2
LIVRO

7
AULA

Distâncias

META

Demonstrar algumas fórmulas do cálculo de distância entre pontos, ponto e reta, retas, planos, reta e plano; além das formas de obtê-las.

OBJETIVOS

Identificar as fórmulas do cálculo de distância entre pontos, ponto e reta, retas, planos, reta e plano; além da forma de obtê-las.

PRÉ-REQUISITOS

É necessário que tenha apreendido a identificar a equação do plano nas formas vetorial, paramétrica, simétrica e reduzidas. Além disso, é fundamental reconhecer as propriedades geométricas do paralelismo e perpendicularismo entre planos e entre planos e retas .

7.1 Introdução

Olá! Esperamos que os conteúdos apresentados até agora tenham sido produtivos para você. Na aula passada, definimos a equação geral do plano e outras formas de representá-lo, através das equações vetoriais e paramétricas do plano. Além disso, pudemos observar algumas propriedades do plano, como o ângulo de dois planos e as condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos. Verificamos também que a intersecção entre dois planos é representada por uma reta contida em ambos. Nesta aula, munidos dos conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores, conheceremos as distâncias entre objetos geométricos que já nos são familiares, ou seja, distância entre pontos, retas e planos.

7.2 Distância de ponto à reta

Na Aula 3, já nos foi apresentada a definição de distância entre dois pontos. Agora, queremos encontrar a distância de um ponto a uma reta. Assim, considere numa reta r um ponto A e um vetor diretor $\vec{v}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância $d(P, r)$. A área desse paralelogramo é dada por

$$\text{Área} = |\vec{v}| \cdot d \;\text{ ou também,} \tag{7.1}$$

$$\text{Área} = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}| \tag{7.2}$$

Comparando as equações (7.1) e (7.2), percebemos que

$$d = d(P, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} \tag{7.3}$$

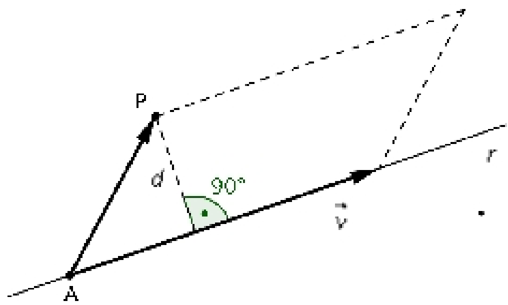


Figura 7.52: $d = \dfrac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$

Exemplo 7.2.1. Dados o ponto $P = (1, -1, 1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases},$$

qual é a distância entre eles?

Para respondermos a esta pergunta, consideremos a reta r que passa pelo ponto $A = (0, 0, 2)$ (para este ponto, $t = 0$) e seu vetor diretor $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Seja ainda o vetor $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, -1, -1)$. Assim,

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0)$$

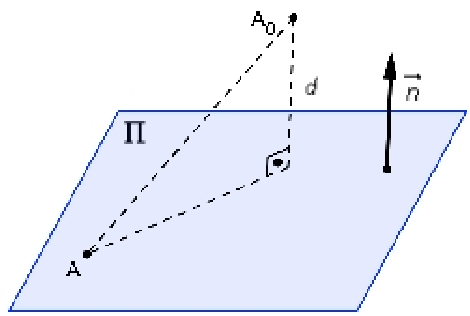
$$\Rightarrow d(P, r) = \frac{|(1, 1, 0)|}{|(1, -1, 0)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\text{u. c.}$$

7.3 Distância de ponto a plano

Agora você já sabe como encontrar a distância de um ponto a uma reta. O que achou disso? Foi difícil acompanhar o nosso raciocínio?

Esperamos que não tenha tido maiores dificuldades. Uma vez que você superou esta primeira fase, vamos verificar como se encontra a distância de um ponto a um plano.

Dados um ponto qualquer A_0 no espaço (de preferência, não pertencente ao plano), um ponto A pertencente a um plano Π e seja $\vec{n}$ um vetor normal a Π, a distância $d(A_0, \Pi)$ é o módulo da projeção de $\overrightarrow{AA_0}$ na direção de $\vec{n}$.



De fato, como ilustramos na figura (7.3), percebemos que

$$d(A_0, \Pi) = \left|\text{proj}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{AA_0}\right| = \left|\langle \overrightarrow{AA_0}, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\rangle\right| \tag{7.1}$$

Supondo $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ e $A = (x_1, y_1, z_1) \in \Pi$, e sendo

$$\overrightarrow{AA_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \quad \text{e} \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

pela equação (7.1), temos

$$d(A_0, \Pi) = \left|\langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1), \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\rangle\right|$$

$$\Downarrow$$

$$d(A_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - by_1 - cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Mas como $A = (x_1, y_1, z_1) \in \Pi$ e $\Pi : ax + by + cz + d = 0$, significa que

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

e assim,

$$d(A_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{7.2}$$

é a **distância de um ponto** A_0 **a um plano** Π.

