2
LIVRO

10
AULA

Cônicas - Parte III

META

Apresentar a definição de equações de planos no espaço e suas propriedades geométricas direcionadas à hipérbole.

OBJETIVOS

Identificar a hipérbole no plano. Comparar ou diferenciar algumas formas de representar a hipérbole com base nas equações reduzidas e paramétricas da elipse.

PRÉ-REQUISITOS

Para que você possa ter um bom desempenho nesta aula, é necessário que tenha assimilado os conteúdos das aulas anteriores, desde a primeira até a sétima.

10.1 Introdução

Olá! Chegamos à metade de nossa disciplina. Isto significa que já temos boa parte das ferramentas matemáticas para avançarmos nos próximos conteúdos.

Na aula passada, entramos em contato com a elipse e suas propriedades, além das formas para representá-la. Nesta aula, vamos apresentar a hipérbole e suas propriedades. Também veremos que é possível representar hipérboles por equação reduzida e paramétrica.

10.2 Hipérbole

Da mesma forma como apresentamos para você as diferentes formas de representar a parábola e a elipse, através das equações reduzida e paramétrica, assim procederemos com a hipérbole. Vamos dar início pela sua definição.

Definição 10.33. HIPÉRBOLE
Sejam F_1 e F_2 dois pontos do plano e a um número real positivo. Chamamos de **hipérbole** de focos F_1 e F_2 o conjunto dos pontos P do plano cuja diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é, em valor absoluto, igual a $2a$.

Assim, o ponto P pertence a essa hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \tag{10.1}$$

A hipérbole $\mathcal{H}$ tem dois ramos, um formado pelos pontos P para os quais a diferença é positiva $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, e outro em que essa diferença é negativa, isto é, $d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$.

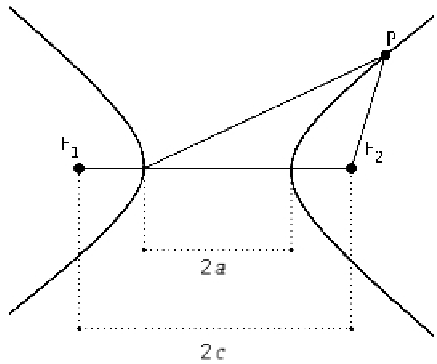


Figura 10.72: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

Considere no plano dois pontos quaisquer F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$. Chamando de C o ponto médio do segmento de F_1F_2, tracemos uma circunferência de centro C e raio c.

Tomemos um valor arbitrário a, com $a < c$, e marquemos sobre o segmento F_1F_2, a partir de C, os pontos A_1 e A_2, tal que $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$. Por esses pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2. As quatro extremidades dessas cordas são os vértices de um retângulo $MNPQ$ inscrito nesta circunferência. Tracemos as retas r e s que contêm as diagonais do retângulo e a hipérbole, como ilustrada na figura (10.2).

Notação:

Focos: são os focos F_1 e F_2.

Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.

Vértice: são os pontos A_1 e A_2.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

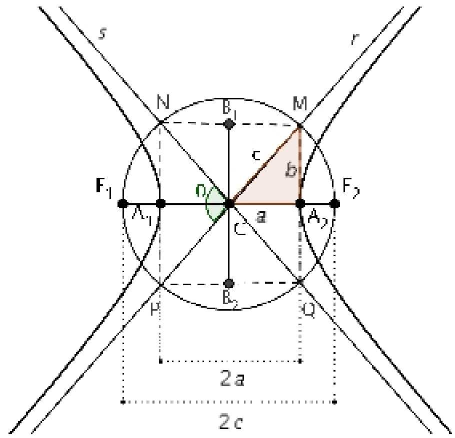


Figura 10.73: Hipérbole com focos F_1 e F_2.

Eixo imaginário ou não-transverso: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, com $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C.

Assíntotas: são as retas r e s.

