2
LIVRO

6
AULA

O Plano

META

Apresentar a definição de equações de planos no espaço e suas propriedades geométricas.

OBJETIVOS

Identificar a equação do plano nas formas vetorial, paramétrica, simétricas e reduzidas.

Reconhecer as propriedades geométricas do paralelismo e perpendicularismo entre planos e entre planos e retas.

PRÉ-REQUISITOS

Saber identificar a equação da reta nas formas em que foram apresentadas na aula anterior e reconhecer as propriedades geométricas do paralelismo.

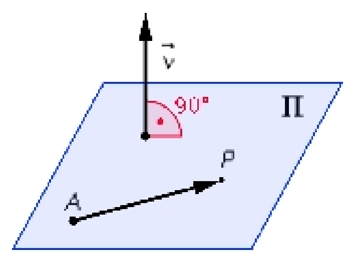
6.1 Introdução

Olá! Na aula passada, verificamos que é possível definir a equação vetorial da reta utilizando apenas um vetor e um ponto do plano. Além disso, aprendemos a representar a reta a partir da sua equação paramétrica, definir uma reta por dois pontos e um segmento parametrizado. Também foi possível conhecer as propriedades das retas.

O principal assunto a ser discutido nesta aula é o plano, que será estudado sobre o espaço tridimensional. Além disso, iremos conhecer as suas equações geral, vetorial e paramétrica, bem como suas propriedades.

6.2 Equação geral do plano

Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano Π e $\vec{v} = (a, b, c)$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, um vetor ortogonal ao plano.



Como $\vec{v} \perp \Pi$, $\vec{v}$ é **normal** (ortogonal) a todo vetor representado em Π, então um ponto $P = (x, y, z) \in \Pi$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{v}$, isto é,

$$\langle \vec{v}, P - A \rangle = 0 \tag{6.1}$$

ou $\langle (a, b, c), (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \rangle = 0 \Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$, ou ainda $ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$. Como

$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$ não depende de x, y ou z, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6.2}$$

Esta é a equação geral do plano Π.

Observação 9. 1. Como $\vec{v} = (a, b, c)$ é normal a Π, $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\lambda\vec{v}$ é também vetor normal ao plano.

2. Perceba que na equação (6.2) os coeficientes a, b, c são coordenadas do vetor normal ao plano $\vec{v} = (a, b, c)$.

3. Para determinar pontos do plano, basta que se atribua valores para duas de suas variáveis, deixando uma delas livre. Por exemplo, no plano de equação geral $2x - 3y + z - 1 = 0$ temos que se $x = 1$ e $y = 0$, então

$$z = -2x + 3y + 1 = -2(1) + 3(0) + 1 = -1,$$

portanto, o ponto $P = (1, 0, -1) \in \Pi$.

Veja ainda que:

- se $P = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$, tal que

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

,

dizemos que P é a **origem** do plano Π.

- Se o plano Π contém o ponto $(0, 0, 0)$, então a equação geral do plano será dada por

$$ax + by + cz = 0.$$

Pois $a(0) + b(0) + c(0) + d = 0 \Rightarrow d = 0$.

Exemplo 6.2.1. Qual é a equação geral da reta que passa pelo ponto $P = (1, 1, -1)$ e tem como vetor normal $\vec{u} = (2, -1, 3)$?

Como a equação geral do plano é dada por

$$ax + by + cz + d = 0,$$

temos que $2x + (-1)y + 3z + d = 0$, pois $\vec{u}$ é o vetor normal. E ainda,

$$2(1) - 1(1) + 3(-1) + d = 0 \Rightarrow d = 2,$$

portanto, a equação geral do plano que passa por $P = (1, 1, -1)$ e tem vetor normal $\vec{u}$ é $2x - y + 3z + 2 = 0$.

6.3 Equação vetorial e Equações paramétricas do plano

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano Π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores paralelos a Π, mas não parelalos entre si.

