2
LIVRO

8
AULA

Cônicas - Parte I

META

Introduzir a definição de parábola e suas propriedades.

OBJETIVOS

Identificar a parábola no plano. Comparar algumas formas de representar a parábola no plano com base nas suas equações reduzidas e equações paramétricas.

PRÉ-REQUISITOS

Para que você possa ter um bom desempenho nesta aula, é necessário que tenha apreendido os conteúdos das aulas anteriores, desde a primeira até a sétima.

8.1 Introdução

Olá! Como estão as suas leituras? Está se dedicando bastante aos conteúdos de nossas aulas? Esperamos que sim. É sempre bom lembrar que há um tutor a sua disposição para esclarecer as dúvidas. Não se esqueça disso. Então, vamos em frente!

Na aula passada, conhecemos uma forma de encontrar a distância entre ponto e reta e entre ponto e plano. Além disso, também aprendemos a calcular a distância entre retas.

Você já deve ter visto ou ouvido falar de cônicas ou de elipses, parábolas e hipérboles, não é? Bem, nesta aula iremos introduzir não só a definição de cônicas mas também algumas propriedades importantes da parábola.

Porém, antes de iniciarmos nossos estudos sobre as cônicas, vamos fazer uma breve viagem no tempo para sabermos um pouquinho mais sobre o começo de tudo isso.

8.2 Um pouco de História

Os estudos sobre as cônicas tiveram início, segundo o matemático grego Pappus de Alexandria (290-350 a.C.), com o geômetra grego Aristeu, "o Ancião"(370 - 300 a.C.). De acordo com Papus, Aristeu foi o primeiro a publicar um tratado sobre as seções cônicas, que recebeu o nome de Cinco livros sobre seções cônicas, e cujo conteúdo versava sobre um estudo minucioso das curvas cônicas e de suas propriedades.

Contemporâneo de Aristeu e conhecedor de sua obra sobre as cônicas, Arquimedes de Alexandria (325 - 265 a. C.) não procurou aprofundar seus estudos sobre este assunto em sua obra Os elementos com o intuito de despertar nos estudiosos o interesse pela leitura dos escritos originais.

Cerca de duzentos anos mais tarde, o astrônomo e matemático grego, Apolônio de Perga (262 - 190 a. C.), aprimorou os estudos sobre essas curvas escrevendo o Tratado sobre as cônicas, em que as definia como seções de um cone de base circular, elipse, parábola e hipérbole. Esse tratado representa o ponto máximo alcançado pela Matemática grega por ser motivo de admiração a maestria com que Apolônio demonstra centenas de teoremas, recorrendo aos métodos puramente geométricos de Euclides.

Entretanto, existem algumas controvérsias a respeito desses matemáticos quanto à descoberta das cônicas. Os estudos historiográficos dão a outro matemático grego, Menaecmus (380 - 320 a.C, aproximadamente), o prodígio de tê-las descoberto ao tentar resolver três problemas famosos da Geometria grega: a trisseção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Quanto à obtenção destas curvas, isto é, das cônicas, também houve divergência entre Menaecmus e Apolônio. O primeiro julgava que elas eram obtidas por meio de cortes efetuados sempre em ângulo reto em relação à superfície do cone; enquanto o segundo acreditava que os quatro gêneros de curvas eram obtidos através do corte de um mesmo cone sob diferentes ângulos.

8.3 Conceituando as cônicas

Agora que você já leu um pouco sobre a origem das cônicas, preparese para seguir em frente, pois nesta seção vamos conceituá-las.

Sejam e e g retas concorrentes no ponto O e não perpendiculares. Deixando a reta e fixa e fazendo a reta g girar 360^o em torno de e, tal que o ângulo entre as retas e e g seja constante, a reta g gera uma superfície conhecida como *superfície cônica circular* infinita constituída por duas folhas separadas pelo vértice O.

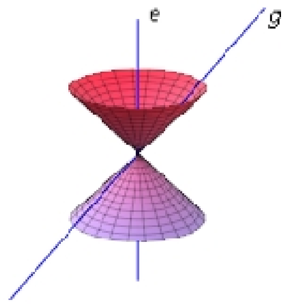


Figura 8.56: e (eixo), g (reta geratriz)

Definição 8.28. A reta g é chamada **geratriz** da superfície cônica e a reta e, **eixo** da superfície.

