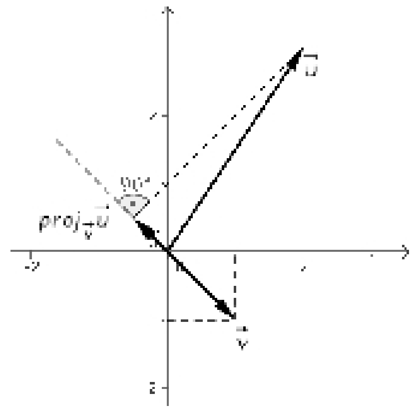
Exemplo 3.2.7. Vamos determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ em que $\vec{u} = (2, 3)$ e $\vec{v} = (1, -1)$. Observe que

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle (2, 3), (1, -1)\rangle = 2 - 3 = -1$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = \langle (1, -1), (1, -1)\rangle = 1 + 1 = 2$$

E assim,

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{v}|^2}\right)(1, -1) = -\frac{1}{2}(1, -1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$



Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (pertencentes ao plano ou ao espaço) e usando as propriedades de produto escalar, temos que

$$\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

como $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle$, $|\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$ e $|\vec{v}|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$, além de que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (pois os ambientes a que os vetores pertencem são $\mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou 3). Assim, fazendo as devidas substituições, chegamos a

$$\begin{aligned}
|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2 \\
&\Downarrow \\
|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 + 2|\cos\theta|\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| + |\vec{v}|^2 \\
&\leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}| + |\vec{v}|^2 \\
&\leq (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \tag{3.7}$$

Esta desigualdade é chamada de **Desigualdade Triangular**. Veja os exercícios (2 e 4).

3.3 Resumo

Nesta aula, conhecemos a definição de produto escalar (ou produto interno) entre vetores e suas propriedades. Além disso, verificamos que o uso do produto escalar entre dois vetores permite-nos encontrar o cosseno do ângulo entre eles. Definimos a projeção de um vetor sobre outro e a desigualdade triangular.

3.4 Atividades

1. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular:

   (a) $\langle 2\vec{u}, -\vec{v} \rangle$;

   (b) $\langle \vec{u} + 3\vec{v}, \vec{v} - 2\vec{u} \rangle$;

   (c) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle$;

   (d) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - \vec{u} \rangle$.

2. Verificar para os vetores $\vec{u} = (4, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-3, 2, -2)$ as seguintes desigualdades:

   (a) (Desigualdade de Schwarz) $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$;

   (b) (Desigualdade Triangular) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

3. Prove que $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$ para quaisquer vetores $\vec{u}\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

4. Prove as seguintes propriedades do comprimento (ou módulo) de um vetor.

   (a) $|\vec{v}| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = 0$;

   (b) $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$;

(c) $|\lambda\vec{v}| = |\lambda|\,|\vec{v}|$;

(d) $|-\vec{v}| = |\vec{v}|$.

5. Sabendo que $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $\frac{3}{4}\pi$, determine:

   (a) $|\langle 2\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}\rangle|$;

   (b) $|\vec{u} - 2\vec{v}|$.

6. Mostre que a definição de ângulo entre vetores pode ser obtida atravez da **lei dos cossenos** observando a figura (3.6).

[Lei dos Cossenos] Num triângulo cujos lados medem a, b, c vale a igualdade

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta,$$

sendo θ o ângulo entre os segmentos que medem b e c.

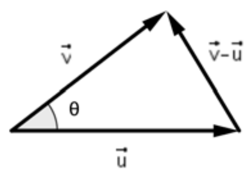


Figura 3.41: θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

3.5 Comentário das atividades

Se você conseguiu fazer as atividades 1,4 e 5, então entendeu a definição do produto escalar (ou produto interno) e de módulo de um vetor. Já as atividaes 2 e 3, se você as resolveu, tratam de importantes propriedades geométricas dos vetores e serão úteis nas disciplinas que virão mais adiante.

3.6 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.