2
LIVRO

11
AULA

Mudança de Coordenadas no Plano

META

Introduzir o conceito de mudanças de coordenadas no plano e exemplificá-la.

OBJETIVOS

Efetuar e reconhecer mudanças de coordenadas no plano, como rotação e translação dos eixos, além de aplicar este conteúdo para reconhecer melhor as cônicas com base em uma equação dada.

PRÉ-REQUISITO Ter compreendido o conceito de produto interno (produto escalar) entre vetores (Aula 3).

11.1 Introdução

Nesta aula, conheceremos uma ferramenta importante na manipulação de objetos geométricos no plano. Existem situações em que é conveniente e, em algumas delas, necessário passar de um sistema de eixos ortogonais (por exemplo, os eixos$-x$ e eixo$-y$) para outro sistema (eixo$-x'$ e eixo$-y'$) no plano. Nesses casos, é imprescindível exprimir as coordenadas novas em função das coordenadas antigas (x, y).

11.2 Mudanças de Coordenadas - Rotação e Translação da Origem

Para facilitar nossas "contas", vamos exprimir as coordenadas de um ponto em termos do produto interno (ou produto escalar), aquele mesmo que você aprendeu na Aula 3.

DDiante disto, tome $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$, que representam os eixos x e y respectivamente, com $O = (0, 0)$ a origem do sistema de eixos coordenados. Seja o ponto $P = (x, y)$, então

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

e perceba que

$$\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle = 1 \quad \text{e}$$

$$\langle \vec{j}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = 0$$

e ainda

$$\langle \overrightarrow{OP}, \vec{i} \rangle = \langle x\vec{i} + y\vec{j}, \vec{i} \rangle = x\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle + y\langle \vec{j}, \vec{i} \rangle = x$$

ou seja, $\boxed{x = \langle \overrightarrow{OP}, \vec{i} \rangle}$ e, analogamente, $\boxed{y = \langle \overrightarrow{OP}, \vec{j} \rangle}$.

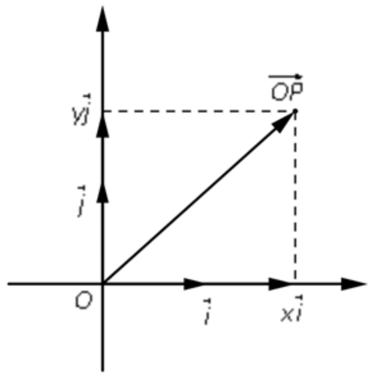

Figura 11.79: $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exercício 11.2.1. Faça as "contas" para mostrar que $y = \langle \overrightarrow{OP}, \vec{j} \rangle$.

Portanto, as coordenadas de um ponto P no plano$-xy$ são os produtos internos de $\overrightarrow{OP}$ por $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Sejam (x', y') outro sistema de eixos coordenados no plano. Denotamos por $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ os vetores unitários dos eixos x' e y'. Sejam (a, b) as coordenadas do ponto O' no sistema antigo (eixos x e y) e θ o ângulo de que é preciso girar o eixo$-x$ (no sentido positivo, ou seja, do eixo$-x$ para o eixo$-y$) para coincidir com o eixo$-x'$. Veja na figura (211.2). Então, θ é o ângulo de $\vec{i}$ para $\vec{f_1}$. Assim,

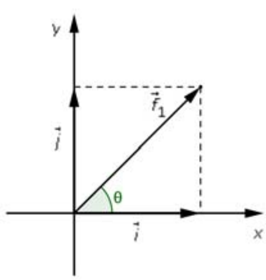

Figura 11.80: θ é o ângulo entre $\vec{i}$ e $\vec{f_1}$.

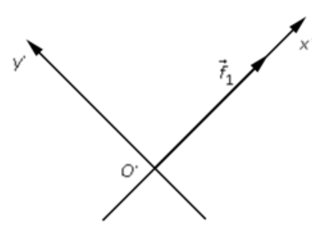

Figura 11.81: Novo sistema de coordenadas nos eixos x' e y'.

$$\vec{f_1} = \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}.$$

Note ainda que $\overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j}$, isto é, para o novo sistema de coordenadas,

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}$$

Então,

$$\begin{aligned} x' = \quad \langle\overrightarrow{O'P}, \vec{f_1}\rangle &= \langle(x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}, \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}\rangle \\ &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Assim, $\boxed{x' = (x-a)\cos\theta + (y-b)\operatorname{sen}\theta}$. Lembre-se de que esta-