Definição 8.29. Chamamos de **seção cônica**, ou simplesmente **cônica**, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

Quando uma seção cônica é seccionada por um plano que não passa pelo ponto O, podemos obter as seguintes curvas cônicas.

PARÁBOLA - se o plano for paralelo a uma geratriz da superfície.

ELIPSE - se o plano não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície (ou uma circunferência, se o plano que secciona for perpendicular ao eixo).

HIPÉRBOLE - se o plano que secciona não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície. A hipérbole deve ser vista como uma curva só, construída a partir de dois ramos, um em cada folha da superfície.

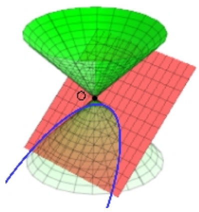


Figura 8.57: Parábola.

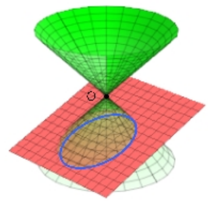


Figura 8.58: Elipse.

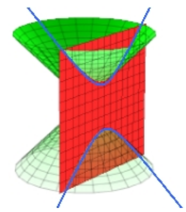


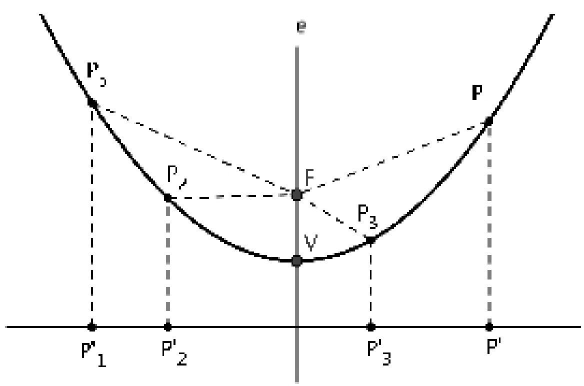
Figura 8.59: Hipérbole.

Começaremos nossos estudos pela parábola.

8.4 Parábola

Definição 8.30. Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistante de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Em outros termos, considere uma reta d e um ponto F não pertencente a essa reta.



Um ponto P qualquer pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, d),$$

ou equivalentemente,

$$d(P, F) = d(P, P')$$

em que P' é o ponto que está no pé da perpendicular baixada de P sobre a reta d.

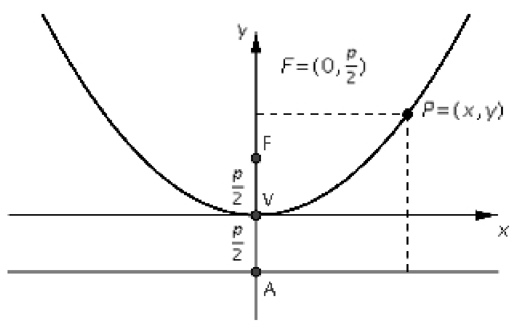
Agora, é importante que você compreenda o que representa cada ponto ou reta.

<u>NOTAÇÃO</u> **:**

Considere a parábola de vértice $V = (0, 0)$.

(i) O eixo da parábola é o eixo$-y$**.**

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F = (0, \frac{p}{2})$ e diretriz de equação $y = -p/2$.



Pela definição da parábola, temos que

$$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{P'P}$$

Sendo $P' = (x, -\frac{p}{2}) \in d$, temos a seguinte igualdade

$$\left|\left(x-0, y-\frac{p}{2}\right)\right| = \left|\left(x-x, y+\frac{p}{2}\right)\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4} = y^2+py+\frac{p^2}{4}$$

e assim,

$$\boxed{x^2 = 2py} \qquad (8.1)$$

que é a **equação reduzida da parábola**.

Observação 11.

- $p \neq 0$ é chamado de **parâmetro** da parábola.
- Com base na equação (8.1), podemos deduzir que:

  - se $py \geq 0$, p e y têm o mesmo sinal;

  - se $p > 0$, a parábola tem abertura (concavidade) para cima;

  - se $p < 0$, a abertura (concavidade)é voltada para baixo.

- O gráfico da parábola é simétrico em relação ao eixo$-y$, pois se um ponto pertence ao gráfico (x, y), então o ponto $(-x, y)$ também pertence a ele.