Para todo ponto $P \in \Pi$, os vetores $\overrightarrow{AP}, \vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto $P = (x, y, z) \in \Pi$ se, e somente se, existem $h, t \in \mathbb{R}$, tal que

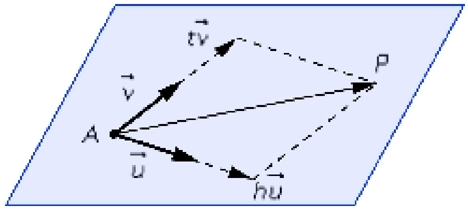
$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v},$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v},$$

ou ainda,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), \quad h, t \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$



A equação (6.1) é chamada de **equação vetorial** do plano Π e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os vetores diretores de Π.

A partir da equação 6.1), obtemos

$$\begin{cases} x &= x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 h + c_2 t, \quad h, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.2}$$

As equações (6.2) são conhecidas como **equações paramétricas** do plano Π, em que h e t são conhecidas como **parâmetros**.

Exemplo 6.3.1. O plano Π que passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 0)$ tem como equação vetorial

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + h(2, 1, -1) + t(2, -1, 0)$$

,

e sua equação paramétrica será dada por

$$\begin{cases} x &= 1 + 2h + 2t \\ y &= -1 + 1h - t \\ z &= 1 - h + (0)t, \quad h, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

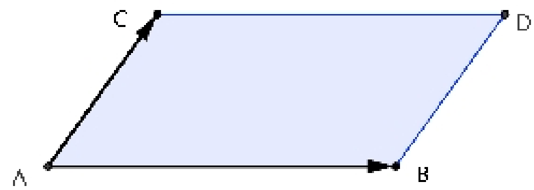
Exemplo 6.3.2 (Equação vetorial de um paralelogramo)**.** Dados os pontos A, B e C não em linha reta, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo cuja equação vetorial é

$$P = A + h(\overrightarrow{AB}) + t(\overrightarrow{AC})$$

ou

$$P = A + h(B - A) + t(C - A) \quad , \text{com} \quad h, t \in [0, 1], \qquad (6.3)$$

em que P representa um ponto qualquer desse paralelogramo.



6.4 Mais algumas propriedades

Definição 6.25 (Ângulos de dois Planos)**.** Sejam os planos Π_1 e Π_2, com vetores normais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Chama-se **ângulo de dois planos** o menor ângulo formado entre o vetor normal a Π_1 e o vetor normal a Π_2. Se θ for esse ângulo, então temos

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|} \quad \text{com} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad (6.1)$$

Exemplo 6.4.1. Veja os planos

$$\Pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0 \quad \text{e } \Pi_2 : x + y - 2 = 0$$

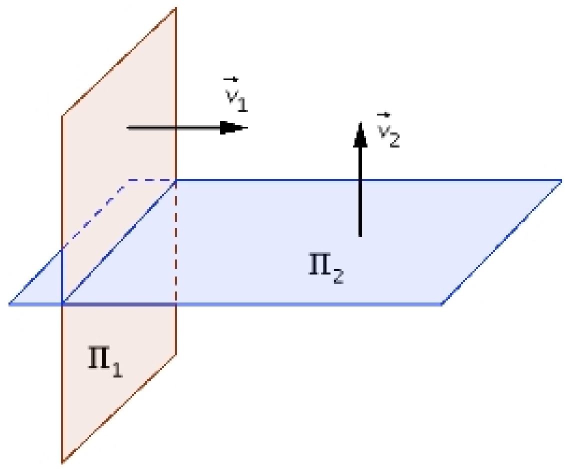
Sendo $\vec{v}_1 = (2, 1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ os vetores normais aos planos Π_1 e Π_2, respectivamente, e pela definição dada por (6.1), temos que

$$\cos\theta = \frac{|\langle (2, 1, -1), (1, 1, 0) \rangle|}{|(2, 1, -1)\,|(1, 1, 0)|} = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}}$$

Portanto, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \text{arc cos}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, e assim, sabendo que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, obtemos $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$.