Perceba que os pontos A_1 e A_2 pertencem à hipérbole, pois satisfazem a definição (10.33).Assim, observe que

$$d(A_1, F_1) = c - a \quad \text{e} \quad d(A_1, F_2) = a + c$$

além de

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = |-2a| = 2a.$$

O retângulo $MNPQ$ tem dimensões $2a$ e $2b$, sabendo que a é a medida de semi-eixo real e b a medida do semi-eixo imaginário, assim, vale a relação

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{10.2}$$

As assíntotas são as retas de que a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam do vértice. Essa aproximação é "contínua"e "lenta", de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar as suas assíntotas no infinito.

Observando ainda a figura (10.2), percebemos que as retas formam um ângulo (θ) no ponto C. O ângulo θ é chamado de **abertura** da hipérbole.

Definição 10.34. Chama-se de **excentricidade** da hipérbole o número

$$e = \frac{c}{a}. \tag{10.3}$$

A excentricidade da hipérbole está influenciada diretamente na abertura.

Atentando para a figura (10.2), constatamos temos que $c > a$ e tem-se $e > 1$. Porém,

- (mantendo o c fixo) fazendo a quanto menor possível (aproximando-se de zero), aumenta o valor de e,
- (mantendo o c fixo) fazendo a o mais próximo possível de c, verificamos que e se aproxima de 1, e
- caso $e = \sqrt{2}$, a hipérbole terá que $r \perp s$ e será chamada de **hipérbole equilátera**.

Agora que você já teve contato com a primeira parte teórica sobre a hipérbole, veja a seguir como ela pode ser aplicada na prática.

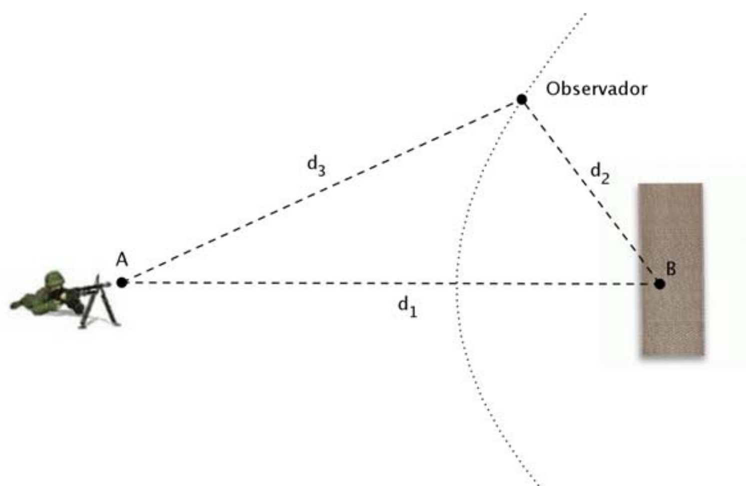
Exemplo 10.2.1 (Uma aplicação)**.** Imagine a seguinte situação: um atirador dispara sua arma contra o muro e um observador ouve o estampido e o impacto da bala no alvo simultanemante. Qual a localização do observador em relação ao muro e ao atirador?

Vamos à solução?

Assim, considere a velocidade do som constante[1] e a velocidade da bala[2] como o dobro da velocidade do som, isto é, se v_{som} e v_b são as velocidades do som e da bala, então $v_b = 2v_{som}$. Sejam t_1 o tempo para a bala percorrer o trajeto do atirador ao muro e t_2 e t_3 os tempos gastos pelo som para percorrer as distâncias d_2 e d_3 em que:

- (d_1) é a distância do atirador ao muro;
- (d_2) é a distância do observador ao muro;
- (d_3) é a distância do atirador ao observador,

respectivamente.



Sendo assim,

$$v_b = \frac{d_1}{t_1}, \quad v_{som} = \frac{d_2}{t_2}, \quad v_{som} = \frac{d_3}{t_3}$$

$$\Downarrow$$

[1]A velocidade do som é de aproximadamente 340 m/s ao nível do mar.