(ii) O eixo da parábola é o eixo$-x$.

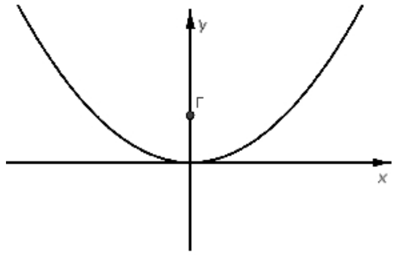


Figura 8.60: $y > 0$, $p > 0$

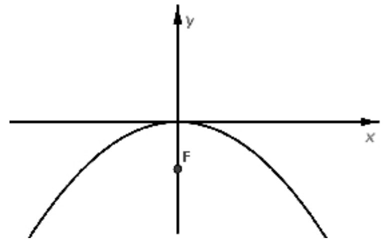


Figura 8.61: $y < 0$, $p < 0$.

Sendo $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola, com foco $F = (p/2, 0)$ e diretriz $x = -p/2$, obtemos, analogamente ao item (i), a equação reduzida

$$y^2 = 2px \tag{8.2}$$

Da mesma forma, podemos verificar que se $p > 0$, a parábola tem

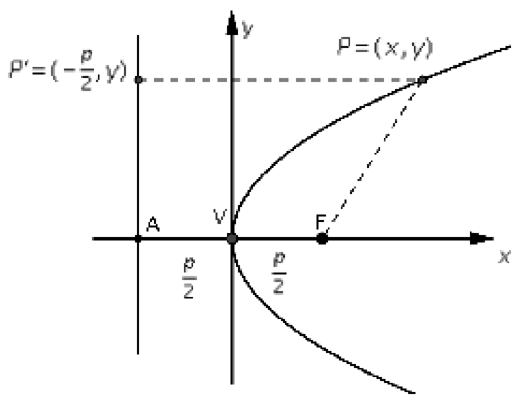


Figura 8.62: $y^2 = 2px$

abertura (concavidade) para a direita, e se $p < 0$, para a esquerda.

Exemplo 8.4.1. Na parábola $y = x^2/4$, construir o gráfico e encontrar o foco e a reta diretriz.

Perceba que a partir de $y = x^2/4 \Rightarrow x^2 = 4y$, verificamos que

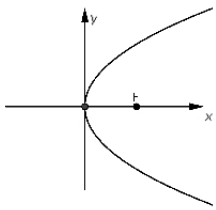


Figura 8.63: $x > 0$, $p > 0$

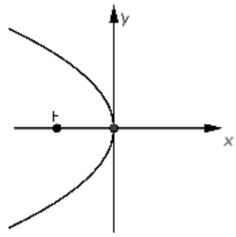
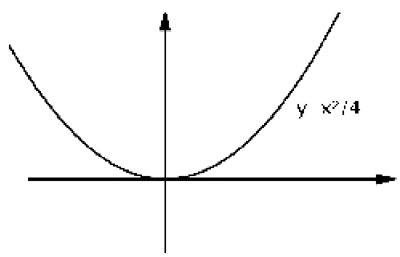


Figura 8.64: $x < 0$, $p < 0$.

$2p = 4$, *ou seja,* $p = 2 \Rightarrow \dfrac{p}{2} = 1$. *Portanto, o foco* $F = (0, 1)$ *e a reta diretriz são dados por* $d : y = -1$.



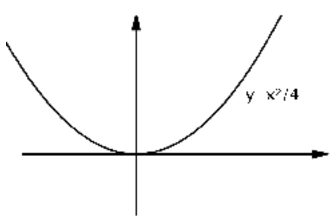


Figura 8.65: $y = x^2/4$.

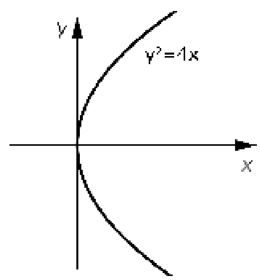
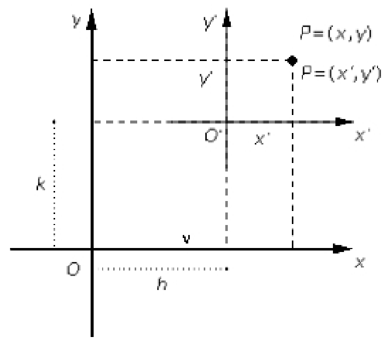


Figura 8.66: $y^2 = 4x$ cujo vértice $V = (0, 0)$ e foco $F = (1, 0)$

8.5 Translação dos eixos

Representamos o ponto $O = (0, 0)$ como a origem do sistema cartesiano de eixos (plano$-xy$), considerando $O' = (h, k)$ um ponto arbitrário no plano. Com base nisso, podemos construir um novo sistema de coordenadas $x'y'$, de forma que $P = (x', y') \in$ plano $- xy$.