Definição 6.26 (Planos Perpendiculares)**.** Consideremos dois planos, Π_1 e Π_2, e sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ seus respectivos vetores normais.

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0 \qquad (6.2)$$



Dados os planos

$$\Pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0 \quad \text{ e } \Pi_3 : x + 2z - 2 = 0$$

,

verificamos que eles são perpendiculares, pois $\langle (2,1,-1), (1,0,2) \rangle = 2(1) + 1(0) + (-1)(2) = 2 - 2 = 0$. Mas já os planos

$$\Pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0 \quad \text{ e } \Pi_2 : x + y - 2 = 0$$

,

como verificamos no exemplo (6.4.1), não são perpendiculares, pois o ângulo entre eles é $\theta = \dfrac{\pi}{6} \neq 0$.

Definição 6.27 (Paralelismo e Perpendicularismo entre Reta e Plano)**.** Seja r uma reta com a direção de $\vec{u}$ e um plano Ω com vetor normal $\vec{n}$, então temos que

$$r \parallel \Omega \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0 \qquad (6.3)$$

$$r \perp \Omega \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda \vec{n}, \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (6.4)$$

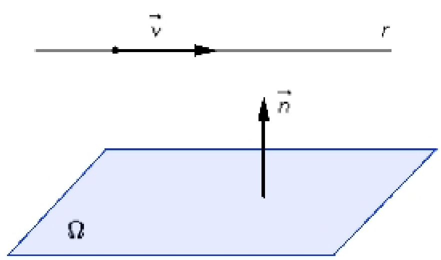


Figura 6.50: $r \parallel \Omega$

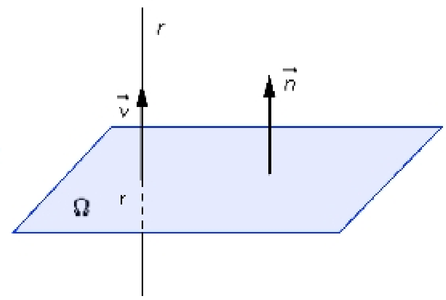


Figura 6.51: $r \perp \Omega$

Observação 10 (Reta Contida em Plano). Sejam r uma reta e Π um plano,$r \subset \Pi$ se:

- dois pontos $A, B \in r$ e também $A, B \in \Pi$.
- $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$, em que $\vec{v}$ é o vetor diretor de r, $\vec{n}$ o vetor normal a Π e o ponto A arbitrário, sendo $A \in r \cap \Pi$.

Exemplo 6.4.2. Dados a reta r e o plano Ω, determinar o valor de m para que $r \parallel \Omega$ (e para $r \perp \Omega$), a partir dos seguintes valores

$$r : \begin{cases} x = & -3 + t \\ y = & -1 + 2t \\ z = & 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad \Pi : mx - y - 2z - 3 = 0$$

Para isso, veja que $\vec{v} = (1, 2, 4)$ *é o vetor diretor de* r *e* $\vec{n} = (m, -1, -2)$ *é o vetor normal ao plano* Ω. *Assim, para que* $r \perp \Omega \Rightarrow \vec{v} = \lambda \vec{n}$

$$\Rightarrow (1, 2, 4) = \lambda(m, -1 -2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = & m\lambda \\ 2 = & (-1)\lambda \\ 4 = & (-2)\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Portanto, para que $r \parallel \Omega$*, deve-se ter que* $m = -\dfrac{1}{2}$*. No caso de* $r \perp \Omega \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$*, então,*

$$\langle (1,2,4),(m,-1,-2) \rangle = m+2(-1)+4(-2) = 0 \Leftrightarrow m-10 = 0 \Leftrightarrow m = 10.$$

Logo, $r \perp \Omega \Leftrightarrow m = 10$*.*

6.4.1 Interseção (entre planos e entre retas e planos)

Sejam os planos não paralelos Π e Ω. A interseção entre dois planos não paralelos é uma reta r cuja equação deseja-se determinar. Para tanto, como r está contida em $\Pi \cap \Omega$, as coordenadas de qualquer ponto $(x, y, z) \in r$ devem satisfazer as equações de Π e Ω

Exemplo 6.4.3. Sendo $\Pi : 5x-y+z-5 = 0$ e $\Omega : x+y+2z-7 = 0$, devemos encontrar valores para x, y e z, tal que obedeçam às equações

$$\begin{cases} 5x - y + z = & 5 \\ x + y + 2z = & 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = & 3x - 1 \\ z = & -2x + 4 \end{cases}$$

que são as equações reduzidas da reta r.