[2]Existem armas que disparam projéteis a velocidades muitas vezes superiores à do som, chegando a mais de 3000 m/s.

$$t_1 = \frac{d_1}{v_b}, \quad t_2 = \frac{d_2}{v_{som}}, \quad t_3 = \frac{d_3}{v_{som}}$$

Perceba que o tempo gasto pela bala para chegar ao muro (t_1), acrescido do tempo gasto do momento de impacto à chegada do som até o observador (t_2), deve ser igual ao tempo que o som do disparo percorre até o observador, ou seja,

$$t_3 = t_1 + t_2.$$

Assim,

$$\frac{d_3}{v_{som}} = \frac{d_1}{v_b} + \frac{d_2}{v_{som}} \Rightarrow \frac{d_3}{v_{som}} - \frac{d_2}{v_{som}} = \frac{d_1}{v_b} \Rightarrow \frac{(d_3 - d_2)}{v_{som}} = \frac{d_1}{v_b}$$

O que nos dá a equação

$$d_3 - d_2 = \frac{d_1 v_{som}}{v_b}.$$

Note que se fizermos $v_b = 2v_{som}$ o quociente $v_b/v_{som} = 1/2$ e se colocarmos $d_1 = 2c$, a equação anterior fica:

$$d_3 - d_2 = c = 2a.$$

Portanto, o observador ouve o impacto da bala no muro e o disparo no mesmo instante de tempo se, e somente se, ele estiver sobre algum ponto da hipérbole de focos A e B com eixo real de comprimento $2a = d_1/2$.

Exercício 10.2.1. Pense nas hipóteses do exemplo (10.2.1), mas, desta vez, vamos considerar que a velociadade da bala v_b seja arbitrária. Diante disso, qual deverá ser a posição do observador para que ele ouça ambos os sons (do impacto da bala no muro e do disparo simultaneamente)?

[**Sugestão: mostre que a excentricidade da hipérbole é dada por v_b/v_{som} e faça as conclusões a respeito da posição do observador.**]

10.3 Equações reduzidas

Assim como já vimos nas duas cônicas que estudamos nas últimas aulas, a hipérbole também pode ser representada por equações reduzidas. É o que iremos apresentar para você a partir de agora.

Seja a hipérbole de centro $C = (0, 0)$. Consideremos os seguintes casos:

(i) o eixo real está sobre o eixo$-x$.

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da hipérbole de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, pela definição (10.33), temos

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

e em coordenadas

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a, \quad \text{com } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.1}$$

A equação (10.1) é chamada de **equação reduzida** da hipérbole para este caso.

(ii) o eixo real está sobre o eixo$-y$.

Procedendo de forma análoga ao caso **(i)**, obtemos a equação reduzida (veja a figura (10.3)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{10.2}$$

Exemplo 10.3.1. Na equação reduzida

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \tag{10.3}$$

em que $a^2 = 3^2 = 9$ e $b^2 = 2^2 = 4$.

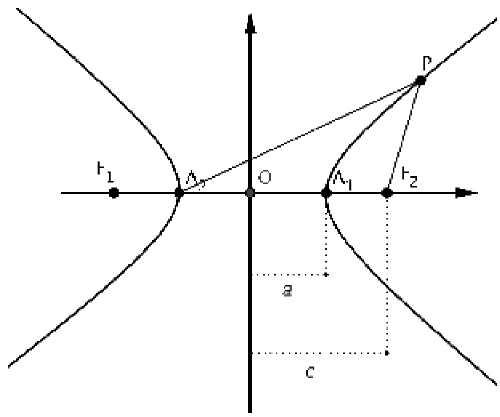


Figura 10.74: Os focos F_1 e F_2 estão sobre o eixo$-x$.

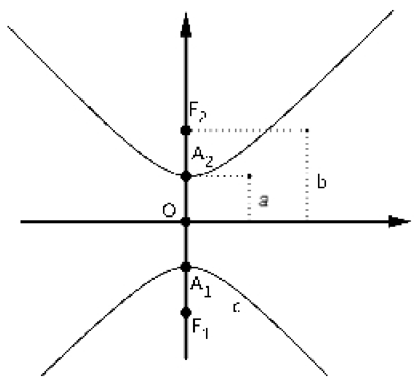


Figura 10.75: Os focos F_1 e F_2 estão sobre o eixo$-y$.

