2

LIVRO

9

AULA

Cônicas - Parte II

META

Apresentar a definição de equações de planos no espaço e suas propriedades geométricas direcionadas à elipse

OBJETIVOS

Identificar a elipse no plano.

Comparar ou diferenciar algumas formas de representar a elipse com base em suas equações reduzidas e paramétricas.

PRÉ-REQUISITOS:

Para que você possa ter um bom desempenho nesta aula, é necessário que tenha assimilado os conteúdos das aulas anteriores, desde a primeira até a sétima.

9.1 Introdução

Olá, caro aluno! Está animado para seguir em frente? Então, vamos lá.

Na aula passada,transitamos pelas curvas cônicas, conhecemos um pouco mais sobre a parábola e suas propriedades. Também aprendemos algumas formas de representação para a parábola, através da equação reduzida e da paramétrica.

Nesta aula, vamos dar continuidade ao conteúdo da Aula 8 e conheceremos a elipse e suas propriedades. Também aprenderemos como é possível representar elipses por equação reduzida e paramétrica.

9.2 Elipse

Definição 9.32. [ELIPSE] Uma elipse de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P no plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante, que indicaremos com $2a$.

Portanto, o ponto P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \tag{9.1}$$

<u>NOTAÇÃO</u> :

Da figura (9.2), fica claro que $B_2F_2 = a$, pois $\overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a$ (pela definição de elipse) e $B_2F_1 = B_2F_2$. Portanto, no triângulo B_2CF_2 temos

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{9.2}$$

A excentricidade é responsável pela "forma" da elipse:

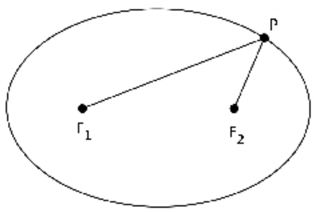


Figura 9.68: Uma elipse de focos F_1 e F_2.

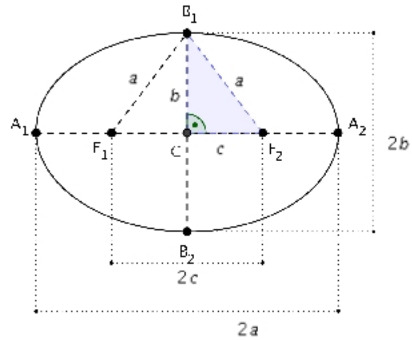


Figura 9.69: Vértices e eixo de uma elipse.

- quando a excentricidade é próxima de zero, as elipses são aproximadamente circulares;

- mas se a excentricidade é próxima de 1 (um), as elipses são "achatadas".

Porém, fixada uma excentricidade, por exemplo, $e = 1/3$, todas as infinitas elipses têm a mesma forma, diferenciando-se apenas pelo tamanho.

O astrônomo alemão, *Johann Kepler* (1571-1630), instituiu (empiricamente) 3 leis que regem a dinâmica de corpos celestes. A primeira delas diz que: "*Qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, na qual o Sol ocupa um dos focos*". Vejamos as excentricidades de alguns corpos celestes do nosso Sistema Solar:

Corpo Celeste	Excentricidade
Terra	0,02
Júpter	0,05
Marte	0,09
Mercúrio	0,21
Plutão	0,25
Cometa Halley	0,967

No caso do cometa Halley, sua excentricidade é quase 1 e por isso ele leva aproximadamente 76 anos para dar uma volta em torno do Sol.

9.3 Equação reduzida

Agora que você já estudou a definição da elipse e também teve acesso às partes que a compõem, além de conhecer um pouco sobre a excentricidade, vamos apresentar outra possibilidade de representação dessa cônica, isto é, a equação reduzida.

Seja a elipse de centro $C = (0, 0)$. Iremos considerar dois casos:

(i) O eixo maior está sobre o eixo$-x$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da elipse com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Pela definição (9.1), sabemos que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad \text{ou} \quad |\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

Já em coordenadas, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2+2cx+c^2 = 4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2cx+c^2$$

$$\Downarrow$$

$$a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} = a^2 - cx$$

Elevando ao quadrado ambos os membros mais uma vez,teremos

$$a^2\left(x^2+y^2-2cx+c^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Downarrow$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Downarrow$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

e pela equação (9.2), temos que $a^2 - c^2 = b^2$, assim,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Portanto, se agora dividirmos ambos os membros por a^2b^2, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9.1}$$

que é a **equação reduzida** da elipse para este caso.

(ii) O eixo maior está sobre o eixo$-y$.