Exemplo 7.3.1. Qual a distância entre o ponto $A_0 = (2, -1, 2)$ e o plano $\Omega : 2x - 2y - z + 3 = 0$?

Veja que

$$d(A_0, \Omega) = \frac{|2(2) - 2(-1) - 1(2) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{3}$$

Portanto, a distância entre o ponto A_0 *e o plano* Ω *é de* $7/3$ *u.c.*

.

Exemplo 7.3.2. Dados a reta

$$r : \begin{cases} y = & 2x + 3 \\ z = & 2x + 1 \end{cases}$$

e o plano $\Pi : 4x - 4y + 2z - 7 = 0$, vamos determinar a distância entre eles.

Para isso, observamos primeiro que

$$\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = \langle (1, 2, 2), (4, -4, 2) \rangle = 4 - 8 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; r \parallel \Pi,$$

em que $\vec{v} = (1, 2, 2)$ *é o vetor diretor de* r *e* $\vec{n} = (4, -4, 2)$ *é o vetor normal ao plano* Π. *Sendo* A *um ponto qualquer de* r*, neste caso iremos tomar* $x = 0$ *e assim,* $A = (0, 3, 1) \in r$. *Então,*

$$d(A, \Pi) = \frac{|4(0) - 4(3) + 2(1) - 7|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{17}{\sqrt{36}} = \frac{17}{6}$$

Logo, a distância entre a reta r *e o plano* Π *é* $17/6$ *u.c.* .

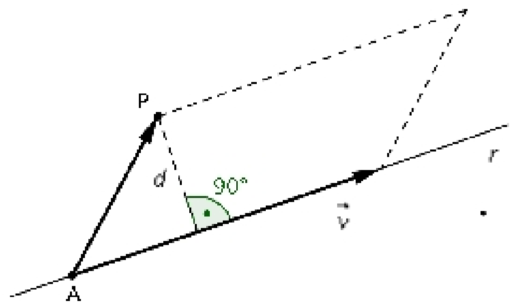


Figura 7.53: d é obtido de forma análoga na figura (7.52), porém, no plano.

7.3.1 Distâncias de ponto à reta no plano

Para encontrar a distância de um ponto A_0 a uma reta r no plano, devemos proceder de forma similar à utilizada na seção anterior.

Dados um ponto qualquer A_0 no plano (de preferência, não pertencente à reta r), um ponto A pertencente à reta r e seja $\vec{v}$ um vetor diretor de r, a distância $d(A_0, r)$ é o módulo da projeção de $\overrightarrow{AA_0}$ na direção de $\vec{v}$. Analogamente ao que foi feito anteriormente,

veja que

$$d(A_0, r) = \left|\text{proj}_{\,\vec{v}}\,\overrightarrow{AA_0}\right| = \left|\langle \overrightarrow{AA_0}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\rangle\right| \tag{7.3}$$

Supondo $A_0 = (x_0, y_0)$, $r : ax + by + c = 0$ e $A = (x_1, y_1) \in r$, e sendo

$$\overrightarrow{AA_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \quad \text{e} \quad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

pela equação (7.3) temos

$$d(A_0, r) = \left|\langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1), \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\rangle\right|$$

$$\Downarrow$$

$$d(A_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Mas como $A = (x_1, y_1) \in r$ e que $r : ax + by + c = 0$, significa que

$$c = -ax_1 - by_1$$

e assim,

$$d(A_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7.4}$$

Esta é a **distância de um ponto A_0 a uma reta r no plano**.

Exemplo 7.3.3. Qual é a distância entre o ponto $A_0 = (1, 2)$ e a reta $r : y = x - 1$?

Perceba que $y = x + 1 \Rightarrow -x + y + 1 = 0$. Assim, se $\vec{v} = (1, -1)$ é o vetor diretor de r, considerando que $x = 1$, temos que $y = 1 - 1 = 0$ e, portanto, $A = (1, 0)$. Então

$$d(A_0, r) = \frac{|-1(1) + 1(2) + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a distância entre o ponto A_0 e a reta r é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento.

7.4 Distância entre duas retas

Dadas a retas r_1 e r_2, com respeito à distância entre elas, temos:

(i) r_1 e r_2 são retas **concorrentes**,

$$d(r_1, r_2) = 0.$$

(ii) r_1 e r_2 são retas **paralelas**, neste caso:

(a) $d(r_1, r_2) = d(P, r_2)$, com $P \in r_1$;

(b) $d(r_1, r_2) = d(P, r_1)$, com $P \in r_2$.