- Observe que os vértices são $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (3, 0)$, que poderiam ser obtidos a partir de (10.3. Tomando $y = 0$, temos que
$$\frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow x = \pm 3.$$
Por outro lado, veja que tomando $x = 0$ em (10.3), verificamos que $y^2 = -4$, e assim, não há pontos da hipérbole que corte o eixo$-y$.

- A hipérbole é simétrica em relação aos eixos coordenados e à origem, pois as potências de x e y são pares.

- As retas r e s são as assíntotas da hipérbole, pois ambas passam pelo centro da hipérbole (neste caso, coincidem com a origem do sistema). Podemos observar que ambas as retas têm equações na forma $y = mx$, em que m é o coeficiente de inclinação da reta. Notamos que:

  1. na reta r, $m_1 = \dfrac{b}{a} \Rightarrow m_1 = \dfrac{2}{3}$;
  2. e na reta s, $m_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow m_2 = -\dfrac{2}{3}$.

  Logo, as assíntotas têm equações $y = \dfrac{2}{3}\,x$ e $y = -\dfrac{2}{3}\,x$.

- Caso a equação reduzida da hipérbole seja da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

  os coeficientes de inclinação das assíntotas são $m = \pm\dfrac{a}{b}$.

Exemplo 10.3.2. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a função definida por $f(x) = 1/x$. O gráfico de f é o conjunto $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0,\ y = 1/x\}$. G é um ramo de hipérbole.

Para confirmar esta afirmação, devemos introduzir no plano um novo sistema de coordenadas com a mesma origem e com eixos formando ângulos de 45^o com os eixos antigos. Chamamos de (s, t) as coordenadas de um ponto nesses novos eixos. Para obtermos a equação da curva G em relação aos novos eixos, devemos escrever x e y dependendo de s e t.

Desta forma, se sabemos que em um triângulo retângulo os ângulos agudos medem 45^o, cada cateto é igual a $\sqrt{2}/2$ vezes a

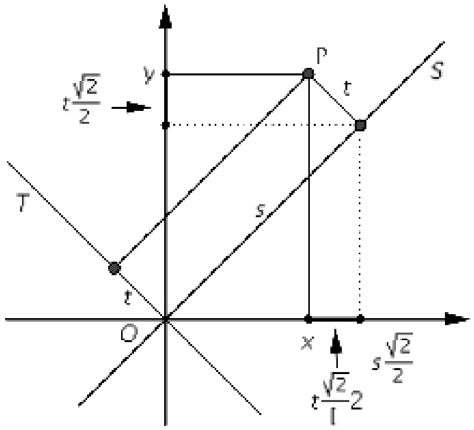


Figura 10.76: $x = s\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = s\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}$

hipotenusa, e assim, um ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema antigo e (s, t) no sistema novo(veja na figura (10.76), então

$$x = s\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = s\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Além disso, se $x > 0$ e $y > 0$, então $s > 0$. Portanto, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $P = (x, y) \in G$;

2. $x > 0$ e $xy = 1$;

3. $s > 0$ e $\left(s\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$;

4. $s > 0$ e $\frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} = 1$;

5. $s > 0$ e $\frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1$, com $a = b = \sqrt{2}$;

6. *P pertence ao ramo direito de uma hipérbole cujo eixo é a reta $y = x$.*

Logo, G é um ramo de hipérbole.

10.4 Translações de uma hipérbole

Nesta seção, iremos apresentar a você as translações de uma hipérbole. Acompanhe o nosso raciocínio e você verá que é tão fácil quanto as das demais cônicas que já estudamos.

Seja uma hipérbole de centro $C = (h, k) \neq (0, 0)$. Consideremos apenas os casos em que os eixos sejam paralelos aos eixo$-x$ e eixo$-y$.