Exemplo 6.4.4. Para determinar o ponto de interseção da reta r com o plano Ω, em que

$$r : \begin{cases} x = & -1 + 2t \\ y = & 5 + 3t \\ z = & 3 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \Omega : 2x - y + 3z - 4 = 0,$$

observamos que qualquer ponto de r é dado por $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. E se um ponto da reta r também pertencer ao plano Ω, temos que

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow -2t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

E substituindo nas equações paramétricas da reta r:

$$\begin{cases} x = & -1+2(-1) \\ y = & 5+3(-1) \\ z = & 3-(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & -3 \\ y = & 2 \\ z = & 4 \end{cases}$$

Portanto, o ponto de interseção entre a reta r e o plano Ω é $(-3,2,4)$. Veja ainda que $2(-3)-(2)+3(4)-4 = -6-2+12-4 = 0$ $\Rightarrow (-3,2,4) \in \Omega$.

6.5 Resumo

Nesta aula, definimos a equação geral do plano e, como conseqüência, também definimos outras formas de representá-lo através de suas equações vetoriais e paramétricas. Abordamos algumas das suas propriedades, como o ângulo de dois planos e condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos. Além disso, aprendemos que a interseção entre dois planos é representada por uma reta contida em ambos.

6.6 Atividades

1. Obtenha uma equação para o plano que contém o ponto P e é perpendicular ao vetor que tem como extremos do pontos A e B nos seguintes casos:

   (a) $P = (0,0,0)$, $A = (1,2,3)$, $B = (2,-1,2)$;

   (b) $P = (1,1,-1)$, $A = (3,5,2)$, $B = (7,1,12)$;

   (c) $P = (3,3,3)$, $A = (2,2,2)$, $B = (4,4,4)$;

   (d) $P = (x_0,y_0,z_0)$, $A = (x_1,y_1,z_1)$, $B = (x_2,y_2,z_2)$.

2. Determine a equação geral dos seguintes planos:

   (a) paralelo ao plano $\Pi : 2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contenha o ponto $A = (4, -2, 1)$;

   (b) perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x = & 2 + 2t \\ y = & 1 - 3t \\ z = & 4t \end{cases}$$

   e que contenha o ponto $A = (-1, 2, 3)$.

3. Determine o valor de m para que seja de 30^o o ângulo entre os planos

$$\Pi_1 : x + my + 2z - 7 = 0 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : 4x + 5y + 3z + 2 = 0$$

4. Determine o valor de n, de modo que os planos

$$\Pi_1 : nx + y - 3z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : 2x - 3ny + 4z + 1 = 0$$

   sejam perpendiculares.

5. Sejam $A = (3, 1, 3)$, $B = (5, 5, 5)$, $C = (5, 1, -2)$ e $D = (8, 3, -6)$. Mostre que as retas AB e CD são concorrentes e encontre uma equação para o plano que as contém.

6. O plano Π contém o ponto $A = (a, b, c)$ e a distância da origem a Π é $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Encontre uma equação desse plano.

6.7 Comentário das atividades

Concluiu a atividade 1? Então entendeu a definição de Equação geral do plano. Se resolveu a questão 2, você trabalhou a definição de Equação paramétrica do plano. E as atividades 3 e 4, conseguiu encontrar um resultado satisfatório para elas? Em caso afirmativo, você entendeu o conceito de ângulo entre planos. Para resolver 5 e 6, é necessário ter utilizado os conceitos de retas contidas em um plano e interseção entre retas e planos.

6.8 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.