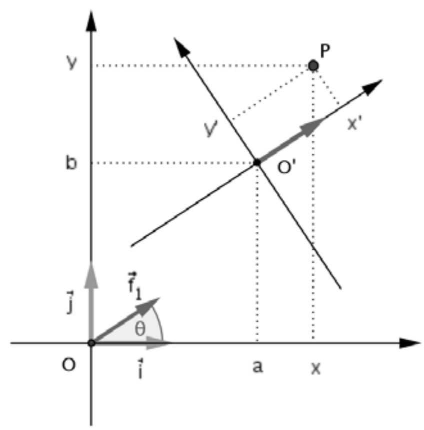

Figura 11.82: $P = (x', y')$ nas novas coordenadas.

mos considerando θ o ângulo entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{f_1}$ e $180^o + \theta$ o ângulo entre $\vec{j}$ e $\vec{f_2}$.

ATENÇÃO -

Vamos denotar o sistema de eixos coordenados xy por OXY e o sistema de eixos coordenados $x'y'$ por $O'X'Y'$.

Agora, veja que para a coordenada y' temos duas possibilidades.

1. O sistema com eixos $O'X'Y'$ se obtém do sistema de eixos OXY pela translação que leva O em O' (e desloca os eixos x e y paralelamente), seguida de uma rotação de ângulo θ. Diz-se, então, que os sistemas $O'X'Y'$ e OXY são **igualmente orientados** ou têm a **mesma orientação**.

2. Obtém-se $O'X'Y'$ a partir de OXY por meio da translação que leva O em O', seguida da rotação de ângulo θ e, depois, de uma reflexão em torno do eixo x'. Então os sistemas OXY e $O'X'Y'$ têm **orientações opostas**.

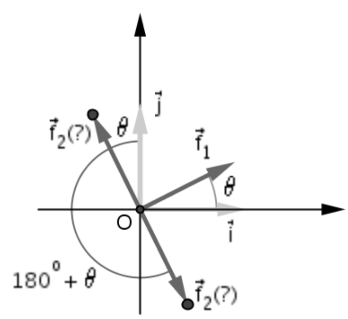

Figura 11.83: $\vec{f_2} \perp \vec{f_1}$ e o ângulo de $\vec{j}$ para $\vec{f_2}$ pode ser θ ou $180^o + \theta$.

Observação 18. Se $O'X'Y'$ têm a mesma orientação que OXY, então o vetor $\vec{f_2}$ é obtido de $\vec{f_1}$ por uma rotação de 90^o no sentido positivo (anti-horário). Como as coordenadas de $\vec{f_1}$ no sistema OXY são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, as de $\vec{f_2}$ são $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

- Portanto,

$$\vec{f_2} = -\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta v j.$$

- E no caso de o sistema $O'X'Y'$ ter orientação oposta à de OXY, então

$$\vec{f_2} = \operatorname{sen}\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}.$$

Com as informações da observação anterior, constatamos que:

- no caso em que ambos os sitemas têm a mesma orientação,

$$\begin{aligned} y' = \quad & \langle \overrightarrow{O'P}, \vec{f_2} \rangle = \quad \langle (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}, -\mathrm{sen}\,\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \rangle \\ = \quad & \qquad\qquad -(x-a)\mathrm{sen}\,\theta + (y-b)\cos\theta \end{aligned}$$

- mas se ambos os sistemas têm orientações opostas,

$$y' = (x-a)\mathrm{sen}\,\theta - (y-b)\cos\theta$$

Portanto, as fórmulas de mudança de coordenadas são:

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= -(x-a)\mathrm{sen}\,\theta + (y-b)\cos\theta \end{aligned} \tag{11.1}$$

ou

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\theta + (y-b)\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= (x-a)\mathrm{sen}\,\theta - (y-b)\cos\theta \end{aligned} \tag{11.2}$$

se o novo sistema $O'X'Y'$ tiver a mesma orientação do sistema OXY ou não.

Exemplo 11.2.1. Seja P um ponto no plano com coordenadas $(1,1)$ no sistema OXY. Vamos verificar o que ocorre com as coordenadas de P se fizermos uma mudança nos eixos coordenados girando $\theta = 45^0$. Deste modo, as novas coordenadas devem ser dadas por (11.1):

$$\begin{aligned} x' &= (x-0)\cos 45^o + (y-0)\mathrm{sen}\,45^o \\ y' &= -(x-0)\mathrm{sen}\,45^o + (y-0)\cos 45^o \end{aligned} \tag{11.3}$$