(i) o eixo real é paralelo ao eixo$-x$.

Analogamente ao que fizemos para a elipse na aula anterior, temos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{10.1}$$

que é a forma padrão para este caso.

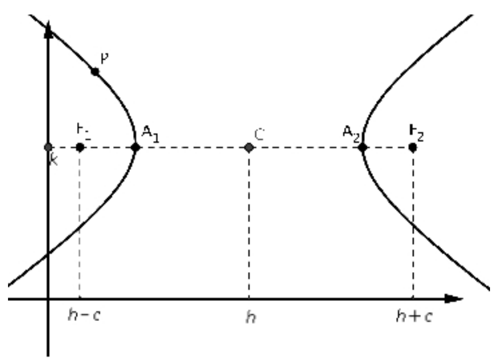


Figura 10.77: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

(ii) o eixo real é paralelo ao eixo$-y$.

Como em **(i)**,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{10.2}$$

Percebemos que a partir da equação (10.1), temos que de

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2-2hx+h^2}{a^2} - \frac{y^2-2ky+k^2}{b^2} = 1$$

Multiplicando ambos os membros por a^2b^2, temos

$$b^2(x^2-2hx+h^2) - a^2(y^2-2ky+k^2) = a^2b^2$$

$$\Downarrow$$

$$b^2x^2 - 2hb^2x + h^2b^2 - a^2y^2 + 2ka^2y - a^2k^2 = a^2b^2$$

$$\Downarrow$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2hb^2x + 2ka^2y + h^2b^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Assim, verificamos que

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0 \tag{10.3}$$

sendo $A = b^2$, $B = -a^2$, $C = -2hb^2$, $D = 2ka^2$ e $F = -a^2k^2 - a^2b^2$. A equação (10.3) é chamada de **equação geral da hipérbole**, com A e B de sinais contrários.

Exemplo 10.4.1. Determinar uma equação da hipérbole de vértices $A_1 = (1,-2)$ e $A_2 = (5,-2)$, sabendo-se que $F = (6,-2)$ é um de seus focos.

Sendo o eixo real A_1A_2 paralelo ao eixo$-x$, a equação da hipérbole (veja na figura (10.78)) é da forma,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

O centro é o ponto médio de A_1A_2*:* $C = (3, -2)$.

Note que $a = d(C, A_1) = 2$ *e* $c = d(C, F) = 3$*. Da relação* $c^2 = a^2 + b^2$*, ou* $9 = 4 + b^2$*, temos que* $b^2 = 5$*. E assim, a equação da hipérbole é*

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1.$$

Se a desenvolvermos, obteremos

$$5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 9 = 0$$

que é a equação geral dessa hipérbole

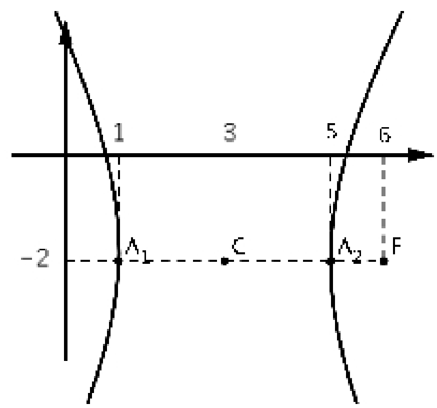


Figura 10.78: $5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 9 = 0$

10.5 Equações paramétricas

Agora, vamos às paramétricas. Está lembrado delas? Você as conheceu quando abordamos a parábola e a elipse nas aulas 8 e 9. Então, vamos ver como elas funcionam com a hipérbole.

Considere a hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, e a coloquemos da seguinte forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Agora, observemos que a identidade

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

e dividindo ambos os membros por $\cos^2\theta \neq 0$, obteremos

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ou

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$ e $\dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, temos

$$\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$$

Portanto, podemos tomar

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sec\theta \\ \dfrac{y}{b} = \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

e concluímos que para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, exceto para $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$, temos que

$$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\operatorname{tg}\theta \end{cases} \tag{10.1}$$

são as **equações paramétricas** dessa hipérbole.