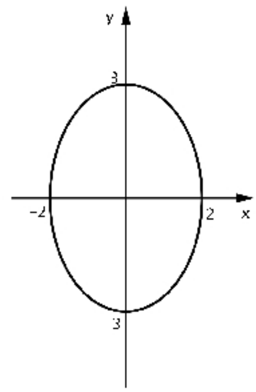
Com o mesmo procedimento do caso **(ii)**, obteremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{9.2}$$

Observação 13. Para sabermos onde está o maior eixo da elipse (se está sobre o eixo$-x$ ou sobre o eixo$-y$), basta observarmos qual o maior denominador (a^2) na sua equação reduzida, pois numa elipse sempre se considera que $a > b$ (ou $a^2 > b^2$). Por exemplo, na equação reduzida

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

o maior denominador é 9. E pelo fato de ser o denominador de y^2, isso significa que o eixo maior está sobre o eixo$-y$.



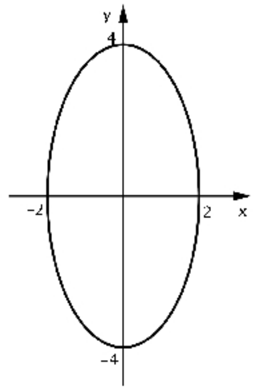
Exemplo 9.3.1. Veja a equação da elipse dada por $4x^2+y^2-16 = 0$, temos que na forma reduzida fica da seguinte forma

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como o maior denominador é 16, as medidas dos semi-eixos são $a = 4$ e $b = 2$. De $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 4 + c^2$ e assim, $c^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12}$. Portanto, os focos são $F_1 = (0, -\sqrt{12})$ e $F_2 = (0, \sqrt{12})$. Em relação à excentricidade, podemos dizer que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



9.4 Translação da elipse

Na seção anterior, estudamos a equação reduzida da elipse em duas situações:

- (a) quando o eixo maior está sobre o eixo $-x$;
- (b) quando o eixo maior está sobre o eixo $-y$.

Nesta seção, vamos estudar a translação dessa cônica, considerando a relação de paralelismo entre a elipse e os eixos $-x$ e $-y$

Seja uma elipse de centro $C = (h, k) \neq (0, 0)$. Iremos considerar apenas os casos em que os eixos da elipse sejam paralelos aos eixos coordenados.

(i) O eixo maior é paralelo ao eixo$-x$.

Nossa intensão será de obter um novo sistema de coordenadas $x'Oy'$, em que a elipse tem o semi-eixo maior sobre o eixo$-x'$. Portanto, sua equação reduzida é

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Para isso, utilizamos as seguintes fórmulas de translação

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

através das quais, fazendo as devidas substituições, temos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (9.1)$$

que é a forma padrão para este caso. (Veja a figura 9.4.)

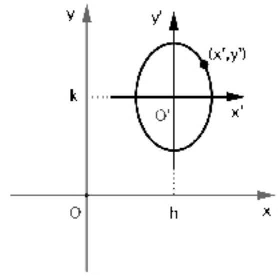


Figura 9.70: $x' = x - h$ e $y' = y - k$.

(ii) O eixo maior é paralelo ao eixo$-y$.

Analogamente ao caso **(i)**, temos

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (9.2)$$

Exemplo 9.4.1. Uma elipse cujo eixo maior é paralelo ao eixo$-y$ tem centro $C = (4, -2)$, excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$ e eixo menor de medida 6. Vamos obter a equação dessa elipse.

Como o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo$-y$, sua equação é da forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

sendo $h = 4$ e $k = -2$. Além disso, percebemos que $2b = 6$, ou seja, $b = 3$. E pelo fato de

$$e = \frac{c}{a} = 12 \Rightarrow c = \frac{a}{2}$$

temos ainda que $a^2 = b^2 + c^2$ nos conduz a

$$a^2 = 3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 9 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 12$$

E assim, a equação da elipse é

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$$

Agora, podemos ainda "trabalhar" um pouco mais essa expressão. De

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$4(x^2 - 8x + 16) + 3(y^2 + 4y + 4) = 36$$

$$\Downarrow$$

$$4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$$

é a ***equação geral*** *dessa elipse.*

Na verdade, qualquer elipse cujos eixos estão sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles sempre pode ser representada por uma **equação geral** na forma

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0, \tag{9.3}$$

com a e b de mesmo sinal. Quando $a = b$, essa equação representa uma circunferência. Por exemplo, quando $a = b = 1$, $c = d = 0$ e $f = -2$, a equação será

$$x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

que representa uma circunferência centrada na origem de raio 4.

9.5 Equações paramétricas da elipse

Considere a equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Agora, tracemos uma circunferência de centro O e raio igual ao semi-eixo maior da elipse.

Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da elipse. A reta que passa por P, paralela ao eixo$-y$, intercepta a circunferência no ponto A e o raio AO determina com o eixo$-x$ um ângulo θ. Assim, do

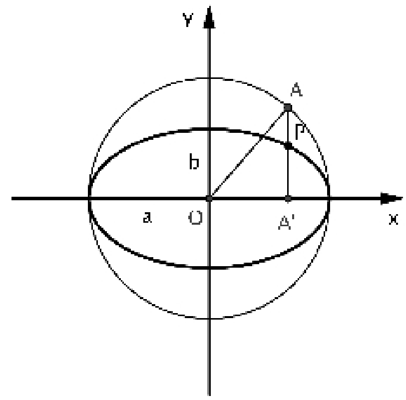


Figura 9.71: $OA' = OA \cdot \cos\theta$.

triângulo $A'OA$ temos $OA' = OA\cos\theta$, ou $x = a\cos\theta$, então

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \mathrm{sen}\,^2\theta$$

Portanto, $y = b\mathrm{sen}\,\theta$. Para que a cada valor de θ façamos corresponder um só ponto da elipse P, podemos concluir que θ deve pertencer ao intervalo $[0, 2\pi]$. Então, θ é o parâmetro.

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & a\cos\theta \\ y = & b\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{9.1}$$

são as **equações paramétricas** dessa elipse.

Observação 14. • De

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & a\cos\theta \\ y = & b\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} \frac{x}{a} = & \cos\theta \\ \frac{y}{b} = & \mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right.$$

e assim, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, pois, $\cos^2\theta + \mathrm{sen}\,^2\theta = 1$.

- Caso a elipse tenha o eixo maior sobre o eixo$-y$, constatamos que $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = & b\cos\theta \\ y = & a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \tag{9.2}$$

- E quando o centro da elipse for $C = (h, k)$, pela translação dos eixos obtemos

$$\begin{cases} x = & h + a\cos\theta \\ y = & k + b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{(eixo maior paralelo ao eixo}-x) \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} x = & h + b\cos\theta \\ y = & k + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{(eixo maior paralelo ao eixo}-y) \tag{9.4}$$

Exemplo 9.5.1. Verificamos que a equação reduzida de $9x^2 + 4y^2 - 54x + 16y + 61 = 0$ é dada por

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

e assim, a elipse tem como centro $C = (3, -2)$, com $a = 3$ e $b = 2$. Portanto,

$$\begin{cases} x = & 3 + 2\cos\theta \\ y = & -2 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

são as equações paramétricas da elipse.

9.6 Resumo

Nesta aula, conhecemos um pouco mais sobre a elipse e suas propriedades. Aprendemos que a excentricidade é responsável por determinar a forma da elipse, que pode ser circular ou achatada, ou ainda variar quanto ao tamanho. Também foi possível conhecer algumas de suas formas de representação, como a equação reduzida e a equação paramétrica da elipse.

9.7 Atividades

1. Em cada um dos itens a seguir, esboce o gráfico e determine os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas:

   (a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

   (b) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$;

   (c) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$;

   (d) $x^2 + 2y^2 - 5 = 0$.

2. Esboce o gráfico de uma elipse com as seguintes excentricidades:

   (a) $1/2$;

   (b) $1/3$.

3. Em cada um dos itens a seguir, determine uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas e esboce seu gráfico.

   (a) focos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4.0)$, eixo maior igual a 10;

   (b) focos $F_1 = (0, -5)$ e $F_2 = (0, 5)$, eixo menor igual a 10;

   (c) vértices $A_1 = (-10, 0)$ e $A_2 = (10, 0)$, excentricidade $1/2$;

   (d) centro $C = (0, 0)$, eixo menor igual a 6, focos no eixo dos x e passando pelo ponto $(-2\sqrt{5}, 2)$.

4. Obtenha a equação paramétrica da elipse das seguintes equações:

   (a) $x^2 + y^2 = 36$;

(b) $9x^2 + 16y^2 = 1$;

(c) $49(x+7)^2 + y^2 = 7$.

5. Obtenha a equação geral da elipse das equações paramétricas a seguir:

(a) $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 3\operatorname{sen}\theta \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = -1 + \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

6. Quais são as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 32$ que têm inclinação igual a $1/2$?

7. Um satélite de órbita elíptica e excentricidade $1/3$ viaja ao redor de um planeta situado num dos focos da elipse. Sabendo-se que a distância mais próxima do satélite ao planeta é de 300 km, calcule a maior distância.

9.8 Comentário sobre as Atividades

Você resolveu as atividades 1,2,3 e 7? Então entendeu a definição da elipse e seus componentes (focos, vértices, excentricidade). Se conseguiu resolver a atividade 6, então você já tem uma idéia de como funciona a equação geral da elipse. Se concluiu a 4 e a 5, já sabe como obter a equação paramétrica da elipse e aplicá-la.

9.9 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.