Note que nas equações (11.3)consideramos $\theta = 45^o$ e que a nova origem $O' = (0,0)$ coincide com a anterior, pois apenas fizemos uma rotação dos eixos. Então,

$$\begin{aligned} x' &= (x-0)\cos 45^o + (y-0)\mathrm{sen}\,45^o \\ y' &= -(x-0)\mathrm{sen}\,45^o + (y-0)\cos 45^o \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{aligned}$$

portanto, se para $P = (1,1)$ no sistema OXY, no novo sistema temos

$$\begin{array}{ll} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}1 + \frac{\sqrt{2}}{2}1 & \\ & \Rightarrow \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}1 + \frac{\sqrt{2}}{2}1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x' = \sqrt{2} \\ y' = 0 \end{array}$$

Logo, as coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas rotacionado de 45^o, $O'X'Y'$, são dadas por $(\sqrt{2}, 0)$. E no caso do ponto $Q = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ no sistema de coordenadas OXY, no novo sistema fica $(-1,-3)$. Veja a figura (11.2).

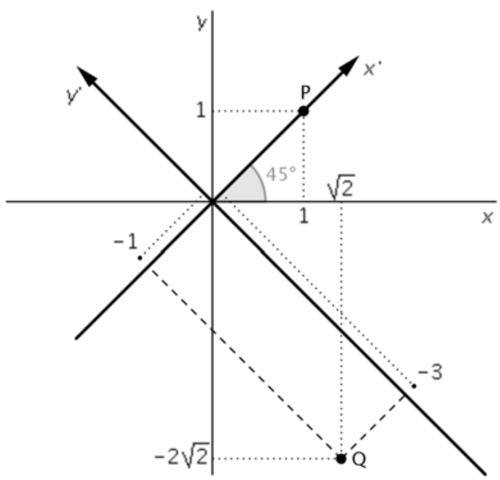

Figura 11.84: Os pontos P e Q estão representados em ambos os sistemas coordenados.

11.3 Obtendo as coordenadas antigas em função das novas

Note que as equações para obtermos (x', y'), dependendo de x, y e do ângulo θ, podem ser invertidas, e assim, você consegue obter fórmulas que para (x, y) dependem de x', y' e do ângulo θ.

Multiplicando a primeira equação em (11.1) por $\operatorname{sen}\theta$, a segunda equação em (11.1) por $\cos\theta$, e sem esquecer que

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

temos que

$$x'\operatorname{sen}\theta = (x-a)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + (y-b)\operatorname{sen}^2\theta$$

$$x'\cos\theta = -(x-a)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + (y-b)\cos^2\theta$$

e somando as equações, obtemos

$$x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = y - b$$

e assim, $\boxed{y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta + b}$. Multiplicando a primeira equação em (11.1) por $\cos\theta$ e a segunda equação em (11.1) por $(-\operatorname{sen}\theta)$, analogamente ao que fizemos para a expressão anterior, podemos obter $\boxed{x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta + a}$. Procedendo da mesma forma, podemos inverter o sistema (11.2) e obter as equações:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta + a \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta + b \end{aligned} \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta + a \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta - y'\cos\theta + b \end{aligned} \tag{11.2}$$

Com as equações dadas em (11.1 e 11.2) podemos obter de volta as coordenadas (x, y) do ponto P, no sistema OXY, em função das coordenadas (x', y') do sistema $O'X'Y'$. Como antes salientamos, usamos o primeiro par de equações em (11.1) quando os sistemas têm a mesma orientação, enquanto o segundo par de equações em (11.2) é utilizado quando os sistemas têm orientações opostas.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 11.3.1. Considere a curva de equação $x^2+4y^2=4$, que você pode transformar em $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$, bastando apenas dividir a equação $x^2+4y^2=4$ por 4, o que nos permite verificar que a expressão representa uma elipse. Procedendo como no exemplo (11.2.1), vejamos o que ocorre com essa equação ao se efetuar a mudança da rotação dos eixos de 45^o. As novas coordenadas x' e y' de um ponto do plano são obtidas a partir das antigas coordenadas x e y pelas expressões

$$\begin{array}{l} x = x'\cos 45^o - y'\text{sen}\, 45^o + 0 \\ y = x'\text{sen}\, 45^o + y'\cos 45^o + 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \end{array}$$

Substituindo na equação da elipse, percebemos que

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - x'y' + 2x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5x'^2}{2} + \frac{5y'^2}{2} + 3x'y' = 4$$

Observe que a equação se torna mais complexa do que antes, dificultando o seu reconhecimento. E assim, não é mais evidente que a equação anterior representa uma elipse.