Para construirmos outro sistema, necessitamos de:

$$\begin{aligned} x &= x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k \quad \text{ou} \\ x' &= x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k \end{aligned} \tag{8.1}$$

que são as **fórmulas de translação**.

Consideremos, agora, uma parábola cujo vértice seja $V = (h, k) \neq (0, 0)$ e cujo eixo seja paralelo ao eixo$-y$.

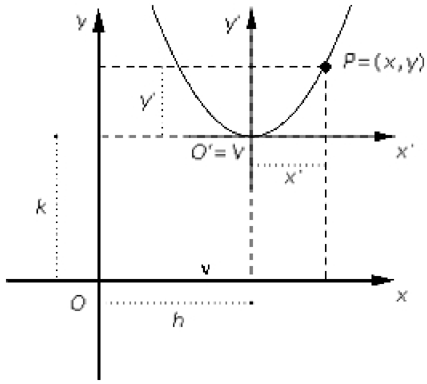
Como o vértice é $V = (h, k)$, iremos considerar um outro sistema de coordenadas cuja origem seja $O' = V$ e a parábola tenha a equação reduzida

$$x'^2 = 2py'$$

. Fazendo a mudança de coordenadas indicada pelas equações (14.98) com

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

,



obtemos

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \tag{8.2}$$

De maneira análoga ao que demonstramos anteriormente, encontramos

$$(y-k)^2 = 2p(x-h) \tag{8.3}$$

Observação 12. Em ambas as equações de parábola transladadas (8.2 e 8.3), o parâmetro p obedece às mesmas condições da observação (11).

Com base na equação (8.2), podemos ainda constatar que se a desenvolvermos como se segue

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \Rightarrow x^2-2hx+h^2 = 2py-2pk \Rightarrow x^2+(-2h)x+(2p)y+(-2pk+h^2) = 0$$

, podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$ax^2 + cx + dy + f = 0, \quad a \neq 0 \tag{8.4}$$

Analogamente para o caso da equação (8.3), temos

$$by^2 + cx + dy + f = 0, \quad b \neq 0 \tag{8.5}$$

Exemplo 8.5.1. Seja $V = (1, -2)$ o vértice de uma parábola cujo eixo é paralelo ao eixo$-y$ e com parâmetro $p = 2$. Para determinar a equação da parábola, iremos usar a equação dada por (8.2), e assim, a equação tem a forma

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

Fazendo $h = 1$ e $k = -2$, temos

$$(x-1)^2 = 2(2)(y+2) \quad \text{ou} \quad (x-1)^2 = 4(y+2)$$

Podemos ainda reescrever a mesma equação para

$$x^2 - 2x + 1 = 4y + 8 \quad \text{ou}$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \tag{8.6}$$

em que a equação (8.6) é a equação geral desta parábola.

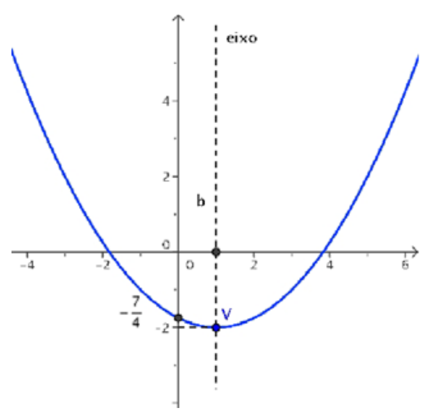


Figura 8.67: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

Este exemplo nos conduz a retomar a equação (8.4) e a reescrevê-la como

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \text{ sendo } a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{8.7}$$

ou para a equação (8.5), temos analogamente

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0 \text{ sendo } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{8.8}$$

As equações (8.7) e (8.8) são chamadas de **equações explícitas** da parábola.