Observação 15. Quando $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, dizemos que é o **ramo direito** da hipérbole ($x \geq a$) e quando $\theta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, chamamos de **ramo esquerdo** ($x \leq -a$).

Observação 16. No caso em que a hipérbole tem equação reduzida $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (eixo real sobre o eixo$-y$), suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = b\operatorname{tg}\theta \\ y = a\sec\theta \end{cases} \tag{10.2}$$

Observação 17. Nos casos em que o centro da hipérbole for $C = (h, k)$, aplicando a translação de eixos, temos

$$\begin{cases} x = h + a\sec\theta \\ y = k + b\text{tg}\,\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = h + b\text{tg}\,\theta \\ y = k + a\sec\theta \end{cases}$$

Exemplo 10.5.1. A partir da equação $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, podemos encontrar as equações paramétricas da hipérbole.

De $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, *obtemos facilmente que*

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

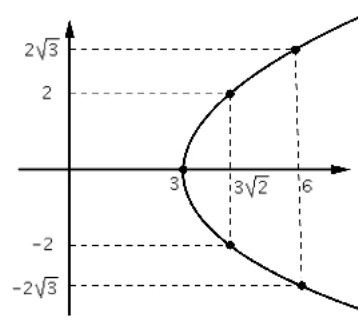
e assim, $a = 3$ *e* $b = 2$. *Portanto,*

$$\begin{cases} x = 3\sec\theta \\ y = 2\text{tg}\,\theta \end{cases}$$

são as equações paramétricas dessa hipérbole.

Na figura a seguir, apenas são indicados pontos da tabela para alguns ângulos no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

θ	Pontos
0	$(3, 0)$
$\frac{\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, 2)$
$-\frac{\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, -2)$
$\frac{\pi}{3}$	$(6, 2\sqrt{3})$
$-\frac{\pi}{3}$	$(6, -2\sqrt{3})$



10.6 Resumo

Nesta aula, estudamos a terceira das cônicas apresentadas na Aula 8, a hipérbole. Além de conhecermos a sua definição e suas propriedades, conhecemos também algumas maneiras de a representarmos, como a equação reduzida e a equação paramétrica da hipérbole.

10.7 Atividades

1. Em cada um dos itens a seguir, esboce o gráfico e determine os vértices, os focos, a excentricidade e as equações das assíntotas das hipérboles dadas.

   (a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

   (b) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$;

   (c) $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$;

   (d) $y^2 - x^2 = 2$.

2. Para todo ponto $P = (m, n)$ na hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que a reta $r : \dfrac{m}{a^2}x - \dfrac{n}{b^2}y = 1$ tem apenas o ponto P em comum com $\mathcal{H}$. A reta r chama-se a **tangente** a $\mathcal{H}$ no ponto P.

3. Nos ítens a seguir, obtenha uma equação geral da hipérbole dada por equações paramétricas. Esboce o gráfico.

   (a) $\begin{cases} x = 4\sec\theta \\ y = 2\operatorname{tg}\theta \end{cases}$;

   (b) $\begin{cases} x = 2\sec\theta \\ y = 4 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\theta \end{cases}$.

4. Determine os focos da hipérbole de equações $x = 4 + \sqrt{5}\operatorname{tg}\theta$ e $y = -5 + 2\sec\theta$.

10.8 Comentário sobre as Atividades

Se você conseguiu resolver as atividades 1 e 2, então entendeu a definição de hipérbole e seus componentes (focos, excentricidade e outros). Além disso, você pôde observar como é possível escrever a hipérbole na forma de uma equação reduzida. Já em 3 e 4, você deve ter usado o conceito de equação paramétrica da hipérbole. Não se esqueça dos exercícios que se encontram inseridos no texto. São tão importantes quanto os que estão nesta lista.

10.9 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.