Apesar do exemplo (11.2.1), você deve ter percebido que a mudança de coordenadas tornou tornado a equação da elipse mais complicada, em geral, uma das utilizações dessas mudanças se faz no sentido de facilitar o reconhecimento de equações, neste caso, da elipse.

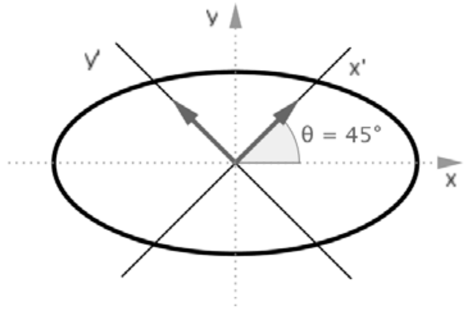

Figura 11.85: $x^2 + 4y^2 = 4$ em um sistema de coordenadas e $\frac{5x'^2}{2} + \frac{5y'^2}{2} + 3x'y' = 4$ no outro.

Exemplo 11.3.2. Seja E o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tal que $x^2 - xy + y^2 = 1$. Fazendo uma rotação positiva de 45^o sobre o sistema de eixos OXY, constituímos novas coordenadas x' e y', tal que

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

E substituindo na equação anterior, temos

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right) \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2$$

e assim, o conjunto E, representado pela equação $x^2 - xy + y^2 = 1$, poderá ser representado nas novas coordenadas por

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = 1$$

Isso nos mostra que o conjunto E é uma elipse cujo eixo maior está sobre o eixo$-x'$, ou seja, a reta $x = y$.

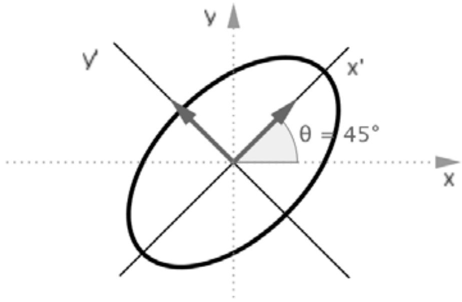

Figura 11.86: $x^2 - xy + y^2 = 1$ em um sistema coordenadas e $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{3y'^2}{2} = 1$ no outro.

11.4 Resumo

Nesta aula, você conheceu as mudanças de coordenadas no plano e verificou que efetuando rotações ou translações (ou ambas) dos eixos coordenados podemos melhor reconhecer uma cônica ou, simplesmente, facilitar a representação de uma equação.

11.5 Atividades

1. Uma mudança de eixos no plano manteve a origem fixa, enquanto as coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ passaram a ser (a, b) e (c, d), respectivamente.

   (a) Quais são as novas coordenadas do ponto $(2, 3)$?

   (b) Caso $(a, b) = (1, 1)$ e $(c, d) = (-1, 1)$, quais seriam as novas coordenadas do ponto $(0, 2)$?

2. Determine a translação de eixos que elimina os termos x e y na equação $9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y - 26 = 0$ e permite, assim, reconhecer a curva que ela representa.

3. Efetue uma rotação de -60^o no eixos OX e OY e identifique a curva $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy = 144$.

4. Se $A = (a, b)$ e $C = (c, d)$, sabemos que a expressão $ac + bd$ permanece invariante (ou seja, inalterada) por mudança de coordenadas, pois é o produto interno $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(A\widehat{O}C)$, em que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$. Mostre diretamente que se $A = (a', b')$ e $C = (c', d')$ num novo sistema de coordenadas, então $a'c' + b'd' = ac + bd$.

5. Num sistema de coordenadas em que se tem $F_1 = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ e $F_2 = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, determine a equação da elipse que tem esses pontos como focos e cujo eixo menor tem comprimento 6.

6. Qual é a equação da parábola cujo foco é o ponto $F = (1, 2)$ e cuja diretriz é a reta $x + 2y = -5$?

11.6 Comentário das atividades

Comentários : Conseguiu resolver as atividades 1,3 e 5? Então você entendeu como funciona a mudança de coordenadas no plano rotacionando os eixos coordenados. Se conseguiu fazer a atividade 2, percebeu como funcionam as mudanças de coordenadas usando translações. Na questão 4, você deve ter combinado ambas as mudanças, rotação e translação para resolvê-la. Ainda nesta atividade, você pôde perceber mais uma das propriedades dos vetores mediante uma mudança de coordenadas.

Se ainda tiver dificuldades, volte e reveja com cuidado os conceitos apresentados na aula. Não esqueça que há tutores para ajudar a eliminar as suas dúvidas. Desde já, lembre-se de discutir os conteúdos com seus colegas.

11.7 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.