Considerando a equação reduzida da parábola cujo eixo é o dos y, $x^2 = 2py$, e fazendo $x = t$, teremos

$$y = \frac{1}{2p}t^2.$$

Definição 8.31. Equações Paramétricas

- As equações paramétricas da parábola com vértice $V = (0, 0)$ e o eixo da parábola, sendo o eixo$-y$, são dadas por

$$\begin{cases} x = & t \\ y = & \dfrac{1}{2p}t^2, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8.9}$$

- Para o caso em que o vértice seja $V = (0, 0)$ e o eixo da parábola seja o eixo$-x$, as equações paramétricas são dadas por

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = & t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8.10}$$

De forma similar, podemos obter as equações paramétricas nos casos em que o vértice da parábola não seja a origem do plano$-xy$.

Exemplo 8.5.2. Seja a equação da parábola dada por $(x + 2)^2 = 2(y - 3)$, vamos encontrar sua equação paramétrica. Para isso, façamos

$$x + 2 = t \;\Rightarrow\; x = t - 2 \;\Rightarrow\; t^2 = 2(y - 3)$$

ou $t^2 = 2y - 6$ e

$$y = \frac{t^2+6}{2}$$

Deste modo, o sistema

$$\begin{cases} x = & t-2 \\ y = & \dfrac{t^2+6}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

são as equações paramétricas dessa parábola. É fundamental você perceber, ainda, que se fizermos a substituição de $x = t - 2$ (ou seja, $t = x + 2$) e de $y = \dfrac{t^2+6}{2}$, teremos a seguinte equação:

$$y = \frac{(x+2)^2+6}{2} \Rightarrow (x+2)^2 = 2(y-3),$$

que é a equação cartesiana dada no início.

8.6 Resumo

Nesta aula, apresentamos a você as curvas cônicas. Conhecemos um pouco mais sobre a parábola e suas propriedades, além de algumas maneiras de a representarmos, como a equação reduzida e a equação paramétrica da parábola.

8.7 Atividades

1. Trace um esboço do gráfico e obtenha uma equação da parábola que satisfaça as condições dadas.

   (a) vértice: $V = (0, 0)$; diretriz d: $y = -2$;

   (b) foco: $F = (2, 0)$; diretriz d: $x + 2 = 0$;

   (c) foco: $F = \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$; diretriz d: $4y - 1 = 0$.

2. Determine a equação reduzida, o vértice, o foco, uma equação da diretriz e uma equação do eixo da parábola das equações dadas. Esboce o gráfico dessas equações.

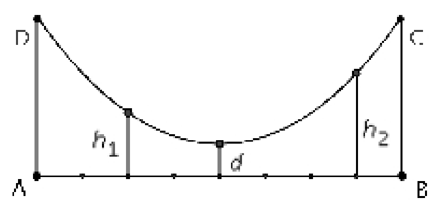
   (a) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$;

   (b) $y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$;

   (c) $y = 4x - x^2$.

3. Determine uma equação da curva gerada por um ponto que se move de modo que sua distância ao ponto $A = (-1, 3)$ seja igual a sua distância à reta $y + 3 = 0$.

4. O arco DC (como ilustrado abaixo) é parabólico e o segmento AB está dividido em 8 partes iguais. Sabendo que $d = 10m$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 50m$ e $\overline{AB} = 80m$, determine h_1 e h_2.



5. Dados os sistemas de equações paramétricas a seguir, mostre que eles representam parte de uma mesma parábola, esboçando o gráfico.

$$\begin{cases} x = & \sqrt{2t} \\ y = & t + 3, \quad t \in [0, 8] \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = & -t \\ y = & \dfrac{t^2}{2} + 3, \quad t \in [-4, 0], \end{cases}$$

8.8 Comentário das atividades

Se você entendeu a definição da parábola e seus componentes, então deve ter resolvido as atividades 1,3 e 4. Já na atividade 2, você trabalhou com a obtenção de equações reduzidas das parábolas e alguns de seus componentes (foco, vértice, equação da diretriz e equação do eixo da parábola). Se você conseguiu resolver a questão 5, então já deve ter entendido como se apresentam as equações paramétricas da parábola. Qualquer dúvida a respeito da resolução dessas atividades, procure o tutor de seu pólo.

8.9 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.