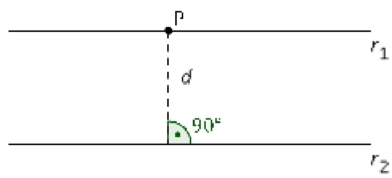


Figura 7.54: $r_1 \parallel r_2$

(iii) r_1 e r_2 são retas **reversas**. Sejam r_1 a reta definida pelo ponto A_1 e pelo vetor diretor $\vec{v}_1$ e a reta r_2 a reta definida pelo ponto A_2 e pelo vetor diretor $\vec{v}_2$. Os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são coplanares,e assim determinam um paralelepípedo cuja altura é a distância $d(r_1, r_2)$.

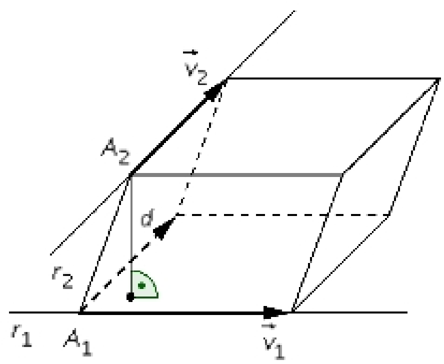


Figura 7.55: r_1 e r_2 são retas reversas.

Lembre-se de que o volume V do paralelogramo é dado por

$$V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| \cdot d \tag{7.1}$$

ou ainda,

$$V = |(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1, A_2})| \tag{7.2}$$

e assim,

$$d = d(r_1, r_2) = \frac{\left|(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})\right|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \tag{7.3}$$

Exemplo 7.4.1. Calcular a distância entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = & 2 - t \\ y = & 3 + t \\ z = & 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = & t \\ y = & -1 - 3t \\ z = & 2t \end{cases}$$

Na reta r_1, tomamos o ponto $A_1 = (2, 3, 1)$ (quando $t = 0$ em r_1) e o vetor diretor $\vec{v}_1 = (-1, 1, -2)$, enquanto que em r_2, tomamos o ponto $A_2 = (0, 1, 0)$ (quando $t = 0$ em r_2) e o vetor diretor $\vec{v}_2 = (1, -3, 2)$. Assim, $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (-2, -2, -1)$ e

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

e ainda temos que

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-4, 0, 2)$$

Usando a definição para a distância entre duas retas dadas em (7.3), obtemos

$$d(r_1, r_2) = \frac{|6|}{|(-4, 0, 2)|} = \frac{6}{\sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Portanto, a distância entre as retas r_1 e r_2 é $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ u.c. .

7.5 Resumo

Inspirados na definição de distância entre dois pontos, nesta aula, conhecemos uma forma de encontrar a distância entre ponto e reta e expandimos os nossos estudos para a distância entre ponto e plano. Além disso, abordamos algumas possibilidades de calcular a distância entre retas.

7.6 Atividades

1. Achar a distância de P_1 a P_2 nos casos a seguir:

   (a) $P_1 = (-2, 1)$ e $P_2 = (1, 2)$;

   (b) $P_1 = (-2, 0, 1)$ e $P_2 = (1, -3, 2)$;

   (c) $P_1 = (1, 0, 1)$ e $P_2 = (2, -1, 0)$.

2. Achar a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos.

   (a) $P = (1, -1)$ e $r : 2x - y + 1 = 0$;

   (b) $P = (2, 3, -1)$ e $r : \begin{cases} x = & 3 + t \\ y = & -2t \\ z = & 1 - 2t \end{cases}$;

   (c) $P = (1, -1, 0)$ e $r : \begin{cases} x = & 2 - t \\ y = & 0 \\ z = & t \end{cases}$;

3. Qual é a distância da origem à reta $5x - 2y = 8$?

4. Qual é o raio da circunferência que tem centro no ponto $P = (4, 1)$ e é tangente à reta $3x + 7y - 2 = 0$?

5. Achar a distância do ponto $P = (3, -1, 4)$ ao plano $\Pi : x + y + z = 0$.

6. Qual é o ponto do plano $\Pi : 2x - 3y + z - 5 = 0$ mais próximo do ponto $P = (1, 3, 1)$?

7. Calcular a distância entre os dois planos paralelos a seguir:

$$\Pi_1 : x + y + z - 4 = 0 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : 2x + 2y + 2z - 5 = 0$$

8. Qual a distância entre as retas $r : \begin{cases} x = & 3 + t \\ y = & 2 - 2t \\ z = & 1 - 2t \end{cases}$ e o eixo$-z$?

7.7 Comentário das Atividades

Você conseguiu concluir a atividade 1? Então entendeu a definição de distância entre dois pontos. E as questões 2,3 e 4? Se conseguiu resolvê-las, então entendeu a definição de distância entre ponto e reta. As atividades 5, 6 e 7, se as resolveu, então você entendeu a definição da distância entre ponto e plano. Quanto à atividade 8, você deve ter usado a definição de distância entre retas para resolvê-la.

7.8 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo, Makron Books, 1987.
LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.